

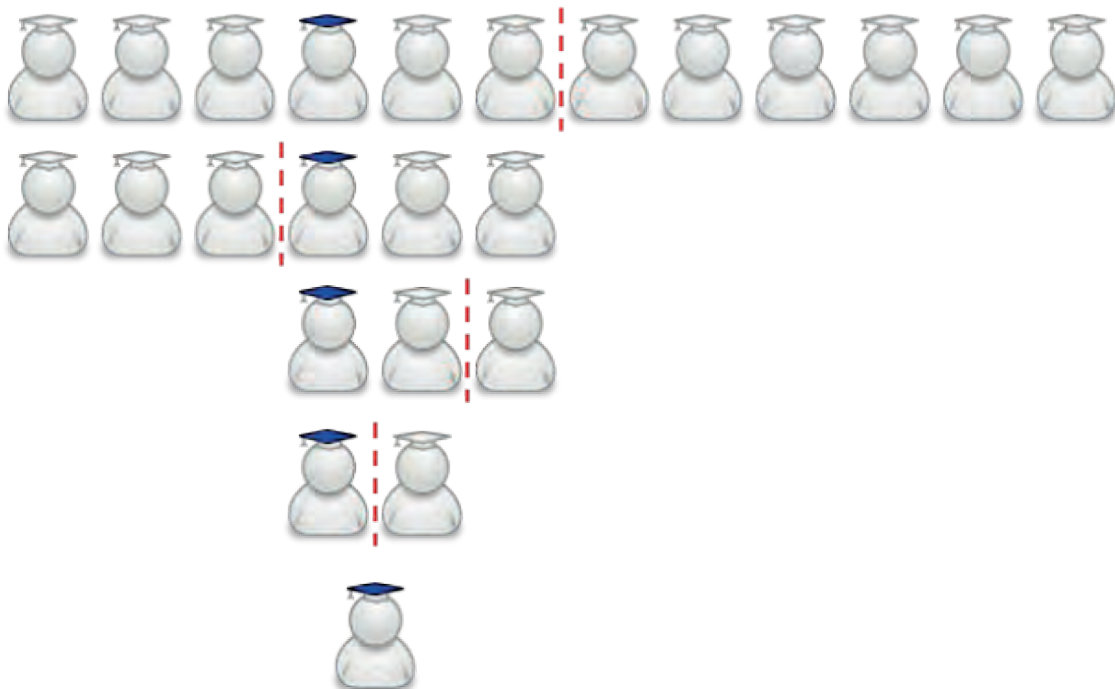
Ενότητα 2. Τεχνικές Σχεδίασης Αλγορίθμων

2.1 Μέθοδος Διαίρει και Βασίλευε

Σε μια κατασκήνωση, μια ομάδα 13 παιδιών αποφασίζει να παίξει το παιχνίδι «βρες το δαχτυλίδι». Σύμφωνα με τους κανόνες, ένα από τα παιδιά (στο εξής Παιδί-1) δίνει ένα δαχτυλίδι στα υπόλοιπα 12 και γυρνάει το σώμα του, δίχως να έχει οπτική επαφή με τα υπόλοιπα. Ένα παιδί κρύβει το δαχτυλίδι στην τσέπη του και όλοι μαζί κάθονται σε μια γραμμή γνωρίζοντας ποιος έχει κρύψει το δαχτυλίδι. Το Παιδί-1 που δε βλέπει τα υπόλοιπα, ισχυρίζεται ότι θα μαντέψει πάρα πολύ γρήγορα πού βρίσκεται το δαχτυλίδι με την προϋπόθεση ότι κάποιο παιδί (εκπρόσωπος) θα απαντά στις ερωτήσεις που θα του κάνει με ένα ναι ή ένα όχι.

Το Παιδί-1 ζητά από τα μισά παιδιά της γραμμής να κάνουν ένα βήμα μπροστά. Στη συνέχεια, ρωτά τον εκπρόσωπο εάν το δαχτυλίδι βρίσκεται στο δεύτερο «μισό» της γραμμής, που είναι ένα βήμα πιο πίσω. Όταν μάθει σε ποιο από τα δύο «μισά» βρίσκεται το δαχτυλίδι, ζητά από τα παιδιά που βρίσκονται στο άλλο «μισό» να βγουν εκτός παιχνιδιού. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται με το «μισό» που βρίσκεται ακόμη στο παιχνίδι, μέχρι να μείνουν μόνο δύο παιδιά, όπου θα γίνει και η τελευταία ερώτηση από το Παιδί-1. Επομένως με τέσσερις ερωτήσεις, το Παιδί-1 εντόπισε το παιδί που έχει κρυμμένο το δαχτυλίδι.

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η περιγραφόμενη διαδικασία κατά την οποία το παιδί με το μπλε καπέλο έχει το δαχτυλίδι και η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή σηματοδοτεί το σημείο, όπου κάθε φορά (σε κάθε επανάληψη) μειώνεται η γραμμή των παιδιών στο μισό.



Εικόνα 1. Σχηματική αναπαράσταση του παιχνιδιού βρες το δαχτυλίδι

Όλα τα παιδιά εντυπωσιάστηκαν από την ταχύτητα με την οποία το Παιδί-1 βρήκε το δαχτυλίδι και προσπάθουν να ανακαλύψουν τον συστηματικό τρόπο με τον οποίο σκέφτηκε.

Το μόνο που ήξεραν ήταν ότι το Παιδί-1 χώρισε αρχικά το σύνολο των παιδιών σε δύο «μισά» (ίσες ομάδες) και όταν ανακάλυπτε σε ποιο μισό βρισκόταν το δαχτυλίδι, επαναλάμβανε την ίδια διαδικασία μέχρι τελικά να απομείνουν δύο παιδιά που υποχρεωτικά το ένα είχε το δαχτυλίδι. Για να μάθουν περισσότερα έψαξαν στο Διαδίκτυο και εντόπισαν ότι το παιχνίδι στο οποίο συμμετείχαν, αποτελεί συγκεκριμένη μέθοδο επίλυσης προβλημάτων, που εφαρμόζεται για τη γρήγορη αναζήτηση δεδομένων σε μια υπάρχουσα δομή δεδομένων και ονομάζεται «Διαίρει και Βασίλευε».



Η «**Διαίρει και Βασίλευε**» (divide and conquer) αποτελεί μια μέθοδο σχεδίασης αλγορίθμων στην οποία εντάσσονται οι τεχνικές που υποδιαιρούν ένα πρόβλημα σε μικρότερα υποπροβλήματα, που έχουν την ίδια τυποποίηση με το αρχικό πρόβλημα, αλλά είναι μικρότερα σε μέγεθος. Με όμοιο τρόπο, τα υποπροβλήματα αυτά μπορούν να διαιρεθούν σε ακόμη μικρότερα υποπροβλήματα κ.ο.κ. Έτσι η επίλυση ενός προβλήματος έγκειται στη σταδιακή επίλυση των όσο το δυνατόν μικρότερων υποπροβλημάτων, ώστε τελικά να προκύψει η συνολική λύση του αρχικού ευρύτερου προβλήματος.

Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται «από πάνω προς τα κάτω» (top-down).

Προσπαθήστε να εφαρμόσετε τη μέθοδο «Διαίρει και Βασίλευε» στην παρακάτω δραστηριότητα.



Το κάλπικο νόμισμα

Είστε εκτιμητής χρυσών νομισμάτων. Κάποιος σας φέρνει 128 χρυσά νομίσματα και σας λέει ότι ένα από αυτά είναι κάλπικο. Το κάλπικο νόμισμα είναι πανομοιότυπο στην εμφάνιση με τα υπόλοιπα, αλλά επειδή περιέχει λιγότερη ποσότητα χρυσού είναι λίγο πιο ελαφρύ. Έχετε στη διάθεσή σας μια ζυγαριά ακριβείας με δύο δίσκους. Πώς θα εντοπίσετε το κάλπικο νόμισμα με όσο το δυνατό λιγότερα ζυγίσματα;

Η μέθοδος σχεδίασης αλγορίθμων «Διαίρει και Βασίλευε» μπορεί να αποδοθεί με τα επόμενα βήματα:

1. Δίνεται για επίλυση ένα στιγμιότυπο ενός προβλήματος.
2. Το στιγμιότυπο του προβλήματος υποδιαιρείται σε υπο-στιγμιότυπα του ίδιου προβλήματος.
3. Δίνεται ανεξάρτητη λύση σε κάθε ένα υπο-στιγμιότυπο.
4. Συνδυάζονται όλες οι μερικές λύσεις που βρέθηκαν για τα υπο-στιγμιότυπα, έτσι ώστε να δοθεί η συνολική λύση του προβλήματος.



Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο «Διαίρει και Βασίλευε» δοκιμάστε να παίξετε με έναν συμμαθητή ή μία συμμαθήτριά σας το παιχνίδι «Μάντεψε τον αριθμό», ως εξής: Σκεφθείτε έναν αριθμό από το 1 έως το 100 και ζητήστε από τον συμμαθητή ή τη συμμαθήτριά σας (παίκτης-1) να μαντέψει τον αριθμό αυτόν με όσο το δυνατόν λιγότερες προσπάθειες.

- Ποια διαδικασία πρέπει να ακολουθήσει ο παίκτης-1 για να βρει τον αριθμό; Τι είδους ερωτήσεις πρέπει να κάνει, ώστε να ελαχιστοποιήσει τις προσπάθειες που θα χρειαστούν;
- Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός προσπαθειών που θα χρειαστεί ο παίκτης-1 για να μαντέψει τον αριθμό;

Επαναλάβετε το ίδιο παιχνίδι με έναν αριθμό από το 1 έως το 1000.

- Ποιος είναι τώρα ο μέγιστος αριθμός προσπαθειών που θα χρειαστεί ο παίκτης-1 για να μαντέψει τον αριθμό;
- Τι παρατηρείτε σχετικά με την αύξηση του αριθμού των προσπαθειών σε σχέση με την αύξηση του πλήθους των δεδομένων;
- Με βάση τις παρατηρήσεις σας, θεωρείτε ότι η τεχνική «Διαίρει και Βασίλευε» είναι αποτελεσματική για μεγάλο όγκο δεδομένων;



Στο πλαίσιο του μαθήματος η υλοποίηση της μεθόδου «Διαίρει και Βασίλευε» γίνεται με την επαναληπτική προσέγγιση (με διαδοχικές επαναλήψεις).

Ο μέγιστος αριθμός των συγκρίσεων (επαναλήψεων) που απαιτούνται για την εύρεση ενός στοιχείου σε ένα σύνολο «n» ταξινομημένων στοιχείων, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης μη ύπαρξης του στοιχείου, δίνεται από το ακέραιο μέρος του $[\log_2(n)+1]$ (με στρογγυλοποίηση προς τα κάτω), η απόδειξη του οποίου υπερβαίνει τα όρια της διδακτέας ύλης του μαθήματος. Επομένως, για την εύρεση του μέγιστου πλήθους των επαναλήψεων θεωρείται γνωστό το $\log_2(n)$.

Για παράδειγμα, σε ένα σύνολο 100 ταξινομημένων στοιχείων ($n=100$), ο μέγιστος αριθμός συγκρίσεων (επαναλήψεων) είναι: $[\log_2(100)+1]=[6,643856+1]=[7,643856]=7$.



Ένας κλασικός αλγόριθμος που ακολουθεί τη φιλοσοφία της μεθόδου «Διαίρει και Βασίλευε» είναι η «Διαδική αναζήτηση», η οποία εφαρμόζεται μόνο στην περίπτωση ταξινομημένου συνόλου στοιχείων (π.χ. οι αριθμοί από το 1 έως το 100, τα στοιχεία ενός ταξινομημένου μονοδιάστατου πίνακα κ.ά.) και θα αξιοποιηθεί στο επόμενο παράδειγμα.



Παράδειγμα 1 – Μάντεψε τον αριθμό (παιχνίδι με αντίπαλο τον υπολογιστή)

Ένα παιδί παίζει με τον υπολογιστή το παιχνίδι «Μάντεψε τον αριθμό». Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής:

- Το παιδί αποτυπώνει στο μυαλό του έναν αριθμό από το 1 έως το 100.
- Ο υπολογιστής προσπαθεί να μαντέψει τον αριθμό το πολύ σε 7 προσπάθειες $\lceil \log_2(100)+1 \rceil = \lceil 6,643856+1 \rceil = \lceil 7,643856 \rceil = 7$
- Κάθε φορά που ο υπολογιστής προτείνει έναν αριθμό, με κατάλληλο μήνυμα στην οθόνη, ρωτά το παιδί να του απαντήσει, μέσω του πληκτρολογίου, αν ο αριθμός που μαντέψε ο υπολογιστής, είναι αυτός που έχει βάλει το παιδί στο μυαλό του ή αν είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος.

Να αναπτύξετε πρόγραμμα που να υλοποιεί το παραπάνω παιχνίδι:

1. Ο υπολογιστής με κατάλληλο μήνυμα σας ζητάει να σκεφτείτε έναν ακέραιο αριθμό από το 1 μέχρι το 100.
2. Ο υπολογιστής εμφανίζει κατάλληλο μήνυμα που σας πληροφορεί ότι θα βρει τον αριθμό το πολύ με 7 προσπάθειες.
3. Ο υπολογιστής με κατάλληλο μήνυμα προτείνει έναν ακέραιο αριθμό και στη συνέχεια (μέσω κατάλληλου μηνύματος) ζητάει να πληκτρολογήσετε αν ο αριθμός αυτός είναι ίδιος, μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον αριθμό που είχατε σκεφτεί.
4. Όταν ο υπολογιστής μαντέψει τον αριθμό που σκεφθήκατε, εμφανίζει στην οθόνη κατάλληλο μήνυμα με τον αριθμό αυτό, καθώς και τον αριθμό των προσπαθειών που έκανε μέχρι να τον βρει.

Απάντηση:



Ανάλυση

- Το πρόγραμμα ζητάει από το παιδί να σκεφθεί έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 100 προκειμένου να τον μαντέψει το πολύ σε 7 προσπάθειες (« **ΓΡΑΨΕ** 'Σκέψου έναν ακέραιο αριθμό από το 1 μέχρι το 100 και θα τον μαντέψω το πολύ σε 7 προσπάθειες αρκεί να απαντάς ειλικρινά στις ερωτήσεις μου: '»).
- Αναζήτηση του αριθμού: Ο πρώτος αριθμός που «μαντεύει» το πρόγραμμα (ο υπολογιστής) είναι το 50 (ο μεσαίος αριθμός από το 1-100, «μεση **<-** (αρχη_ + τέλος) **DIV 2**») και το παιδί καλείται να πληκτρολογήσει ως απάντηση στο αντίστοιχο ερώτημα που εμφανίζεται στην οθόνη («**ΓΡΑΨΕ** 'Είναι ο αριθμός ', μεση, ' ; '»), («**ΓΡΑΨΕ** 'Δώσε Ν(ΝΑΙ) ή Ο(ΟΧΙ): '»), αν είναι ο αριθμός που σκέφτηκε.
- Το παιδί πληκτρολογεί «Ν» ή «Ο». Η τιμή αυτή καταχωρείται στη μεταβλητή «απ» («**ΔΙΑΒΑΣΕ** απ»).
- Στην περίπτωση που ο υπολογιστής βρήκε τον αριθμό («**ΑΝ** απ = 'Ν' **Η** απ = 'Ο' **ΤΟΤΕ** ...»), «βρέθηκε **<-** **ΑΛΗΘΗΣ** ...»), τυπώνεται στην οθόνη, ως απάντηση του υπολογιστή, κατάλληλο μήνυμα («**ΓΡΑΨΕ** 'Τον βρήκα σε ', προσ, ' προσπάθεια/ες...').

- Στην περίπτωση που ο υπολογιστής δε βρήκε τον αριθμό («**ΑΛΛΙΩΣ ...**»), το παιδί καλείται, με αντίστοιχο μήνυμα που εμφανίζεται στην οθόνη, να δηλώσει αν ο αριθμός που σκέφτηκε είναι μεγαλύτερος ή μικρότερος από τον αριθμό που του εμφάνισε ο υπολογιστής («**ΓΡΑΨΕ 'Ο αριθμός που έβαλες είναι (1) μεγαλύτερος ή (2) μικρότερος. Δώσε απάντηση 1 ή 2: '**») («**ΔΙΑΒΑΣΕ** απαντηση»). Με αυτόν τον τρόπο ο υπολογιστής λαμβάνει την πληροφορία ότι ο αριθμός που ψάχνει είναι στο «κάτω μισό» του πλήθους των αριθμών [1-49] (αν το παιδί πληκτρολογήσει το 1) ή στο «πάνω μισό» του πλήθους των αριθμών [51-100] (αν το παιδί πληκτρολογήσει το 2). Ο υπολογιστής σε κάθε προσπάθεια αφαιρεί το μισό πλήθος των αριθμών (είτε το «πάνω μισό» είτε το «κάτω μισό») και στην επόμενη προσπάθεια (επόμενη επανάληψη), θα ψάξει να βρει τον αριθμό, μεταξύ αυτών που έχουν απομείνει στο μισό πλήθος αριθμών κάθε φορά. Για παράδειγμα, αν το παιδί πληκτρολογήσει 1 (δηλ. ο αριθμός που έβαλε είναι μικρότερος του 50), ο επόμενος αριθμός που θα μαντέψει ο υπολογιστής θα είναι το 25. Αν το παιδί πληκτρολογήσει 2 (δηλ. ο αριθμός που έβαλε είναι μεγαλύτερος του 50), ο επόμενος αριθμός που θα μαντέψει ο υπολογιστής θα είναι το 75, κ.ο.κ. Επομένως, ο υπολογιστής χρησιμοποιεί τη μέθοδο «Διαίρει και Βασίλευε», αξιοποιώντας έναν σίγουρο και σύντομο τρόπο για την εύρεση του αριθμού, μέσω αμφίδρομης επικοινωνίας (διαδοχικές ερωταπαντήσεις) με το παιδί.

Ακολουθεί η υλοποίηση του προγράμματος σε ΓΛΩΣΣΑ.



Κώδικας σε ΓΛΩΣΣΑ [2.1]

```

1  ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ μάντεψε_τον_αριθμό
2  ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
3    ΑΚΕΡΑΙΕΣ: προσ, αρχη_, τελος, μεση, απαντηση
4    ΛΟΓΙΚΕΣ: βρεθηκε
5    ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ: απ
6  ΑΡΧΗ
7    ΓΡΑΨΕ 'Σκέψου έναν ακέραιο αριθμό από το 1 μέχρι το 100'
8    ΓΡΑΨΕ ' και θα τον μαντέψω το πολύ σε 7 προσπάθειες'
9    ΓΡΑΨΕ ' αρκεί να απαντάς ειλικρινά στις ερωτήσεις μου: '
10   ΓΡΑΨΕ
11   αρχη_ <- 1
12   τελος <- 100
13   προσ <- 0
14   βρεθηκε <- ΨΕΥΔΗΣ
```

```

15  ΟΣΟ αρχη_ <= τελος ΚΑΙ βρεθηκε = ΨΕΥΔΗΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
16  προσ <- προσ + 1
17  μεση <- (αρχη_ + τελος) div 2
18  ΓΡΑΨΕ 'Προσπάθεια ', προσ, 'η'
19  ΓΡΑΨΕ ' Είναι ο αριθμός ', μεση, ';'
20  ΓΡΑΨΕ ' Δώσε Ν(ΝΑΙ) ή Ο(ΟΧΙ):'
21  ΑΡΧΗ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
22  ΔΙΑΒΑΣΕ απ
23  ΑΝ απ <> 'Ν' ΚΑΙ απ <> 'ν' ΚΑΙ απ <> 'Ο' ΚΑΙ απ <> 'ο' ΤΟΤΕ
24  ΓΡΑΨΕ ' Λάθος απάντηση. Ξαναπροσπάθησε....'
25  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
26  ΜΕΧΡΙΣ_ΟΤΟΥ απ = 'Ν' Η απ = 'ν' Η απ = 'Ο' Η απ = 'ο'
27  ΑΝ απ = 'Ν' Η απ = 'ν' ΤΟΤΕ
28  βρεθηκε <- ΑΛΗΘΗΣ
29  ΓΡΑΨΕ 'Τον βρήκα σε ', προσ, ' προσπάθεια/ες...'
30  ΑΛΛΙΩΣ
31  ΓΡΑΨΕ 'Ο αριθμός που έβαλες είναι '
32  ΓΡΑΨΕ '(1)μεγαλύτερος ή (2)μικρότερος...'
33  ΓΡΑΨΕ 'Δώσε απάντηση 1 ή 2: '
34  ΔΙΑΒΑΣΕ απαντηση
35  ΑΝ απαντηση = 1 ΤΟΤΕ
36  αρχη_ <- μεση + 1
37  ΑΛΛΙΩΣ
38  τελος <- μεση - 1
39  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
40  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
41  ΓΡΑΨΕ ' _____'
42  ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
43  ΑΝ προσ > 7 Η αρχη_ > τελος ΤΟΤΕ
44  ΓΡΑΨΕ 'Δε βρήκα τον αριθμό σε 7 προσπάθειες'
45  ΓΡΑΨΕ 'γιατί δεν είσαι ειλικρινής ή '
46  ΓΡΑΨΕ 'έκανες κάτι λάθος στη διαδικασία '
47  ΓΡΑΨΕ ' που συμφωνήσαμε'
48  ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
49  ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ μάντεψε_τον_αριθμό

```