

Πολυώνυμο

Το πολυώνυμο είναι της μορφής:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

π.χ.

$$P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 6x + 8$$

$$Q(x) = -8x^7 + 6x^4 + 3x - 1$$

$$R(x) = 12x^{21} - 3x + 1$$

$$F(x) = x^9 + 10$$

$$R(x) = 3x^7 - 5x^3 + 3(\sqrt{x}) - 8 \quad \text{Δεν είναι}$$

$$P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 2(x^{-1}) + 6 \quad \text{Δεν είναι}$$

$$Q(x) = 3x^2 - \frac{6}{x} + 8 \quad \text{Δεν είναι}$$

Βαθμός πολ/νου

Είναι ο μέγιστος εκθέτης του x .

π.χ.

$$P(x) = 3x^6 - 5x^2 - 6x \rightarrow 6^{\circ} \text{ βαθμός}$$

$$Q(x) = -5x^8 - 3x^5 + 10x^2 \rightarrow 8^{\circ} \text{ βαθμός}$$

$$R(x) = 5x^9 - 10x^8 + 7x^4 - 3x^{-2} + 6x - 5 \rightarrow \text{Δεν είναι πολ/νο}$$

Παράγωγος όρος ενός πολ/νου

Έστω το πολ/νο:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Τότε ο παράγωγος όρος του είναι το: (a_0)

π.χ.

$$P(x) = 5x^4 - 7x^3 + 6x - 8 \rightarrow \text{παραγ. όρος} = -8$$

$$Q(x) = 3x^6 - 7x^2 + 8x \rightarrow \text{Δεν έχει.}$$

$$F(x) = x^8 - 3x^7 + 8x^6$$

$$g(x) = 3x^2 - 7x - 12$$

Συντελεστής

Συντελεστής στο πολ/νο είναι τα $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1$

και βασικά είναι οι συντελεστές των δυνάμεων του x

Είδη πολ/νων

→ Το πολ/νο $P(x) = a_0$ λέγεται

σταθερό πολ/νο.

π.κ.

$$P(x) = -8$$

$$Q(x) = +\frac{3}{4}$$

→ Το πολ/το $P(x) = 0$ λέγεται
μυθενιός πολ/το

Παρατηρήσει

- Ι Το σταθερό πολ/το είναι μυθενιός βαθμός
- ΙΙ Το μυθενιός πολ/το ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΒΑΘΜΟ

Αριθμητική τιμή πολ/του

Έστω ότι έχουμε ένα πολ/το

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Τότε εάν βάλω στη θέση του x έναν αριθμό και
υπόχω ως πράξεις το αποτέλεσμα που βγαίνει
λέγεται τιμή του πολ/του για τον αριθμό αυτό

π.κ.

$$P(x) = 3x^5 - 8x^2 + 6x - 5$$

$$\text{Για } x=1 \rightarrow P(1) = 3 \cdot 1^5 - 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 5 = -4 \rightarrow \text{τιμή του πολ/του για } x=1 \quad P(1) = -4$$

$$\text{Για } x=-1 \rightarrow P(-1) = 3(-1)^5 - 8(-1)^2 + 6(-1) - 5 = -3 - 8 - 6 - 5 = -22 \rightarrow \text{τιμή του πολ/του για } x=-1 \quad P(-1) = -22$$

Ρίζα πολ/του

Είναι ο αριθμός ο οποίος όταν υποκαταστήσει στη θέση του x
στον τύπο του πολ/του και γίνουν οι πράξεις θα βγάλει αποτέλεσμα 0.

$$e \text{ ρίζα του } P(x) \Leftrightarrow P(e) = 0$$

π.κ.

Δίνεται το πολ/το $P(x) = 3x^4 - 5x + 2$
Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρίζα του.

- α) -1
- β) 2
- γ) 1

Λύση

$$P(x) = 3x^4 - 5x + 2$$

$$\alpha) P(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 5(-1) + 2 = 3 + 5 + 2 = 10 \neq 0 \quad \text{άρα το } -1 \text{ δεν είναι ρίζα του } P(x)$$

$$\beta) P(2) = 3 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 2 = 48 - 10 + 2 = 40 \neq 0 \quad \text{άρα το } 2 \text{ δεν είναι ρίζα του } P(x)$$

$$\gamma) P(1) = 3 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1 + 2 = 3 - 5 + 2 = 0 \quad \text{άρα το } 1 \text{ είναι ρίζα του } P(x)$$

Ισότητα πολ/των (μεθοδολογία)

Έστω δύο πολ/μοι $P(x) = \text{τύπος}$ και $Q(x) = \text{τύπος}$. Τα δύο πολ/μοι θα είναι ίσα μεταξύ τους όταν οι συντελεστές των δυνάμεων του x που είναι μετὰ δύο είναι μεταξύ τους ίσοι και οι συντελεστές του x που είναι στο ένα αλλά στο άλλο πολ/μο είναι μηδέν.

π.χ.

$$P(x) = (A-1)x^3 + (2A-1)x^2 + 4A-5$$

$$Q(x) = (A^2-1)x^3 + x^2 - 1$$

Για ποίε τιμή του $A \in \mathbb{R}$ τα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα;

Λύση

Για να είναι $P(x) = Q(x)$ θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} 2A-1 = 1 \\ \text{και} \\ 4A-5 = -1 \\ \text{και} \\ (A-1)^2 = 0 \\ \text{και} \\ A^2-1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \Rightarrow \frac{2A}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow A=1$$

Άρα για $A=1$ τα δύο πολ/μοι είναι ίσα μεταξύ τους.

Μηδενικό πολ/μο (Μεθοδολογία)

Για να είναι ένα πολ/μο $P(x)$ το μηδενικό θα πρέπει όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων του x και ο σταθερός τος όρος να είναι μηδέν.

π.χ.

$$\text{Δίνεται το πολ/μο } P(x) = (3A^2-27)x^4 - (3A+9)x^3 + (A+3)x + (2A+6)$$

Για ποίε τιμή του $A \in \mathbb{R}$ το $P(x)$ είναι το μηδενικό.

Λύση

Για να είναι το $P(x) = 0$ θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} 3A^2-27=0 \\ \text{και} \\ -(3A+9)=0 \\ \text{και} \\ A+3=0 \\ \text{και} \\ 2A+6=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array} \Rightarrow A=-3$$

Άρα για $A=-3$ το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολ/μο

Αριθμητική τιμή πολ/μου (Μεθοδολογία)

$$\text{Δίνεται το πολ/μο } P(x) = (A-1)x^4 - 5Ax^3 + (1-A^2)x^2 - 3A+6$$

Για ποίε τιμή του $A \in \mathbb{R}$ $P(1) = 3$.

Λύση

$$P(1) = 3 \Rightarrow$$

$$(1-1)^2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + (1-1)^2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 6 = 3$$

$$1^2 + 1 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 1 - 1^2 - 3 \cdot 1 + 6 = 3$$

$$\frac{-10}{-10} = \frac{-5}{-10}$$

$$\boxed{1 = \frac{1}{2}}$$

Ρίξη νολ/λολ (Μεθοδολογία)

$$\text{Δίνεται το νολ/λολ } Q(x) = (k^2-1)x^3 + (3k-3)x^2 + 6(k-1)^2x + 10k-20$$

Για ποιές τιμές του $k \in \mathbb{R}$ το $Q(x)$ έχει ρίξη το 1.

Λύση

Αφού το $Q(x)$ έχει ρίξη το 1 θα ισχύει:

$$Q(1) = 0$$

$$(k^2-1) \cdot 1^3 + (3k-3) \cdot 1^2 + 6(k-1)^2 \cdot 1 + 10k-20 = 0$$

$$k^2-1 + 3k-3 + 6(k^2+1-2k) + 10k-20 = 0$$

$$k^2-1 + 3k-3 + 6k^2+6-12k + 10k-20 = 0$$

$$7k^2+k-18 = 0$$

$$\Delta = b^2-4ac =$$

$$= 1^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-18) =$$

$$= 1 + 504 = 505 > 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{505}}{2 \cdot 7} \begin{cases} k_1 = \frac{-1 + \sqrt{505}}{14} \\ k_2 = \frac{-1 - \sqrt{505}}{14} \end{cases}$$

(Μεθοδολογίες)

①

Για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ το νολ/λολ $P(x) = 3x^5 - 7x + 6$ παίρνει την

$$\text{μορφή } P(x) = ax(x^4+1) - 4x + 2a+3$$

Λύση

$$P(x) = ax(x^4+1) - 4x + 2a+3 =$$

$$= ax^5 + ax - 4x + 2a+3 =$$

$$= ax^5 + (a-4)x + 2a+3$$

ήτοι

$$P(x) = ax^5 + (a-4)x + 2a+3$$

$$\begin{cases} \text{ήτοι} & P(x) = ax^5 + (a-4)x + 2a+3 \\ & \text{ωπ} \\ & P(x) = 3x^5 - 7x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ωπ} \\ a-4 = -7 \\ \text{ωπ} \\ 2a+3 = 6 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{α} = 3 \\ \text{Αρα δεν υπάρχει } a \in \mathbb{R} \text{ ώστε} \\ \text{να παίρνει τη μορφή που} \end{array} \right.$$

Μεθοδολογία [Τίτλος θρίσων των θωθίς ενόν πολ/ου]
 όων κωθό είναι ποροκέρουθ

$$P(x) = 5x^4 + 7x^3 - x + 6 \longrightarrow 4^{\circ} \text{ θωθίς}$$

$$Q(x) = (A-1)x^6 + 7(A^2-1)x^5 + (3A-3)x^4 + 6Ax^2 - 8 \longrightarrow \text{Δεν γρω το θωθίς του}$$

$$R(x) = (A^2+5)x^7 - (3A+6)x^6 + (A-3)x^5 + 8x - 10 \longrightarrow 7^{\circ} \text{ θωθίς το } A^2+5 \text{ αν } A \text{ ενίγεται ποτέ.}$$

Για να εξετάσω τον θωθίς ενόν ποροκέρουθ πολ/ου κώου τα εξής:

- Ⓘ Τίπρω τον ουτελέση του ποροκέρουθ όρου του και θρίσων που ενίγεται.
- Ⓜ Για όλες τις τιμές της ποροκέρουθ που είναι ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ κώο τις λίσες του Ⓘ θέλω το πολ/ο έχω τον θωθίς που θέλω.
- Ⓜ Βίγω στη θέση της ποροκέρουθ τις λίσες του βίγως Ⓘ και θέλω ποω πολ/ο ενίγεται και θέλω τον θωθίς του.

π.χ.

Να βρωθί ο θωθίς του πολ/ου $P(x) = (A^2-1)x^5 - (A-1)^2x^4 + (2A-2)x^3 + (6A-2)x^2 - (5A-5)x + 8$ για τις διάφορες τιμές του $A \in \mathbb{R}$.

Λύση

$$P(x) = (A^2-1)x^5 - (A-1)^2x^4 + (2A-2)x^3 + (6A-2)x^2 - (5A-5)x + 8$$

$$A^2-1=0$$

$$A^2=1$$

$$A = \pm 1 \quad \begin{cases} A=1 \\ \text{και} \\ A=-1 \end{cases}$$

→ Για $A \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ το $P(x)$ είναι 5° θωθίς

→ Για $A=1 \rightarrow P(x) = 4x^2 + 8 \rightarrow 2^{\circ} \text{ θωθίς}$

→ Για $A=-1 \rightarrow P(x) = -4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10x + 8 \rightarrow 4^{\circ} \text{ θωθίς}$