**Κεφάλαιο 5Ο : ΠΡΟΟΔΟΙ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **(§5.1) ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ**  ►**ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ**   |  | | --- | | **Ακολουθία** λέγεται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Ν\* των θετικών ακεραίων και συμβολίζεται συνήθως με **αν** |   **Σχόλια**   1. Για ν = 1, 2, 3, …, ν,… παίρνουμε τους όρους α1, α2, α3, …, αν της ακολουθίας αν  που ονομάζονται 1ος όρος, 2ος όρος, 3ος όρος, …, **νιοστός** (ή **γενικός**) όρος της ακολουθίας. 2. Το ότι ν = 1, 2, …, ν,…  δεν σημαίνει ότι α1, α2, …,αν   ►**ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ**   |  | | --- | | Αναδρομικός τύπος μιας ακολουθίας ονομάζεται μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερους συνήθως διαδοχικούς γενικούς όρους της ακολουθίας πχ. αν+1, αν, αν-1 κλπ.  Για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά πρέπει να γνωρίζουμε:   1. Τον αναδρομικό της τύπο και 2. Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται. |   **Ακολουθία Fibonacdci** (1175-1250).  Η ακολουθία 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, .... ονομάζεται ακολουθία Fibonacdci.   1. Ας αντιστοιχίσουμε τους φυσικούς αριθμούς ν με τους όρους της παραπάνω ακολουθίας αν συμπληρώνοντας τον παρακάτω πίνακα:  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | ν | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | **αν** | **0** | **1** | **1** | **2** | **3** | **5** | **8** | **13** | **21** | **34** | **55** |  1. Παρατηρήστε πως προκύπτουν οι όροι της ακολουθίας απ’ τον όρο x3 και μετά. Μπορείτε να υπολογίσετε τον 12ο όρο της ακολουθίας; Ποιες πληροφορίες χρειάζονται για τον υπολογισμό του όρου x12; 2. Ας προσπαθήσουμε να σκεφτούμε έναν κανόνα που θα μας βοηθά να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της παραπάνω ακολουθίας.   **ΆΣΚΗΣΗ 124**  Δίνονται οι ακολουθίες με **γενικό όρο**:  i)αν = ν2 ii) βν = 2ν2 – 3 iii) γν =  **α)** Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους  **β)** Να βρείτε τους 20ους όρους και  **γ)**τη διαφορά αν+2αν των παρακάτω ακολουθιών  **ΑΣΚΗΣΗ 125**  Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών:   1. και 2. και 3. και 4. και 5. και 6. και   ►**ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΑΠ’ ΤΟ**  **ΓΕΝΙΚΟ ΟΡΟ ΤΗΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ**   |  | | --- | | Βρίσκω τη διαφορά  ή το κλάσμα . Αν είναι σταθερός αριθμός τότε τελειώσαμε. Αν όχι προσπαθούμε με αλγεβρικά τεχνάσματα να βρούμε κάποια σταθερή διαφορά ή σταθερό λόγο. | | **ΑΣΚΗΣΗ 126**  Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες:        ►**Προσδιορισμός γενικού όρου απ’ τον αναδρομικό**  **τύπο της ακολουθίας**   |  | | --- | | Εφαρμόζουμε τον αναδρομικό τύπο για ν = 1, 2, …, ν και προσθέτουμε ή πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες. |   **ΑΣΚΗΣΗ 127**  Να βρείτε το γενικό όρο των παρακάτω ακολουθιών:   1. και 2. και 3. και 4. και 5. και   **(§5.2) ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**   |  | | --- | | **Αριθμητική πρόοδος** λέγεται η ακολουθία, στην οποία κάθε όρος της προκύπτει απ’ τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.  Τον αριθμό αυτό ονομάζουμε **διαφορά** της προόδου και συμβολίζεται με **ω**. Επομένως: |   ►**ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΟΡΩΝ ΜΙΑΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**   |  | | --- | | * Αν το πλήθος είναι **περιττό** τότε παριστάνονται: …., **x2ω, xω, x, x+ω, x+2ω, …..**   όπου **x** ο μεσαίος όρος και **ω** η διαφορά.   * Αν το πλήθος είναι **άρτιο** τότε παριστάνονται: …., **x3λ, xλ, x+λ, x+3λ,** ….   όπου **x** δεν είναι όρος της αριθμητικής προόδου  και η διαφορά είναι **ω = 2λ**. |   ►**ΝΙ-ΟΣΤΟΣ ΟΡΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**   |  | | --- | | Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο  όρο **α1** και διαφορά **ω** είναι: **αν = α1 + (ν****1)ω. (Απόδειξη)** |   ►**ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ**   |  | | --- | | Τρεις αριθμοί **α, β, γ,** είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου **αν και μόνο αν** ισχύει: (ή 2β = α+γ) **(Απόδειξη)** |   ►**ΆΘΡΟΙΣΜΑ Ν ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ**  **ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**   |  | | --- | | Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου **αν** με διαφορά **ω** είναι:  ή | |

**Κεφάλαιο 5Ο : ΠΡΟΟΔΟΙ**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΜΑΔΕΣ**   |  |  | | --- | --- | | ►**Γενικός όρος αριθμητικής προόδου** | **αν = α1 + (ν1)ω** |   **ΑΣΚΗΣΗ 128**  Να βρείτε τον 31ο όρο των παρακάτω ακολουθιών:  i) 1, 4, 7, … ii)7,10,13,… iii)11,18,25,…  iv)9,5 1,… v) 7, 5, 3,… vi) 2, 7, 12,…  **ΑΣΚΗΣΗ 129**  Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι α1 =15 και α7 = 9.:   1. Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. 2. Να βρείτε τον 11ο όρο της προόδου. 3. Να βρείτε ποιος όρος ισούται με 41.   **ΑΣΚΗΣΗ 130**  Σε αριθμητική πρόοδο (αν) με διαφορά ω =2 είναι α8 =3.   1. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον 19ο όρο της προόδου. 2. Να βρείτε ποιος όρος ισούται με 41.   **ΑΣΚΗΣΗ 131**  Δίνεται αριθμητική πρόοδος (αν) με α1 =12 και α9+α20 = 30.  Να προσδιορίσετε:   1. Tη διαφορά ω της προόδου. 2. Τον όρο α30. 3. Ποιος όρος ισούται με 0.   **ΑΣΚΗΣΗ 132**  Δίνεται μία αριθμητική πρόοδος (αν)με α4 = 43 και α8 = 27. Να προσδιορίσετε:   1. Την πρόοδο (τον α1 και την ω). 2. Πόσους θετικούς όρους έχει η αν;   **ΑΣΚΗΣΗ 133**  Σε αριθμητική πρόοδο (αν) ισχύει: α3+α4+α12 = 10 και ο όρος  α13 είναι τριπλάσιος απ’ τον όρο α8. Να βρείτε:   1. Την πρόοδο (τον α1 και την ω). 2. Τον όρο α23. 3. Τον όρο που είναι διπλάσιος απ’ την σειρά του.   ►**Πρόβλημα παρεμβολής ν όρων μεταξύ των α, β**   |  | | --- | | Χρησιμοποιούμε τον τύπο αν = α1 + (ν1)ω. θέτοντας όπου ν το ν+2, παίρνουμε αν+2 = α1 + (ν+1)ω με α1 = α , αν+2 = β και ν δεδομένο. Έτσι προσδιορίζεται η διαφορά ω της προόδου. |   **ΑΣΚΗΣΗ 134**   1. Μεταξύ των αριθμών 2 και 50 να παρεμβληθούν 7 όροι ώστε όλοι μαζί ν’ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. 2. Μεταξύ των αριθμών 3 και 80 να παρεμβληθούν 10 όροι ώστε όλοι μαζί ν’ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.   ►**Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου**  **ΑΣΚΗΣΗ 135**   * 1. Να βρείτε το S40 της ακολουθίας: 7, 2, 3,….   2. Να βρείτε το S80 της ακολουθίας: 2, 1, 4,….   3. Πόσοι αρχικοί όροι της ακολουθίας 4, 8, 12,… έχουν άθροισμα 180;   **ΑΣΚΗΣΗ 136**  Δίνεται η ακολουθία 5, 1, 3,….**.** Να βρείτε:   1. Το άθροισμα των 40 πρώτων όρων της. 2. Πόσοι αρχικοί όροι έχουν άθροισμα 72;   **ΑΣΚΗΣΗ 137**  Ο **10ος** και ο **19ος** όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι **42** και **87** αντίστοιχα. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 100 όρων αυτής. | ►**Υπολογισμός αθροισμάτων α1+α2+…+αν , όπου**  **α1, α2,…αν διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.**   |  | | --- | | Αρκεί να προσδιορίσουμε το **ν** απ’ τον τύπο  αν = α1 + (ν1)ω και κατόπιν το |   **ΑΣΚΗΣΗ 138**  Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:   1. Το άθροισμα 7+10+13+…+187. 2. Το άθροισμα 1+5+9+…+197 3. Το άθροισμα των πρώτων 200 περιττών αριθμών 4. Το άθροισμα των πρώτων 300 θετικών άρτιων 5. Το άθροισμα όλων των περιττών μεταξύ 16 και 380 6. Το άθροισμα των πολλαπλασίων του 5 μεταξύ 21 και 149. 7. Το άθροισμα των πολλαπλασίων του 3 μεταξύ 10 και 200. 8. Το άθροισμα S20 της ακολουθίας αν = 2ν+1 9. Το άθροισμα S30 της ακολουθίας αν = 5ν4   **ΑΣΚΗΣΗ 139**  Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (αν) με α1 = 2 και ω = 3. Να υπολογίσετε το S = α20+α21+…+α50. (Υπόδειξη: S=S50-S19 )  **ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**  **ΆΣΚΗΣΗ 140** (Δ17)  Δέκα αδέρφια μοιράζονται 100 ευρώ. Κάθε αδελφός παίρνει α ευρώ περισσότερα απ’ τον αμέσως μικρότερό του. Ο 7ος αδελφός στη σειρά παίρνει 7 ευρώ.   1. Αποτελούν τα χρήματα που θα πάρουν τ’ αδέλφια όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. 2. Πόσα χρήματα παίρνει ο κάθε αδελφός;   **ΑΣΚΗΣΗ 141**  Ένα θέατρο έχει 12 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά έχει 10 καθίσματα και κάθε επόμενη έχει 3 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενή της. Σε μια παράσταση τα εισιτήρια της έβδομης σειράς διανεμήθηκαν δωρεάν και όλα τα υπόλοιπα πουλήθηκαν προς 30 ευρώ το ένα. Πόσα χρήματα εισέπραξε το θέατρο από την παράσταση αυτή;  **ΑΣΚΗΣΗ 142**  Σε μια αμφιθεατρική αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η πρώτη σειρά έχει 16 καθίσματα και η έβδομη 28 καθίσματα.   1. Πόσα καθίσματα έχει η 10η σειρά; 2. Πόσα καθίσματα υπάρχουν από την 5η έως την 15η σειρά; 3. Αν στην 1η σειρά υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η σειρά υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η 12 κενά καθίσματα κτλ. από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα; 4. Πόσοι θα είναι οι θεατές;   Απ. i)34 ii)374 iii) 11η iv) 55  **ΑΣΚΗΣΗ 143**  Σ’ ένα θέατρο η πρώτη σειρά έχει 70 καθίσματα και η τελευταία 250 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς σχηματίζει αριθμητική πρόοδο. Η προτελευταία σειρά έχει 140 καθίσματα περισσότερα απ’ τη 2η σειρά.   1. Να δείξετε ότι κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα απ’ την προηγούμενη. 2. Να υπολογίσετε το πλήθος των καθισμάτων του θεάτρου. 3. Την πρώτη παράσταση παρακολούθησαν 100 θεατές και σε κάθε επόμενη ο αριθμός των θεατών διπλασιαζόταν. Σε ποια παράσταση θα γεμίσει για πρώτη φορά το θέατρο; |

**Κεφάλαιο 5Ο : ΠΡΟΟΔΟΙ**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **ΆΣΚΗΣΗ 144** (Δ18)  Ένα έλκηθρο αφήνεται ελεύθερο να κυλίσει σε μια χιονισμένη πλαγιά. Το πρώτο δευτερόλεπτο διανύει 3cm, το δεύτερο 5cm, το τρίτο 7cm, το τέταρτο 9cm κ.ο.κ. Η κίνηση θα διαρκέσει 60 δευτερόλεπτα.   1. Πόσο διάστημα θα διανύσει το 20ο δευτερόλεπτο; 2. Μπορείτε με κάποιο «τέχνασμα» να υπολογίσετε γρήγορα τη συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει το έλκηθρο τα πρώτα 20 δευτερόλεπτα της κίνησής του; 3. Ποια είναι γενικά η απόσταση που θα διανύσει το έλκηθρο το ν-οστό δευτερόλεπτο της κίνησης με ν60; 4. Να αποδείξετε ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει τα έλκηθρο τα πρώτα ν δευτερόλεπτα με ν60, είναι ν(ν+2) cm.   **ΑΣΚΗΣΗ 145**  Η τιμή αγοράς μιας τηλεόρασης είναι μεγαλύτερη από 620 και μικρότερη από 640 ευρώ. Κατά την αγορά συμφωνήθηκαν τα εξής:   * + Να δοθεί προκαταβολή 120 ευρώ   + Η εξόφληση του υπόλοιπου σε 10 μηνιαίες δόσεις.   + Κάθε δόση να αυξάνει κατά **ω** ευρώ, ω   + Η τέταρτη δόση θα είναι 48 ευρώ.     1. Να εκφράσετε το ποσό της 1ης δόσης ως συνάρτηση του ω.     2. Να εκφράσετε την τιμή αγοράς ως συνάρτηση του ω.     3. Να βρείτε την τιμή του ω.     4. Να βρείτε το ποσό της τελευταίας δόσης     5. Να βρείτε την τιμή αγοράς της τηλεόρασης.   Απ. i)48-3ω ii)600+15ω iii) 2 iv)60, v) 630  **ΑΣΚΗΣΗ 146**  Ένα κολιέ αξίας 2290 ευρώ αποτελείται από 33 πολύτιμες πέτρες. Η μεσαία πέτρα είναι η ακριβότερη. Οι υπόλοιπες είναι τοποθετημένες κατά σειρά αξίας ώστε:   * Κάθε διαμάντι μέχρι το μεσαίο να αξίζει 2 ευρώ λιγότερο από το επόμενό του. * Κάθε διαμάντι από το μεσαίο και πέρα να αξίζει 3 ευρώ λιγότερο απ’ το προηγούμενό του.   1. Πόσα ευρώ είναι η αξία του μεσαίου διαμαντιού;   2. Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο είναι το 1ο διαμάντι;   3. Πόσα ευρώ φθηνότερο από το μεσαίο είναι το 33ο διαμάντι;   Απ. i) 90 ii) 32 iii) 48  **(§5.3) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ**   |  | | --- | | **Γεωμετρική πρόοδος** λέγεται η ακολουθία, στην οποία κάθε όρος της προκύπτει απ’ τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε **μη** **μηδενικό** αριθμό  Τον αριθμό αυτό τον λέμε **λόγο** της προόδου και τον συμβολίζουμε με **λ**. Δηλαδή |   ►**ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**   |  | | --- | | * Αν το πλήθος είναι **περιττό** τότε παριστάνονται:   …., x/λ2, x/λ, x, xλ, xλ2, …..  όπου **x** ο μεσαίος όρος και λ.   * Αν το πλήθος είναι **άρτιο** τότε παριστάνονται:   …….x, xλ, xλ2, xλ3,…….  όπου **x** ο πρώτος όρος και λ. |   ►**ΝΙ-ΟΣΤΟΣ ΟΡΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ**   |  | | --- | | Ο **νιοστός**όρος αν μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο  όρο **α1** και λόγο **λ** είναι: **αν =  (Απόδειξη)** | | ►**ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ**   |  | | --- | | Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί **α, β, γ,** είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου **αν και μόνο αν** ισχύει:    Σημείωση: Δύο ετερόσημοι δεν έχουν γεωμετρικό μέσο |   ►**ΆΘΡΟΙΣΜΑ ν ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡ. ΠΡΟΟΔΟΥ**   |  | | --- | | Το άθροισμα των πρώτων ν όρων γεωμετρικής  προόδου (αν) με λόγο λ είναι:  ή () |   **ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΜΑΔΕΣ**   |  |  | | --- | --- | | ►**Γενικός όρος γεωμετρικής προόδου** | **αν =** |   **ΑΣΚΗΣΗ 147**  Να βρείτε τον 8ο όρο των παρακάτω ακολουθιών:  i) 3, 6, 12, … ii) , , 1,… iii) 32, 16, 8,…  iv) , 2, 6,… v)3, 9, 27,… vi) , , ,…  **ΑΣΚΗΣΗ 148**  Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: 64, 32, 16,…. Να βρείτε:   1. Τον ν-οστό όρο της και τον 9ο όρο της. 2. Ποιος όρος της είναι ίσος με 4.   ►**Εύρεση στοιχείων γεωμετρικής προόδου από σχέσεις όρων της**   |  | | --- | | Χρησιμοποιούμε τον τύπο **αν =**  και κατόπιν,  συνήθως, διαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις που προκύπτουν |   **ΑΣΚΗΣΗ 149**   1. Δίνεται μία γεωμετρική πρόοδος (αν) με α11 = 128 και α7 = 8. Να βρείτε τον α1, το λόγο λ και τους πέντε πρώτους όρους της γεωμετρικής προόδου. 2. Δίνεται μία γεωμετρική πρόοδος (αν) με α5 = 16 και α3+α4= -4. Να βρείτε το λόγο λ και τους έξι πρώτους όρους της γ.π.. 3. Σε μία γεωμετρική πρόοδο (αν) με ακέραιους όρους είναι α5 = 16 και α6 + α7 = 96. Να βρείτε τον α1 τον λ και τον όρο α9. 4. Σε μία γεωμετρική πρόοδο (αν) είναι α6 = 24 και α3α4 = 18. Να βρείτε τον α1, το λόγο λ και τον όρο α8 5. Σε μία γεωμετρική πρόοδο (αν) είναι  και ο όγδοος όρος είναι κατά 16 μεγαλύτερος απ’ τον α7. Να βρείτε τον α1 το λόγο λ και τον όρο α10.   ►**Διαδοχικοί όροι γ.π. – Γεωμετρικός μέσος**  **ΑΣΚΗΣΗ 150**   1. Για ποια τιμή του ν οι αριθμοί , ,  είναι δ.ο.γ.π. 2. Οι αριθμοί x6, x2, 2x+2 δ.ο.γ.π.. Να τους βρείτε και κατόπιν να βρείτε τον αριθμητικό μέσο του x και 50. 3. Να αποδείξετε ότι τα τετράγωνα των όρων μιας γ.π. αποτελούν επίσης γ.π. 4. Να αποδείξετε ότι αν υψώσουμε κάθε όρο μιας γ.π. στην κ προκύπτει πάλι γ.π. |

**Κεφάλαιο 5Ο : ΠΡΟΟΔΟΙ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ►**Πρόβλημα παρεμβολής ν όρων μεταξύ των α, β**   |  | | --- | | Χρησιμοποιούμε τον τύπο **αν =** . Θέτοντας όπου ν το ν+2, παίρνουμε αν+2 =  με α1 = α , αν+2 = β και το ν δεδομένο. Έτσι προσδιορίζεται ο λόγος **λ** της προόδου. |   **ΑΣΚΗΣΗ 151**  Μεταξύ των αριθμών 2/9 και 162 να παρεμβληθούν 5 όροι ώστε όλοι μαζί ν’ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.  ►**Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου**  **ΑΣΚΗΣΗ 152**  Να βρείτε το άθροισμα των εφτά πρώτων όρων των ακολουθιών:  i) 4, 12, 36,…. ii) 3, 8, 27,…. iii) 4, 8, 16,….  ►**Υπολογισμός αθροισμάτων α1+α2+…+αν , όπου**  **α1, α2,…αν διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.**   |  | | --- | | Αρκεί να προσδιορίσουμε το **ν** απ’ τον τύπο **αν =** και κατόπιν το  ή κατευθείαν το |   **ΑΣΚΗΣΗ 153**  Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:   1. 3 + 6 + 12 +…+ 384 2. 5 + 10 + 20 +…+ 640 3. 2 + 8 + 32 +…+ 8192 4. 48 + 16 …8192 5. 1 +  +  + …..+   **ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**  **ΑΣΚΗΣΗ 154** (Δ19)  Μια σκακιέρα αποτελείται από 64 τετράγωνα.  Στο 1ο τετράγωνο τοποθετούμε 1 κόκκο σιτάρι.  Στο 2ο τετράγωνο τοποθετούμε 2 κόκκους σιτάρι.  Στο 3ο τετράγωνο τοποθετούμε 4 κόκκους σιτάρι.  Στο 4ο τετράγωνο τοποθετούμε 8 κόκκους σιτάρι.  Στο 5ο τετράγωνο τοποθετούμε 16 κόκκους σιτάρι κ.ο.κ.   1. Πόσοι κόκκοι σιταριού έχουν τοποθετηθεί στο 64ο τετράγωνο; 2. Αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα, πόσοι κόκκοι σιταριού θα είχαν τοποθετηθεί στο ν-οστό τετράγωνο; 3. Πόσοι συνολικά κόκκοι σιταριού βρίσκονται στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας; 4. Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα αν η σκακιέρα είχε ν τετράγωνα. 5. Πόσοι τόνοι θα ήταν η ποσότητα του ρυζιού στα 64 τετράγωνα της σκακιέρας αν 1Kg ρυζιού έχει 20000 κόκκους;   **ΑΣΚΗΣΗ 155** (Δ20)  Στην προηγούμενη άσκηση βρήκαμε το άθροισμα των πρώτων ν όρων της γεωμετρικής προόδου με α1 = 1 και λ = 2 είναι 1+2+22+23+…+2ν-1 = 2ν-1.   1. Να υπολογίσετε τις τιμές των 30, 30+31, 30+31+32, 30+31+32+33 2. Προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα 30+31+32+33+…3ν-1. 3. Στη συνέχεια προσπαθήστε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα 40+41+42+43+…4ν-1. 4. Μπορείτε να εικάσετε έναν τύπο για το άθροισμα 1+λ1+λ2+λ3+…+λν-1 για οποιοδήποτε λ1; 5. Αν ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου δεν είναι ίσος με 1 (δηλαδή ), πώς μεταβάλλεται η παράσταση του ερωτήματος (iv); Πώς μπορούμε να προσαρμόσουμε τον τύπο που βρήκαμε στο (iv) ερώτημα, ώστε να ισχύει γενικά; | **ΑΣΚΗΣΗ 156**  (Δ21)  Ένα φυτό έχει ύψος 1,67 στο τέλος της 1ης βδομάδας της ζωής του και συνεχίζει να ψηλώνει για 9 βδομάδες ακόμα. Κάθε βδομάδα ψηλώνει 4% περισσότερο απ’ την προηγούμενη.   1. Τα ύψη του φυτού στο τέλος κάθε βδομάδας αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής ή γεωμετρικής προόδου; 2. Να γράψετε τον γενικό όρο της προόδου. 3. Ποιο είναι το ύψος που πήρε το φυτό την 4η βδομάδα; 4. Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που θα φτάσει το φυτό;   **ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΟΔΟΙ**  **ΘΕΜΑ 2 (473,474)**  Θεωρούμε την ακολουθία *(αν)* των θετικών περιττών αριθμών: *1, 3, 5, 7, …*  α) Να αιτιολογήσετε γιατί η *(αν)* είναι αριθμητική πρόοδος και  να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)  β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών  θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους  τους. **(**Μονάδες 10)  **ΘΕΜΑ 2 (480)**  Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει ***α*** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των  καθισμάτων του σταδίου είναι 300.  α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής  προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μον. 12)  β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μον. 13)  **ΘΕΜΑ 4 (2047**  Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.  α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την  αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής  προόδου και να βρείτε το ν-οστό όρο αυτής της προόδου.  Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι  η διαφορά της; (Μονάδες 6)  β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;  (Μονάδες 6)  γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το  μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι  πίσω στην αποθήκη Α.  i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για  να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)  ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο  μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20  κυψέλες; (Μονάδες 7)  **ΘΕΜΑ 4 (2083)**  Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.  α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η  τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)  β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)  γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν  μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η  μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών  του Λυκείου. (Μονάδες 10) |

**Κεφάλαιο 5Ο : ΠΡΟΟΔΟΙ (θέματα Τράπεζας 2014)**

|  |  |
| --- | --- |
| **ΘΕΜΑ 4 (2323)**  Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.  α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής  προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)  β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)  γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να  αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)  δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να  γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου,  από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να  εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των  αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)  **ΘΕΜΑ 4 (2340)**  Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:  Για το πρόγραμμα *Α* πρέπει να καταθέσει τον *1ο* μήνα *1 ευρώ*, το *2o* μήνα *2 ευρώ*, τον *3ο* μήνα *4 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο απόαυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.  Για το πρόγραμμα *Β* πρέπει να καταθέσει τον *1ο* μήνα *100 ευρώ*, το *2ο* μήνα *110 ευρώ*, τον 3ο μήνα *120 ευρώ* και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά *10*  *ευρώ* μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.  α) i) Να βρείτε το ποσό *αν* που πρέπει να κατατεθεί στο  λογαριασμό το *ν-στο*μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*.  (Μονάδες 4)  ii) Να βρείτε το ποσό *βν* που πρέπει να κατατεθεί στο  λογαριασμό το *ν-στο* μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.  (Μονάδες 4)  iii) Να βρείτε το ποσό *Αν* που θα υπάρχει στο λογαριασμό  μετά από *ν* μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Α*. (Μον. 5)  iv) Να βρείτε το ποσό *Βν* που θα υπάρχει στο λογαριασμό  μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα *Β*. (Μον. 5)  β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους *6*  μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα; (Μονάδες 3)  ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε *12* μήνες, με ποιο  από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα  συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο; (Μονάδες 4)  **ΘΕΜΑ 4 (4629)**  Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους *1 m*, με τον ακόλουθο τρόπο:  Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το *1ο λεπτό* προχωράει 1 cm, το *2ο λεπτό* προχωράει *3 cm* και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση *κατά 2 cm* μεγαλύτερη απόαυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.  α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε  λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής  προόδου και να βρείτε τον v-οστό όρο *αν* αυτής της προόδου.  (Μονάδες 5)  β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα  πρώτα *5 λεπτά* της κίνησής του. (Μονάδες 4)  γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο  άκρο του κλαδιού. (Μονάδες 4)  δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι  ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία  αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και  με τον ακόλουθο τρόπο: Το *1ο λεπτό* προχωράει 1 cm, το *2ο*  *λεπτό* προχωράει *2 cm*, το *3ο λεπτό* προχωράει *4 cm* και,  γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν  που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό | (i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε  λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής  προόδου και να βρείτε τον v-οστό όρο *βν* αυτής της  προόδου. (Μονάδες 7)  (ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα  βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση *1 cm*. (Μονάδες 5)  **ΘΕΜΑ 4 (4671)**  Δίνεται η αριθμητική πρόοδος *(αν)* με διαφορά *ω*.  α) Να αποδείξετε ότι *α20 - α10 = 10ω***.** (Μονάδες 6)  β) Αν *α20 - α10 = 30 και α1 = 1*, να αποδείξετε ότι *αν = 3ν - 2*.  (Μονάδες 6)  γ) Ποιος είναι ο πρώτος όρος της προόδου που ξεπερνάει το 30;  (Μονάδες 7)  δ) Πόσοι όροι της παραπάνω προόδου είναι μικρότεροι του 60;  (Μονάδες 6)  **ΘΕΜΑ 4 (4858)**  Μια περιβαλλοντική οργάνωση ξεκινά να καταγράφει τον πληθυσμό των ελαφιών σε μια δασική περιοχή από το 2000 όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:    Αν ο πληθυσμός των ελαφιών συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο σταθερό ρυθμό και μετά το 2004:  α) Να βρείτε μια σχέση που να επιτρέπει τον υπολογισμό του  πληθυσμού των ελαφιών στο τέλος κάθε έτος από το 2000  και μετά. (Μονάδες 6)  β) Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής:  i) Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό των ελαφιών στο τέλος  του 2012. (Μονάδες 6)  ii) Να προβλέψετε το έτος στο τέλος του οποίου ο αρχικός  πληθυσμός των 1300 ελαφιών θα αυξηθεί κατά 60%.  (Μονάδες 6)  iii) Να προβλέψετε το έτος που ο πληθυσμός των ελαφιών δε  θα υπερβεί τα 2600 ελάφια. (Μονάδες 7)  **ΘΕΜΑ 4 (4925)**  Σε αριθμητική πρόοδο είναι *α2 = κ2* και *α3 = (κ+1)2*, *κ* ακέραιος με ***κ>1***.  α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά *ω* της προόδου είναι αριθμός  περιττός. (Μον. 8)  β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι *α1=2*, τότε:  i) Να βρείτε τον αριθμό *κ* και να αποδείξετε ότι *ω=7*. (Μον. 8)  ii) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.  (Μον. 9)  **ΘΕΜΑ 4 (6143)**  Στην Α’ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα: «Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε *x* σειρές με *x - 1* μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε *x+3* σειρές με *x-3* μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».  α) Να βρείτε την τιμή του *x* (Μονάδες 6)  β) Να αποδείξετε η Α΄ τάξη έχει *90* μαθητές. (Μονάδες 6)  γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω *90*  μαθητές σε *ν* ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να  πάνε *2* μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2  παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του *ν*, δηλαδή  πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13) |

**Κεφάλαιο 5Ο : ΠΡΟΟΔΟΙ (θέματα Τράπεζας 2014)**

|  |  |
| --- | --- |
| **ΘΕΜΑ 4 (6222)**  Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας  καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την  προηγούμενη.  α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το  πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.  (Μονάδες 7)  β) Πόσες ημέρες μετά από την στιγμή του ατυχήματος το  πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.; (Μονάδες 9)  γ) Στο τέλος της 8ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός  και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο  τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το  πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται  κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη  στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που  καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.  (Μονάδες 9)  **ΘΕΜΑ 4 (6859)**  Δίνoνται οι αριθμοί *2, x, 8* με *x > 0*.  α) Να βρείτε την τιμή του *x* ώστε οι αριθμοί *2, x, 8*, με τη σειρά  που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής  προόδου. Ποια είναι η διαφορά *ω* αυτής της προόδου;  (Μονάδες 5)  β) Να βρείτε τώρα την τιμή του *x* ώστε οι αριθμοί *2, x, 8,* με τη  σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους  γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος *λ* αυτής της  προόδου; (Μονάδες 5)  γ) Αν *(αν)* είναι η αριθμητική πρόοδος 2, 5, 8, 11, ….  και *(βν)* είναι η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, 16, …. τότε:  i) Να βρείτε το άθροισμα *Sν* των *ν* πρώτων όρων της (αν).(Μ7)  ii) Να βρείτε την τιμή του *ν* ώστε, για το άθροισμα *Sν* των *ν*  πρώτων όρων της *(αν)* να ισχύει: 2(*Sν +24) = β7* (Μονάδες 8)  **ΘΕΜΑ 4 (7503)**  Οι αριθμοί : x2 + 5, x2 + x, 2x + 4, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.  α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού *x.* (Μονάδες 6)  β) Αν *x = 3* και ο αριθμός *x2+ 5* είναι ο 4ος όρος της προόδου, να  βρείτε:  i) Τη διαφορά *ω* της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)  ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)  iii) Το άθροισμα *S =* α15 + α16 + α17 + … + α24. (Μονάδες 8)  **ΘΕΜΑ 4 (7504)**  Σε μια αριθμητική πρόοδο *(αν)*, ο *3ος* όρος είναι *α3 = 8* και ο *8ος* όρος είναι *α8 = 23*.  α) Να αποδείξετε ότι ο 1ος όρος της αριθμητικής προόδου είναι  α1 = 2 και η διαφορά της ω = 3. (Μονάδες 9)  β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της. (Μονάδες 6)  γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα:  S = (α1 + 1) + (α2 + 2) + (α3 + 3) + …+ (α31 + 31) (Μονάδ. 10)  **ΘΕΜΑ 4 (7514)**  Δίνεται αριθμητική πρόοδος *(αν)* με *α3 = 10* και *α20 = 61*.  α) Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου. (Μ.8)  β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.(Μ.8)  γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι *x* και *y* της  παραπάνω προόδου *(αν)*, τέτοιοι ώστε να ισχύει: x/2=y/3  (Μονάδες 9) | **ΘΕΜΑ 4 (7522)**  Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.  **α)** Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες; (Μονάδες 6)  **β)** Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 6400, ο  οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των  βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να  τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες.  Συμβολίζουμε με *βν* το πλήθος των βακτηρίων *ν* ώρες μετά  από την στιγμή της επιδείνωσης (v ≤ 5).  **i)** Να δείξετε ότι η ακολουθία (*βν)* είναι γεωμετρική πρόοδος,  και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.  **ii)** Να εκφράσετε το πλήθος *βν* των βακτηρίων συναρτήσει  του *ν*. (Μονάδες 12)  **iii)** Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά  από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 7)  **ΘΕΜΑ 4 (7967)**  Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο *30* μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει *51* θέσεις.  Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει *3€* και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει *0,5€*  περισσότερο από τον προηγούμενο.  α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και  ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)  β) Αν, για κάθε *ν* ≤ *51* ο αριθμός *αν* εκφράζει το ποσό που θα  πληρώσει ο *ν-οστός* επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί  *α1,α2,…,α51* είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδουκαι  να βρείτε τη διαφορά *ω* αυτής της προόδου.(Μονάδες 6)  γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα  πληρώσει ο *51ος* επιβάτης. (Μονάδες 7)  δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να  πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την  προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε  διαθέτοντας τα εισιτήρια στην τιμή των *21 €* ανά εισιτήριο.  ( Δίνεται ότι:  = 101) (Μονάδες 8)  **ΘΕΜΑ 4 (10775)**  Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η  1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.  α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των  καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής  προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά  αυτής της προόδου. (Μονάδες 5)  β) Να βρείτε το γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 4)  γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 5)  δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά  καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η  υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα  κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα  από αυτά της προηγούμενης, τότε:  **i)** Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο  κενά καθίσματα. (Μονάδες 5)  ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 6) |

**Κεφάλαιο 5Ο : ΠΡΟΟΔΟΙ (θέματα Τράπεζας 2014)**

|  |  |
| --- | --- |
| **ΘΕΜΑ 4 (8170)**  Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (*αν*) με λόγο *λ* για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα: *α3 = 4 , α5 = 16* και *λ > 0*  α) Να βρείτε τον πρώτο όρο *α1* και το λόγο *λ της* προόδου.  (Μονάδες 8)  β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (*βν*), με *(βν*) = αποτελεί  επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου  της (*αν*). (Μονάδες 9  γ) Αν *S10* και *S’10* είναι τα αθροίσματα των *10* πρώτων όρων των  προόδων (*αν*) και (*βν*) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ισχύει η  σχέση:  (Μονάδες 8) |  |