

① Πως ελέγχω εάν το $x-p$ είναι παράγοντας ενός πολ/μου $P(x)$.

Δίνεται $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x - 3$. Πρώτο από τα παρακάτω είναι παράγοντας του $P(x)$.
 i) $x+1$
 ii) $x-1$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad P(-1) &= (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 + 7(-1) - 3 = \\ &= 1 + 5 - 7 - 3 = -4 \end{aligned}$$

αρα το $(x+1)$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad P(1) &= 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 7 \cdot 1 - 3 = \\ &= 1 - 5 + 7 - 3 = 0 \end{aligned}$$

αρα το $(x-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$

②

Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το $P(x) = 3\lambda x^4 - 7\lambda x + 6$ έχει παράγοντα το $x+2$.

Λύση

Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} P(-2) &= 0 \Rightarrow \\ 3\lambda(-2)^4 - 7\lambda(-2) + 6 &= 0 \\ 48\lambda + 14\lambda + 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{62\lambda}{62} = -\frac{6}{62}$$

$$\lambda = -\frac{3}{31}$$

③

Πως δείχνω ότι ένα πολ/μο δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-p$.

Εάν δίνεται ένα πολ/μο $P(x)$ και θέλω να δείξω ότι δεν παράγοντα της μορφής $(x-p)$ τότε κάνω τα εξής:

ΒΗΜΑ: 1

Έχω ότι έχει παράγοντα της μορφής $(x-p)$ αρα πρέπει $P(p) = 0$

ΒΗΜΑ: 2

Παίρνω το $P(p) = 0$ κάνω πράξη και φέρνω σε κεί που δεν ισχύει

ΒΗΜΑ: 1

Παίρνω το $P(p) = 0$ κάνω πράξη
και φτάνω σε κάτι που δεν ισχύει
δλ. Άωτο.

η.κ.

Να δείξετε ότι το $P(x) = 3x^4 + 5x^2 + 6$ δεν έχει παράγοντα
της μορφής $(x-p)$.

Λύση

Έστω ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα της μορφής $(x-p)$
τότε

$$P(p) = 0 \Rightarrow$$

$$3p^4 + 5p^2 + 6 = 0 \quad \text{άωτο γιατί: } 3p^4 + 5p^2 + 6 \geq 6 > 0$$

$\neq \quad \neq \quad +6$

④

Πότε ένα πολ/ο $P(x)$ έχει παράγοντα της μορφής
 $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-\gamma) \dots$

Ένα πολ/ο $P(x)$ για να έχει παράγοντα το $(x-a) \cdot (x-b) \cdot (x-\gamma) \dots$

θα πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

ΒΗΜΑ: 1

Το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x-a)$

ΒΗΜΑ: 2

Κάνω διαίρεση (Horner) του $P(x)$ με το $(x-a)$
και βρίσκω το ηηλ/ο της $\pi(x)$

ΒΗΜΑ: 3

Το $\pi(x)$ να έχει παράγοντα το $(x-b)$

Βήμα: 4

Κάνω διαίρεση (Horner) του $\pi(x)$ με το $(x-b)$
και βρίσκω το ηηλ/ο της $\pi_1(x)$

Βήμα: 5

Το $\pi_1(x)$ να έχει παράγοντα το $(x-\gamma)$

Βήμα: 6

Κάνω διαίρεση (Horner) του $\pi_1(x)$ με το $(x-\gamma)$
και βρίσκω το ηηλ/ο της $\pi_2(x)$

η.κ.

Να δείξετε ότι το $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ έχει παράγοντα το
 $(x-1)$ $(x-2)$ $(x+1)$

Λύση

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0$$

Άρα το $(x-1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

1	-2	-1	2	1
0000	1	-1	-2	
1	-1	-2	0	

$$\eta(x) = x^2 - x - 2$$

$$\eta(2) = 2^2 - 2 - 2 = 4 - 4 = 0$$

αρα το $(x-2)$ είναι παράγοντας του $\eta(x)$

1	-1	-2	2
0000	2	2	
1	1	0	

$$\eta_1(x) = x + 1$$

$$\eta_1(-1) = -1 + 1 = 0$$

αρα το $(x+1)$ είναι παράγοντας του $\eta_1(x)$

Αρα το $(x-1)(x-2)(x+1)$ είναι παράγοντες του $P(x)$

π.χ.

Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε το πολ/ο να διαιρείται με το $(x-2)(x+1)$

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$$

να

λύση

Το $(x-2) \cdot (x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$ άρα:

$$P(2) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2a + b = 0 \Rightarrow$$

$$16 - 12 + 2a + b = 0 \Rightarrow$$

$$2a + b = -4 \quad (1)$$

2	-3	a	b	2
0000	4	2	2a+4	
2	1	a+2	2a+4+b	

$$\eta(x) = 2x^2 + x + a + 2$$

$$\alpha \rho \alpha \quad \eta(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot (-1)^2 + (-1) + a + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$2 - 1 + a + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{a = -3} \quad (2)$$

Αρ

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \Rightarrow 2a + b = -4 \\ \textcircled{2} \Rightarrow a = -3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \textcircled{1} \Rightarrow 2a + b = -4 \\ \textcircled{2} \Rightarrow a = -3 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2 \cdot (-3) + b = 4 \\ a = -3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2 \cdot (-3) + b = 4 \\ a = -3 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} -6 + b = 4 \\ a = -3 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} -6 + b = 4 \\ a = -3 \end{array}} \right\} \boxed{\begin{array}{l} b = 10 \\ a = -3 \end{array}}$$