

2.4 ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

38. ΟΡΙΣΜΟΣ

Τι λέμε ρυθμό μεταβολής του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x για $x = x_0$, αν $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ;

Απάντηση :

Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

Σχόλια :

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $v'(t_0)$, της ταχύτητας v ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή : $a(t_0) = v'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος. Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 .

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Για να επιλύσουμε προβλήματα σχετικά με ρυθμούς μεταβολής μεγεθών, κάνουμε τα εξής :

- i. Πρώτα καταγράφουμε όλους τους αγνώστους, καθώς και τις σχέσεις που τους συνδέουν. Αν η σχέση που συνδέει τους αγνώστους δε δίνεται στην εκφώνηση, τότε την φτιάχνουμε μέσα από τα δεδομένα της εκφώνησης (είτε με σχήμα, είτε με τη λογική σκέψη).
- ii. Έπειτα μετατρέπουμε τη σχέση που συνδέει τους αγνώστους σε συνάρτηση ως προς τον ανεξάρτητο άγνωστο.
- iii. Υπολογίζουμε τις τιμές των αγνώστων όταν $x = x_0$ που ζητείται ο ρυθμός μεταβολής.
- iv. Τέλος παραγωγίζουμε τη συνάρτηση που φτιάξαμε και με αντικατάσταση $x = x_0$ προκύπτει ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Υπενθύμιση :

- Εμβαδόν σφαίρας : $E = 4\pi R^2$, Όγκος σφαίρας : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$
- Εμβαδόν κώνου : $E = \pi R\lambda + \pi R^2$, Όγκος κώνου : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \nu$,
- Όγκος πυραμίδας : $V = \frac{1}{3}E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot \nu$
- Ο ρυθμός μεταβολής της **ταχύτητας** ν ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 είναι η παράγωγος $\nu'(t_0)$, της ταχύτητας ν ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 . Η παράγωγος $\nu'(t_0)$ λέγεται **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $\alpha(t_0)$. Είναι δηλαδή : $\alpha(t_0) = \nu'(t_0) = S''(t_0)$.
- Στην οικονομία, το κόστος K , η είσπραξη E και το κέρδος P εκφράζονται συναρτήσει της ποσότητας x του παραγόμενου προϊόντος (δηλ. $K(x), E(x), P(x)$). Έτσι, η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 . Ανάλογα, ορίζονται και οι έννοιες οριακή είσπραξη στο x_0 και οριακό κέρδος στο x_0 . Η βασική σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις $K(x), E(x), P(x)$ είναι $P(x) = E(x) - K(x)$. Το μέσο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος συμβολίζεται με $K_{\mu}(x)$ και είναι $K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x}$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 1) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(4,0)$ και $B(0,x)$ ως προς x , όταν $x=3$.

Λύση :

Η Απόσταση δυο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ Δίνεται από τον τύπο :

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ . Άρα } (AB) = \sqrt{(0 - 4)^2 + (x - 0)^2} = \sqrt{16 + x^2}$$

Άρα η συνάρτηση που δίνει την απόσταση (AB) ως προς x είναι $f(x) = \sqrt{16 + x^2}$ με $D_f = \mathbb{R}$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ όταν $x=3$, δηλ. το $f'(3)$. Βρίσκω

$$\text{πρώτα την } f'(x) = (\sqrt{16 + x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{16 + x^2}} \cdot (16 + x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{16 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}$$

$$\text{Άρα } f'(3) = \frac{3}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5}$$

- 2) Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t) = 3t^2 + 9t$ και $y(t) = 6t + 18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

Λύση :

$$y(t) = 6t + 18$$



$$x(t) = 3t^2 + 9t$$

$$E = x \cdot y \text{ άρα } E(t) = x(t) \cdot y(t) = (3t^2 + 9t)(6t + 18) = 18t^3 + 54t^2 + 54t^2 + 162t = 18t^3 + 108t^2 + 162t$$

Τη χρονική στιγμή που το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο θα ισχύει $x(t) = y(t) \Leftrightarrow 3t^2 + 9t = 6t + 18 \Leftrightarrow 3t^2 + 3t - 18 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2, \eta, t = -3$ απορ.

Η συνάρτηση του εμβαδού είναι $E(t) = 18t^3 + 108t^2 + 162t$. Εδώ θέλω το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο δηλ. το $E'(2)$. Βρίσκω πρώτα $E'(t) = 54t^2 + 216t + 162$. Άρα $E'(2) = 54 \cdot 2^2 + 216 \cdot 2 + 162 = 810$ τετραγωνικές μονάδες/sec.

3) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

- i. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t .
- ii. Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;
- iii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
- iv. Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
- v. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

Λύση :

- i. Η ταχύτητα είναι : $v(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' = 3t^2 - 12t + 9$.
- ii. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t = 2s$ είναι $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \text{ m/s}$ και σε χρόνο $t = 4s$ είναι $v(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 \text{ m/s}$.
- iii. Το σημείο είναι ακίνητο, όταν $v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ ή $t = 3$.

Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

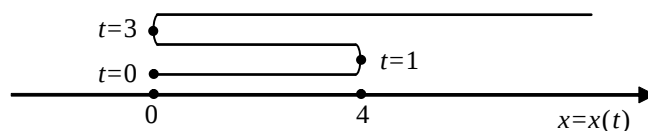
iv. Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν

$$v(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 > 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) > 0 \Leftrightarrow t < 1 \text{ ή } t > 3.$$

Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα $t < 1$ και $t > 3$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $1 < t < 3$).

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ



v. Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου $S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$.
- Από $t=1$ μέχρι $t=3$ $S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$
- Από $t=3$ μέχρι $t=5$ $S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28 \text{ m}.$$

- 4) Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της, που ελαττώνεται, δίνεται σε cm από τον τύπο $r = 4 - t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E και του όγκου V της μπάλας, όταν $t = 1 \text{ sec}$. (Θυμηθείτε ότι $E = 4\pi r^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi r^3$). (Ασκ. 1 Α' ομάδας σελ. 243 σχολικό)

Λύση: Επειδή $E = 4\pi r^2$ και η ακτίνα r μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t , έχουμε:

$$E(t) = 4\pi r^2(t) \text{ και } r(t) = 4 - t^2.$$

$$E'(t) = 8\pi r(t) \cdot r'(t) \text{ με } r'(t) = -2t.$$

$$\text{Έτσι: } E'(1) = 8\pi(1) \cdot r'(1) = 8\pi \cdot 3 \cdot (-2) = -48\pi \text{ cm}^2 / \text{s}$$

$$\text{Ομοίως } V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t), \quad V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t)$$

$$\text{Έτσι: } V'(1) = 4\pi r^2(1) \cdot r'(1) = 4\pi \cdot 9 \cdot (-2) = -72\pi \text{ cm}^3 / \text{s}$$

- 5) Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ cm}^2 / \text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r = 85 \text{ cm}$.

(Ασκ. 1 Β' ομάδας σελ. 244 σχολικό)

Λύση: Είναι $r = r(t)$ η ακτίνα της σφαίρας ως συνάρτηση του χρόνου t .

Η επιφάνεια της σφαίρας είναι $E(t) = 4\pi r^2(t)$ και ο όγκος $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$.

Οπότε: $E'(t) = 8\pi r(t) \cdot r'(t)$ και $V'(t) = 4\pi r^2(t) \cdot r'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ cm}^2 / \text{sec}$ δηλ.

$E'(t_0) = +10 \text{ cm}^2 / \text{s}$ και η ακτίνα της είναι $r(t_0) = 85 \text{ cm}$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Άρα

$$E'(t_0) = +10 \text{ cm}^2 / \text{s} \Leftrightarrow 8\pi r(t_0) \cdot r'(t_0) = 10 \Leftrightarrow 8\pi \cdot 85 \cdot r'(t_0) = 10 \Leftrightarrow r'(t_0) = \frac{1}{68\pi} \text{ cm} / \text{s}$$

$$\text{Έτσι: } V'(t_0) = 4\pi r^2(t_0) \cdot r'(t_0) = 4\pi \cdot 85^2 \cdot \frac{1}{68\pi} = 425 \text{ cm}^3 / \text{s}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2 : ΚΙΝΗΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΚΑΜΠΥΛΗ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 6) Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$, $x \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$. (Ασκ. 5 Α' ομάδας σελ. 244 σχολικό)

Λύση: Έστω $M(x, y)$ σημείο της καμπύλης $y = \frac{1}{4}x^2$. Επειδή η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t είναι $x = x(t)$, $y = y(t)$ με $y(t) = \frac{1}{4}x^2(t)$

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y άρα: $x'(t) = y'(t) \Leftrightarrow x'(t) = \left(\frac{1}{4}x^2(t)\right)' \Leftrightarrow x'(t) = \frac{1}{2}x(t) \cdot x'(t) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2}x(t) \Leftrightarrow x(t) = 2$. Και $y(t) = \frac{1}{4}x^2(t) \Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{4}2^2 \Leftrightarrow y(t) = 1$. Δηλ. $M(2,1)$

- 7) Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A. (Ασκ. 8 Β' ομάδας σελ. 245 σχολικό)

Λύση: Έστω $x = x(t)$, $y = y(t)$ οι συντεταγμένες του κινητού, την τυχαία χρονική στιγμή t . Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό βρίσκεται στη θέση $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι

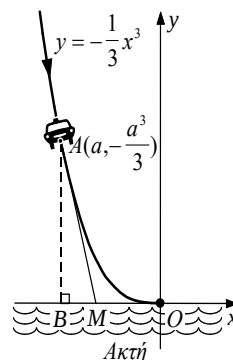
$\boxed{x(t_0) = \frac{1}{2}, y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}}$. Επίσης $\boxed{y'(t_0) = -3}$. Όμως το κινητό κινείται στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ δηλ. $x^2(t) + y^2(t) = 1$. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη έχουμε:
 $(x^2(t) + y^2(t))' = 0 \Leftrightarrow 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0$ (1)

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Έτσι η (1) για $t = t_0$ γίνεται :

$$2x(t_0) \cdot x'(t_0) + 2y(t_0) \cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 2 \frac{1}{2} \cdot x'(t_0) + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} (-3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x'(t_0) = 3\sqrt{3} \text{ μονάδες/s.}$$

- 8) Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (Σχήμα). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\alpha(t)$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3 . (Ασκ. 6 Β' ομάδας σελ. 245 σχολικό)



Λύση :

Ο προβολέας του περιπολικού φωτίζει κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$, καθώς αυτό κινείται κατά μήκος της καμπύλης. Είναι

$y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3$, $x \leq 0$ με $f'(x) = -x^2$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$A\left(\alpha, -\frac{\alpha^3}{3}\right)$ τότε $(\varepsilon): y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow (\varepsilon): y + \frac{\alpha^3}{3} = -\alpha^2(x - \alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\varepsilon): y = -\alpha^2 x + \frac{2\alpha^3}{3}$. Το σημείο Μ είναι το σημείο που η εφαπτομένη τέμνει τον x' χ.

Έτσι : $(\varepsilon) \stackrel{y=0}{\Leftrightarrow} 0 = -\alpha^2 x + \frac{2\alpha^3}{3} \Leftrightarrow 3\alpha^2 x = 2\alpha^3 \stackrel{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{2\alpha}{3}$. Άρα το σημείο Μ έχει τετμημένη

$x(t) = \frac{2\alpha(t)}{3}$, έτσι $x'(t) = \frac{2\alpha'(t)}{3} = -\frac{2\alpha(t)}{3}$, όμως τη χρονική στιγμή t_0 το περιπολικό,

δηλ το σημείο Α, έχει τετμημένη -3 άρα $\alpha(t_0) = -3$. Τελικά

$$x'(t_0) = -\frac{2\alpha(t_0)}{3} = -\frac{2(-3)}{3} = 2 \frac{\text{μον. μήκους}}{\text{μον. χρόνου}}.$$

- 9) Ένα υλικό σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $C: y = e^x + x^3 + 1$, με $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \geq 0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ περνάει από το σημείο $A(0, 2)$ η τετμημένη του αυξάνει με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l = (OM)$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.

Λύση :

Έστω $x = x(t)$, $y = y(t)$ οι συντεταγμένες του σημείου Μ. Ισχύει ότι $y(t) = e^{x(t)} + x^3(t) + 1$. Τη χρονική στιγμή t_0 το Μ παίρνει από το $A(0, 2)$, άρα :

$x(t_0) = 0$, $y(t_0) = 2$ και από εκφώνηση $x'(t_0) = 2 \text{ μον./s}$. Επίσης :

$(OM) = l = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow l^2 = x^2 + y^2$. Όμως η απόσταση $l = (OM)$ είναι συνάρτηση του χρόνου t , έτσι έχω : $l^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ (1).

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της (1) έχω : $2l(t) \cdot l'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t)$ (2).

Επίσης η (1) για $t = t_0$ γίνεται : $l^2(t_0) = x^2(t_0) + y^2(t_0) \Leftrightarrow l^2(t_0) = 4 \Leftrightarrow \boxed{l(t_0) = 2}$.

Ακόμα : $y'(t) = (e^{x(t)} + x^3(t) + 1)' = e^{x(t)} \cdot x'(t) + 3x^2(t) \cdot x'(t)$,

Δηλαδή : $y'(t_0) = e^{x(t_0)} \cdot x'(t_0) + 3x^2(t_0) \cdot x'(t_0) = e^0 \cdot 2 + 3 \cdot 0^2 \cdot 2 = 2 \Leftrightarrow \boxed{y'(t_0) = 2}$.

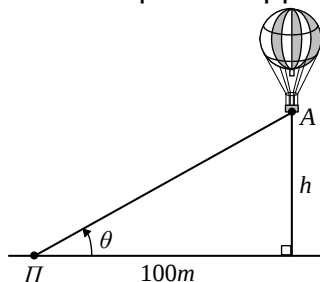
Τελικά η (2) για $t = t_0$ γίνεται : $2l(t_0) \cdot l'(t_0) = 2x(t_0) \cdot x'(t_0) + 2y(t_0) \cdot y'(t_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 2l'(t_0) = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 4l'(t_0) = 8 \Leftrightarrow l'(t_0) = 2 \text{ μον.} / \text{s}.$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3 : ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΓΩΝΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 10) Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m.



(Ασκ. 4 Β' ομάδας σελ. 245 σχολικό)

Λύση :

Το ύψος h και η γωνία θ μεταβάλλονται ως συνάρτηση του χρόνου t .

Έτσι : $h = h(t)$ και $\theta = \theta(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 από δεδομένα έχουμε :

$\boxed{h(t_0) = 100\text{m}}$ και $\boxed{h'(t_0) = 50\text{m/min}}$. Το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έτσι :

$\varepsilon\phi\theta = \frac{\text{απ. κάθετη}}{\text{προσκ. κάθετη}} = \frac{h}{100} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t) = \frac{h(t)}{100}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$(\varepsilon\phi\theta(t))' = \left(\frac{h(t)}{100}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu^2\theta(t) + \sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu^2\theta(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} + 1\right) \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \Leftrightarrow (\varepsilon\phi^2\theta(t) + 1) \cdot \theta'(t) = \frac{1}{100} \cdot h'(t) \quad (1)$$

Η (1) για $t = t_0$ γίνεται : $(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1) \cdot \theta'(t_0) = \frac{1}{100} \cdot h'(t_0)$ (2)

$$\text{Όμως } \varepsilon\phi\theta(t_0) = \frac{h(t_0)}{100} = \frac{100}{100} = 1.$$

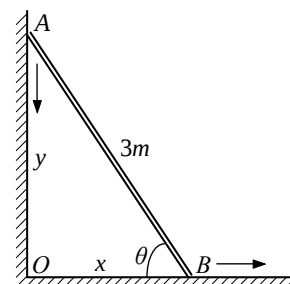
Άρα η (2) γίνεται :

$$(\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1) \cdot \theta'(t_0) = \frac{1}{100} \cdot h'(t_0) \Leftrightarrow (1^2 + 1) \cdot \theta'(t_0) = \frac{50}{100} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = \frac{1}{4} \text{ rad/min}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4 : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΑΛΑΣ**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

11) Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστρά στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0 , που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

- Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας.
- Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ (Σχήμα).



(Ασκ. 7 Β' ομάδας σελ. 245)

σχολικό)

Λύση :

- Τα μεγέθη x, y, θ είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x = x(t), y = y(t), \theta = \theta(t)$. Από δεδομένα έχουμε ότι τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x'(t_0) = 0,1 \text{ m/s}$, $y(t_0) = 2,5 \text{ m}$. Ψάχνουμε την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή A της σκάλας δηλ. το $y'(t_0)$.

Επειδή το τρίγωνο του σχήματος είναι ορθογώνιο έχουμε :

$$x^2 + y^2 = 3^2 \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 9 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης } x^2(t) + y^2(t) = 9 \stackrel{t=t_0}{\Leftrightarrow} x^2(t_0) + y^2(t_0) = 9 \Leftrightarrow x^2(t_0) + 6,25 = 9 \Leftrightarrow x(t_0) = \sqrt{2,75} \text{ m}.$$

$$\text{Παραγωγίζοντας την ισότητα (1) έχουμε : } 2x(t) \cdot x'(t) + 2y(t) \cdot y'(t) = 0 \quad (2)$$

Η (2) για $t = t_0$ γίνεται :

$$2x(t_0) \cdot x'(t_0) + 2y(t_0) \cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2,75} \cdot 0,1 + 2 \cdot 2,5 \cdot y'(t_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y'(t_0) = -\frac{\sqrt{2,75}}{25} \text{ m/s}.$$

- Είναι $\varepsilon\phi\theta = \frac{\text{απ. κάθετη}}{\text{προσκ. κάθετη}} = \frac{y}{x} \Rightarrow \varepsilon\phi\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$. Παραγωγίζοντας την ισότητα έχουμε :

$$(\varepsilon\phi\theta(t))' = \left(\frac{y(t)}{x(t)} \right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\theta(t) + \sin^2\theta(t)}{\sin^2\theta(t)} \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\eta\mu^2\theta(t)}{\sin^2\theta(t)} + 1 \right) \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow (\varepsilon\phi^2\theta(t) + 1) \cdot \theta'(t) = \frac{y'(t)x(t) - y(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

(3)

$$\text{Η (3) για } t = t_0 \text{ γίνεται : } (\varepsilon\phi^2\theta(t_0) + 1) \cdot \theta'(t_0) = \frac{y'(t_0)x(t_0) - y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)} \quad (4)$$

$$\text{Όμως } \varepsilon\phi\theta(t_0) = \frac{y(t_0)}{x(t_0)} = \frac{2,5}{\sqrt{2,75}}.$$

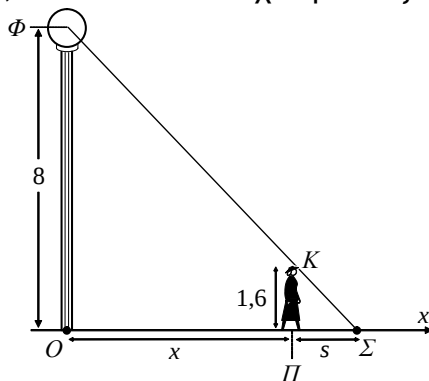
2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

$$\begin{aligned}\text{Άρα η (4) γίνεται : } (\varepsilon\phi^2\theta(t_0)+1)\cdot\theta'(t_0) &= \frac{y'(t_0)x(t_0)-y(t_0)x'(t_0)}{x^2(t_0)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{6,25}{2,75}+1\right)\cdot\theta'(t_0) &= \frac{-\frac{\sqrt{2,75}}{25}\cdot\sqrt{2,75}-2,5\cdot 0,1}{2,75} \Leftrightarrow \frac{9}{2,75}\theta'(t_0) = \frac{-\frac{2,75}{25}-0,25}{2,75} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9\theta'(t_0) &= -0,36 \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -0,04 \text{ rad/s}.\end{aligned}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5 : ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΣΚΙΑΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

- 12) Μία γυναίκα ύψους 1,60m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m με ταχύτητα 0,8m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



(Ασκ. 5 Β΄ ομάδας σελ. 244
σχολικό)

Λύση :

Επειδή τα τρίγωνα ΦΟΣ και ΚΠΣ είναι όμοια ισχύει : $\frac{ΚΠ}{ΦΟ} = \frac{ΠΣ}{ΟΣ} \Leftrightarrow \frac{1,6}{8} = \frac{s}{x+s} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{s}{x+s} \Leftrightarrow 5s = x+s \Leftrightarrow 4s = x \Leftrightarrow s = \frac{1}{4}x \quad (1)$$

Τα μεγέθη x, s είναι συναρτήσεις του χρόνου t έτσι : $x = x(t), s = s(t), x'(t) = 0,8 \text{ m/s}$ και ψάχνουμε το $s'(t)$ που είναι η ταχύτητα με την οποία αυξάνει ο ίσκιος της.

$$\text{Η (1) γίνεται } s(t) = \frac{1}{4}x(t) \text{ άρα } s'(t) = \frac{1}{4}x'(t) \Leftrightarrow s'(t) = \frac{1}{4}0,8 \Leftrightarrow s'(t) = 0,2 \text{ m/s}.$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6 : ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ**ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ :**

- 13) Αν το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x)$ και η συνολική είσπραξη είναι $E(x)$, τότε το συνολικό κέρδος είναι

$$P(x) = E(x) - K(x) \text{ και το μέσο κόστος είναι } K_{\mu}(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

- Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους μηδενίζεται όταν ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της είσπραξης.
- Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους μηδενίζεται όταν το μέσο κόστος είναι ίσο με το οριακό κόστος.

Λύση :

- Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι $P'(x) = E'(x) - K'(x)$.

$$\text{Άρα } P'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) - K'(x) = 0 \Leftrightarrow E'(x) = K'(x)$$

- Ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους είναι $K'_{\mu}(x) = \left(\frac{K(x)}{x} \right)' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$

$$\text{Άρα } K'_{\mu}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow K'(x) \cdot x - K(x) = 0 \Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} \Leftrightarrow$$

$$K'(x) = K_{\mu}(x).$$

- 14) Ένα εργοστάσιο για την κατασκευή x χιλιάδων μονάδων ενός προϊόντος έχει κόστος

$$K(x) = \frac{1}{3}x^3 - 60x^2 + 100x + 4 \text{ χιλ. ευρώ. Η είσπραξη από την πώληση των προϊόντων}$$

δίνεται από τον τύπο : $E(x) = -x^3 + 30x^2 - 1700x - 2$ χιλ. ευρώ. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός.

Λύση :

Το κέρδος $P(x)$ του εργοστασίου δίνεται από τον τύπο $P(x) = E(x) - K(x) \Leftrightarrow$

$$P(x) = -x^3 + 30x^2 - 1700x - 2 - \left(\frac{1}{3}x^3 - 60x^2 + 100x + 4 \right) \Leftrightarrow P(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 90x^2 - 1800x - 6$$

$$\text{Οπότε : } P'(x) = -4x^2 + 180x - 1800$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός όταν :

$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x^2 + 180x - 1800 > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 45x - 450 > 0 \Leftrightarrow x \in (15, 30).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ :

- 15) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(1,2)$ και $B(x,0)$ ως προς x , όταν $x=1$.

- 16) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του τυχαίου σημείου M που ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = e^x$ από την αρχή των αξόνων ως προς x , όταν $x=0$.

- 17) Έστω τα σημεία $A(0, x+1)$ και $B(\sqrt{x}, 0)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής ,

- Της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x=1$.
- Του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς x όταν $x=1$.

2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 18) Δίνεται το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = e^x$, $x > 0$. Αν $A(x^2, 0)$, να βρείτε :
- Το εμβαδόν E του τριγώνου MOA ως συνάρτηση του x .
 - Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τριγώνου MOA ως προς x όταν $x=1$.
- 19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ και ε η εφαπτομένη ευθεία στην καμπύλη της f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 1$. Να βρείτε :
- Την εξίσωση της ε
 - Τα σημεία τομής A, B της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.
 - Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς α όταν $\alpha=e$.
- 20) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $\alpha = x^2$ και $\beta = e^{2x}$ ως προς x όταν $x=1$.
- 21) Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t$ όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.
- Να βρείτε την ταχύτητα και στη συνέχεια την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=1s$
 - Να βρείτε την επιτάχυνση και στη συνέχεια την επιτάχυνση τη χρονική στιγμή $t=2s$
 - Πότε το σημείο είναι ακίνητο;
 - Πότε το σημείο κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;
 - Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων $7s$.
- 22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3(ax-1)^2$
- Να βρείτε το a ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x να μηδενίζει για $x = \frac{1}{2}$.
 - Για $a=2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) στην καμπύλη της f στο σημείο $A(2, f(2))$.
- 23) Από ένα σφαιρικό μπαλόνι εκλύεται αέριο με ρυθμό και η ακτίνα του δίνεται από τον τύπο $\rho(t) = 4-t$, $t \geq 0$, t σε ώρες και ρ σε cm . Να βρείτε :
- Σε πόσο χρόνο η μπάλα θα λιώσει τελείως.
 - Τον μέσο ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της όταν $t \in [1, 2]$.
 - Τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της όταν $t_1 = 2h$
- 24) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός τετραγώνου ως προς την πλευρά του τη στιγμή που αυτό είναι ίσο με $36 m^2$.
- 25) Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό $2 cm/sec$, ενώ η πλευρά $B\Gamma$ ελαττώνεται με ρυθμό $3 cm/sec$. Να βρείτε :
- Τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου,
 - Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, όταν : $AB=10cm$ και $B\Gamma=6cm$.
- 26) Το ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ με σταθερή βάση $B\Gamma=16cm$ μεταβάλλεται με ρυθμό $5 cm/sec$. Αν τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο A απέχει από την πλευρά $B\Gamma$ $6 cm$, να βρείτε :
- Τον ρυθμό μεταβολής των ίσων πλευρών,
 - Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$.

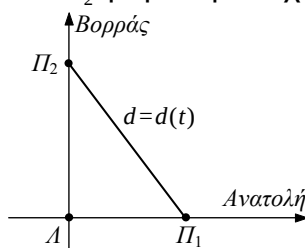
2^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- 27) Δυο αυτοκίνητα Α και Β κινούνται κατά μήκος δυο κάθετων οδών ΑΓ και ΒΓ με ταχύτητα 50km/h και 100km/h αντίστοιχα. Να βρεθεί :
- Μια συνάρτηση που δίνει την απόσταση των δυο αυτοκινήτων σε σχέση με τις αποστάσεις των οχημάτων από το σημείο Γ.
 - Η απόσταση των δυο οχημάτων τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το πρώτο όχημα απέχει από τη διασταύρωση 800m και το δεύτερο 600m
 - Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης ΑΒ ως προς τον χρόνο την παραπάνω χρονική στιγμή t_0 .

- 28) Το συνολικό κόστος x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = 30x^2 - 1000x - 50$ και η συνολική εισπραξη $E(x) = 2x^3 - 60x^2 + 200x + 100$ σε χιλ €. Να βρείτε τον αριθμό των μονάδων του προϊόντος που πρέπει να παραχθεί ώστε να έχουμε θετικό ρυθμό μεταβολής του κέρδους (κερδοφόρα επιχείρηση).

- 29) Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό $100\text{cm}^3/\text{sec}$. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0 , που αυτή είναι ίση με 9cm;

- 30) Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ. Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20km/h.



- Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2
 - Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (\Pi_1\Pi_2)$ των δυο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.
- 31) Μια κάμερα είναι τοποθετημένη στην κορυφή ενός στύλου ύψους 3m. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ υπό την οποία η κάμερα παρακολουθεί ένα όχημα που κινείται με ταχύτητα 40km/h, όταν αυτό :
- έχει απομακρυνθεί από το στύλο κατά 4m,
 - Σε 4m θα έχει διέλθει από το στύλο
- 32) Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου OAB που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0, \ln x)$, με $x > 1$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού T , όταν $x = 5$ cm.
- 33) Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του y .

