

$$\begin{array}{r}
 45 \\
 \times 19 \\
 \hline
 405 \\
 + 45 \\
 \hline
 855
 \end{array}$$

Σχ. 2.7. Χειρωνακτικός τρόπος πολλαπλασιασμού

45	19	45
90	9	90
180	4	
360	2	
720	1	720
Άθροισμα = 855		

Σχ. 2.8. Πολλαπλασιασμός αλά ρωσικά

Παράδειγμα 12. Πολλαπλασιασμός αλά ρωσικά

Στη συνέχεια προχωρούμε στην ανάπτυξη ενός συνθετότερου προβλήματος, όπου για την αλγοριθμική του επίλυση γίνεται χρήση αρκετών από τις προηγούμενες δομές. Ας θεωρήσουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού δύο ακεραίων αριθμών και ας θυμηθούμε πώς αυτή υλοποιείται χειρωνακτικά. Τοποθετούμε, λοιπόν, τους δύο αριθμούς τον ένα κάτω από τον άλλο και πολλαπλασιάζουμε κάθε ψηφίο του κάτω αριθμού με όλα τα ψηφία του επάνω αριθμού. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε ψηφίο του κάτω αριθμού παράγεται ένα μερικό γινόμενο, ενώ τα μερικά γινόμενα τοποθετούνται το ένα κάτω από το άλλο με μία μετατόπιση από τα δεξιά προς τα αριστερά καθώς θεωρούμε διαδοχικά τα ψηφία των μονάδων, των δεκάδων, των εκατοντάδων κ.λπ. Στη συνέχεια γίνεται η πρόσθεση των επιμέρους γινομένων, αφού τα τοποθετήσουμε στην κατάλληλη διάταξη όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7.

Ωστόσο, η πράξη του πολλαπλασιασμού δεν εκτελείται από τον υπολογιστή με τον τρόπο αυτό. Πιο συγκεκριμένα, ο χρησιμοποιούμενος τρόπος είναι ο λεγόμενος *πολλαπλασιασμός αλά ρωσικά*. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι οι ακέραιοι είναι θετικοί (μεγαλύτεροι του μηδενός), αλλά η μέθοδος μπορεί εύκολα να μετατραπεί, ώστε να περιγράψει και την περίπτωση των αρνητικών ακεραίων. Πώς ακριβώς λειτουργεί η μέθοδος, θα φανεί με το επόμενο παράδειγμα, όπου περιγράφεται ο αλγόριθμος με ελεύθερο κείμενο.

Έστω, λοιπόν, ότι δίνονται δύο θετικοί ακέραιοι αριθμοί, οι αριθμοί 45 και 19. Οι αριθμοί γράφονται δίπλα-δίπλα και ο πρώτος διπλασιάζεται, ενώ ο δεύτερος υποδιπλασιάζεται αγνοώντας το δεκαδικό μέρος. Στο σχήμα 2.8 παρουσιάζεται η επαναλαμβανόμενη διαδικασία, που συνεχίζεται μέχρις ότου στη δεύτερη στήλη να προκύψει μονάδα. Τελικώς, το γινόμενο ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της πρώτης στήλης, όπου αντίστοιχα στη δεύτερη στήλη υπάρχει περιττός αριθμός. Για το παράδειγμά μας, τα στοιχεία αυτά παρουσιάζονται στην τρίτη στήλη.

Ολίσθηση (shift)

Στα κυκλώματα του υπολογιστή τα δεδομένα αποθηκεύονται με δυαδική μορφή, δηλαδή 0 και 1, ανεξάρτητα από το πώς τα ορίζει ο προγραμματιστής, όπως ακεραίους ή πραγματικούς σε δεκαδικό σύστημα, ή ακόμη χαρακτήρες κ.λπ. Έτσι ο αριθμός 17 του δεκαδικού συστήματος ισοδυναμεί με τον αριθμό 00010001 του δυαδικού συστήματος, ο οποίος μπορεί να αποθηκευθεί σε ένα byte. Αν μετακινήσουμε τα ψηφία αυτά κατά μία θέση προς τα αριστερά, δηλαδή αν προσθέσουμε ένα 0 στο τέλος του αριθμού και αγνοήσουμε το αρχικό 0, τότε προκύπτει ο αριθμός 00100010 του δυαδικού συστήματος, που ισοδυναμεί με τον αριθμό 34 του δεκαδικού συστήματος. Επίσης, με παρόμοιο τρόπο, αν μετακινήσουμε τα ψηφία κατά μία θέση δεξιά, δηλαδή αποκόψουμε το τελευταίο ψηφίο 1 και θεωρήσουμε ένα ακόμη αρχικό 0, τότε προκύπτει ο αριθμός 00001000 του δυαδικού συστήματος, που ισοδυναμεί με τον αριθμό 8 του δεκαδικού συστήματος. Άρα η ολίσθηση προς τα αριστερά ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό επί δύο, ενώ η ολίσθηση προς τα δεξιά ισοδυναμεί με την ακέραια διαίρεση διά δύο.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται πρακτικά στους υπολογιστές, γιατί υλοποιείται πολύ πιο απλά απ' ό,τι ο γνωστός μας χειρωνακτικός τρόπος πολλαπλασιασμού. Πιο συγκεκριμένα, απαιτεί πολλαπλασιασμό επί δύο, διαίρεση διὰ δύο και πρόσθεση. Σε αντίθεση η γνωστή μας διαδικασία πολλαπλασιασμού απαιτεί πολλαπλασιασμό με οποιονδήποτε ακέραιο και πρόσθεση. Σε επίπεδο, λοιπόν, κυκλωμάτων υπολογιστή ο πολλαπλασιασμός επί δύο και η διαίρεση διὰ δύο μπορούν να υλοποιηθούν ταχύτατα με μία απλή εντολή ολίσθησης (shift), σε αντίθεση με τον πολλαπλασιασμό με οποιονδήποτε ακέραιο που θεωρείται πιο χρονοβόρα διαδικασία. Το τελευταίο γεγονός είναι ο λόγος που ο πολλαπλασιασμός αλά ρωσικά είναι προτιμότερος απ' ό,τι ο χειρωνακτικός τρόπος πολλαπλασιασμού δύο ακεραίων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος πολλαπλασιασμού ακεραίων αλά ρωσικά με φυσική γλώσσα κατά βήματα.

Αλγόριθμος: Πολλαπλασιασμός δύο θετικών ακεραίων (αλά ρωσικά)	
Είσοδος:	Δύο ακέραιοι $M1$ και $M2$, όπου $M1, M2 \geq 1$
Έξοδος:	Το γινόμενο $P=M1*M2$
Βήμα 1	Θέσε $P=0$
Βήμα 2	Αν $M2>0$, τότε πήγαινε στο Βήμα 3, αλλιώς πήγαινε στο Βήμα 7
Βήμα 3	Αν ο $M2$ είναι περιττός, τότε θέσε $P=P+M1$
Βήμα 4	Θέσε $M1=M1*2$
Βήμα 5	Θέσε $M2=M2/2$ (θεώρησε μόνο το ακέραιο μέρος)
Βήμα 6	Πήγαινε στο Βήμα 2
Βήμα 7	Τύπωσε τον P

Ακολουθεί ο αλγόριθμος σε ψευδοκώδικα για το ίδιο πρόβλημα του πολλαπλασιασμού αλά ρωσικά.

```

Αλγόριθμος Πολλαπλασιασμός_αλά_ρωσικά
Δεδομένα //  $M1, M2$  ακέραιοι //
 $P \leftarrow 0$ 
Όσο  $M2 > 0$  επανάλαβε
    Αν  $M2 \bmod 2 = 1$  τότε  $P \leftarrow P+M1$ 
     $M1 \leftarrow M1*2$ 
     $M2 \leftarrow M2 \div 2$ 
Τέλος_επανάληψης
Αποτελέσματα //  $P$ , το γινόμενο των ακεραίων  $M1, M2$  //
Τέλος Πολλαπλασιασμός_αλά_ρωσικά

```