

Γιώργος Α. Μαυρίδης

Άλγεβρα

Β' Λυκείου

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΑΥΡΙΔΗ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα



Άλγεβρα Β' Λυκείου

Γιώργος Α. Μαυρίδης

τηλ.: 2310.810715, 6973.306709

e-mail: glmavridis@gmail.com

ISBN: 978-618-5249-01-4

© Copyright: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΑΥΡΙΔΗ



**ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ
ΙΩΑΝΝΗΣ Π. ΤΣΑΧΟΥΡΙΔΗΣ
ΔΙΑΚΙΝΗΣΗ ΒΙΒΛΙΩΝ**

ΣΤΡ. ΕΞΑΔΑΚΤΥΛΟΥ 5, 546 35 ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

Τηλ./Fax: **2310.248272**, E-mail: grafima@grafima.com.gr

**Στους γονείς μου
Λάζαρο και Μαρία**

Πρόλογος

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας απευθύνεται σε όλους τους μαθητές της Β΄ τάξης του γενικού λυκείου και φιλοδοξία του είναι να αποτελέσει ένα χρήσιμο και χρηστικό βοήθημα στο μάθημα της Άλγεβρας Γενικής Παιδείας αλλά και μέσο μύησής τους στη γοητεία των Μαθηματικών. Των Μαθηματικών ως βασικό γύμνασμα καθώς και εργαλείο της σκέψης, όπως αυτή μπορεί να βοηθήσει, αν όχι να στηρίζει, κάθε μορφή έκφρασης, επικοινωνίας αλλά και έρευνας.

Θερμές ευχαριστίες στον αγαπητό φίλο και εξάίρετο μαθηματικό **Λουκά Κανάκη**, η συνεισφορά του οποίου ήταν καθοριστική και ανεκτίμητη στη συγγραφή του βιβλίου.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 2016

Γιώργος Α. Μαυρίδης

Περιεχόμενα

Πρόλογος	5
----------------	---

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Επανάληψη από Προηγούμενες Τάξεις

Σύνολα	11
Οι Πραγματικοί Αριθμοί	12
Δυνάμεις	13
Ταυτότητες	14
Διάταξη Πραγματικών Αριθμών	14
Διαστήματα	15
Ιδιότητες των Ανισοτήτων	16
Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού	17
Ρίζες Πραγματικών Αριθμών	18
Εξισώσεις 1ου Βαθμού	19
Η Εξίσωση $x^y = a$	19
Εξισώσεις 2ου Βαθμού	19
Ανισώσεις 1ου Βαθμού	20
Ανισώσεις 2ου Βαθμού	20
Αριθμητική Πρόοδος	21
Γεωμετρική Πρόοδος	22
Καρτεσιανές Συντεταγμένες	22
Εξίσωση Ευθείας	24
Η Έννοια της Συνάρτησης	25
Γραφική Παράσταση Συνάρτησης	26

Συστήματα

Γραμμικά Συστήματα	33
Μη Γραμμικά Συστήματα	69
Ερωτήσεις Θεωρίας	78
Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους	79
Διαγωνίσματα	80

Ιδιότητες Συναρτήσεων

Μονοτονία Συνάρτησης	87
Ακρότατα Συνάρτησης	88
Συμμετρίες Συνάρτησης	89

Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης	124
Ερωτήσεις Θεωρίας	132
Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους.....	132
Διαγωνίσματα	134

Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας	141
Τριγωνομετρικός Κύκλος.....	144
Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες.....	162
Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο.....	177
Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	186
Τριγωνομετρικές Εξισώσεις	205
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών	235
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α	261
Ερωτήσεις Θεωρίας	287
Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους	288
Διαγωνίσματα	291

Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Πολυώνυμα.....	297
Διαίρεση Πολυωνύμων.....	310
Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις.....	337
Εξισώσεις και Ανισώσεις που Ανάγονται σε Πολυωνυμικές	386
Ερωτήσεις Θεωρίας	406
Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους.....	407
Διαγωνίσματα	408

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

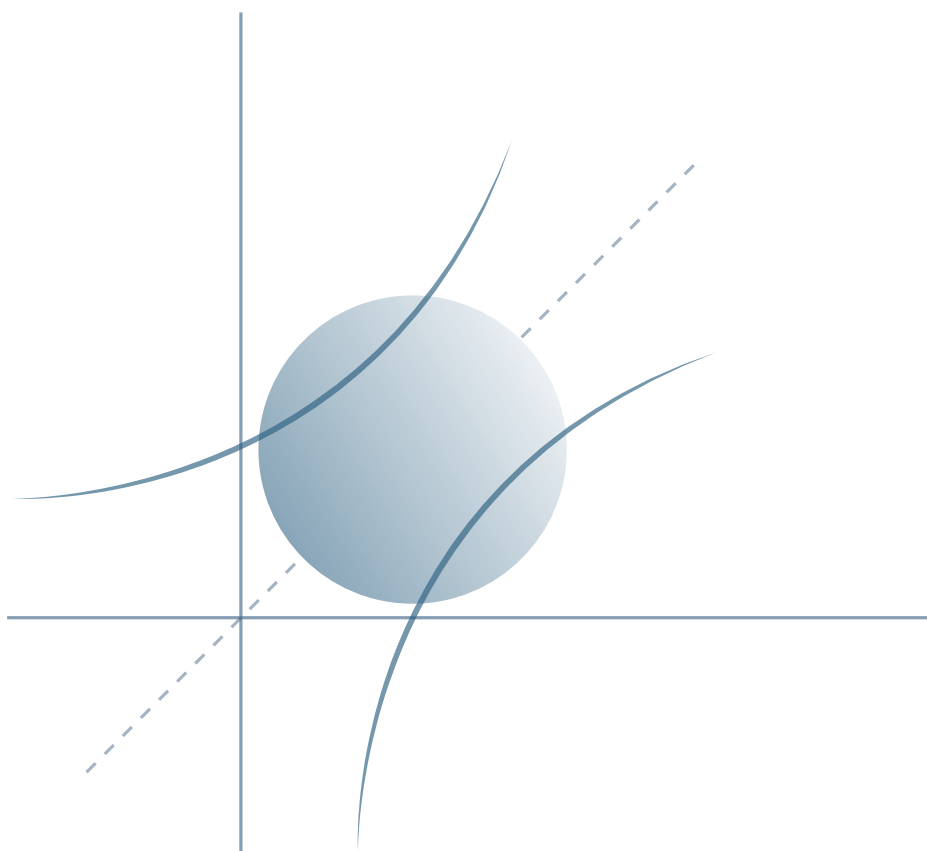
Εκθετική Συνάρτηση	415
Λογάριθμοι	446
Λογαριθμική Συνάρτηση	462
Ερωτήσεις Θεωρίας	506
Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους.....	506
Διαγωνίσματα	508

Ασκήσεις για Επανάληψη.....

Απαντήσεις	529
Βιβλιογραφία	619

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

Επανάληψη από Προηγούμενες Τάξεις





«...το θαύμα να είναι η γλώσσα
των μαθηματικών τόσο κατάλληλη
για τη διατύπωση των νόμων της Φυσικής
είναι ένα εξαίσιο δώρο
που ούτε το καταλαβαίνουμε
ούτε το αξίζουμε.»

Eugene Wigner

Σύνολα

- Ονομάζουμε **σύνολο** κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διάνοησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
- Τα αντικείμενα από τα οποία αποτελείται ένα σύνολο ονομάζονται **στοιχεία** του συνόλου.
- Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου. Έτσι, συμβολίζουμε:
 - με $\mathbb{N}$ το σύνολο των **φυσικών** αριθμών
 - με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των **ακεραίων** αριθμών
 - με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των **ρητών** αριθμών
 - με $\mathbb{R}$ το σύνολο των **πραγματικών** αριθμών
- Με $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$ και $\mathbb{R}^*$ συμβολίζουμε τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ αντίστοιχα, από τα οποία έχουμε εξαιρέσει τον αριθμό 0.

- Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο ενός συνόλου A γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A ». Αντίθετα, για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A ». Για παράδειγμα,

$$5 \in \mathbb{N}, \quad \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}, \quad -\frac{7}{11} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}.$$

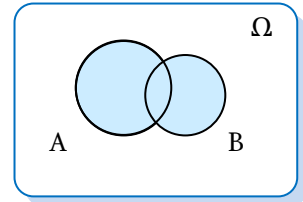
- Δύο σύνολα A και B λέμε ότι είναι **ίσα** και συμβολίζουμε $A = B$, αν και μόνο αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.
- Ένα σύνολο A λέμε ότι είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου B και συμβολίζουμε $A \subseteq B$, αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Για παράδειγμα,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}.$$

- Ονομάζουμε **κενό σύνολο** και συμβολίζουμε με $\emptyset$ το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.
- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα θεωρούμε υποσύνολα ενός συνόλου που το ονομάζουμε **βασικό σύνολο**. Για παράδειγμα, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

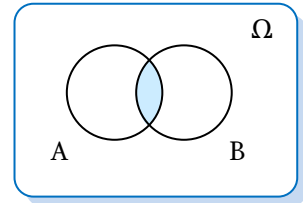
- Ονομάζουμε **ένωση** δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω και συμβολίζουμε με $A \cup B$ το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα σύνολα A και B . Δηλαδή,

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}.$$



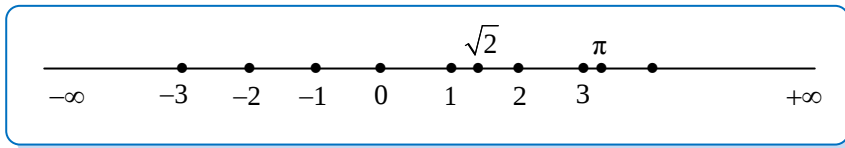
- Ονομάζουμε **τομή** δύο υποσυνόλων A, B ενός βασικού συνόλου Ω και συμβολίζουμε με $A \cap B$ το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο από τα σύνολα A και B . Δηλαδή,

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}.$$



Οι Πραγματικοί Αριθμοί

- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους **άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του **άξονα των πραγματικών αριθμών**.



- **Ρητοί** είναι οι αριθμοί που μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι: $\frac{5}{7}, \frac{11}{3}, 4, -\frac{3}{5}, -8, 3,5, 23,17$ κ.λπ.
- **Άρρητοι** είναι οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, κ.λπ.
- Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
 - $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$
 - $(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Rightarrow \alpha \gamma = \beta \delta$
 - $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
 - Αν $\gamma \neq 0$, τότε $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \gamma = \beta \gamma$
 - $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$

- $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$
- Ισχύουν οι παρακάτω **ιδιότητες των αναλογιών**:
 - $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$, εφόσον $\beta\delta \neq 0$
 - $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, εφόσον $\beta\gamma\delta \neq 0$
 - $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$, εφόσον $\beta\delta \neq 0$
 - $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, εφόσον $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$

Δυνάμεις

- Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ με $n > 1$ ορίζουμε

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha}_n$$
- Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\alpha^1 = \alpha.$$
- Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε

$$\alpha^0 = 1 \text{ και } \alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}.$$
- Αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^n = \beta^n$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
Για παράδειγμα, $(-3)^2 = 3^2$, όμως $-3 \neq 3$.
- Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται οι αναφερόμενες πράξεις, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο.

$$\alpha^k \cdot \alpha^l = \alpha^{k+l}$$

$$\frac{\alpha^k}{\alpha^l} = \alpha^{k-l}$$

$$(\alpha^k)^l = \alpha^{kl}$$

$$\alpha^k \cdot \beta^k = (\alpha\beta)^k$$

$$\frac{\alpha^k}{\beta^k} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k$$

Ταυτότητες

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών ονομάζεται **ταυτότητα**. Οι πιο σημαντικές ταυτότητες είναι:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

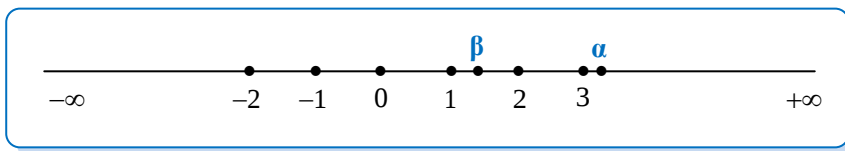
Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

- Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β και γράφουμε $\alpha > \beta$, αν και μόνο αν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι **θετικός αριθμός**. Δηλαδή,

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο β είναι ο μικρότερος του α και γράφουμε $\beta < \alpha$.

- Γεωμετρικά, η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι στον άξονα των πραγματικών αριθμών η εικόνα του α είναι δεξιότερα από την εικόνα του β .

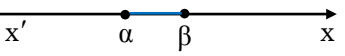
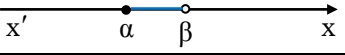
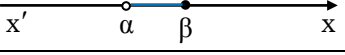
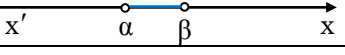
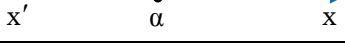
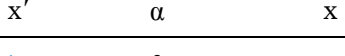
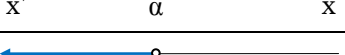
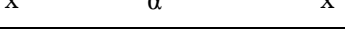


- Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος ή ίσος** από έναν αριθμό β και γράφουμε $\alpha \geq \beta$, αν και μόνο αν ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$. Δηλαδή,

$$\alpha \geq \beta \Leftrightarrow (\alpha > \beta \text{ ή } \alpha = \beta).$$

Διαστήματα

- Ονομάζουμε **κλειστό διάστημα από a μέχρι b** και συμβολίζουμε με $[a, b]$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a \leq x \leq b$.
- Ονομάζουμε **ανοικτό διάστημα από a μέχρι b** και συμβολίζουμε με (a, b) το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a < x < b$.
- Οι αριθμοί a και b ονομάζονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ a και b ονομάζεται εσωτερικό σημείο αυτών των διαστημάτων.
- Η διαφορά μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του ενώ το δεύτερο όχι.
- Ονομάζουμε **ανοικτό δεξιά διάστημα $[a, b)$** το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a \leq x < b$.
- Ονομάζουμε **ανοικτό αριστερά διάστημα $(a, b]$** το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $a < x \leq b$.
- Ονομάζουμε διάστημα $[a, +\infty)$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x \geq a$.
- Ονομάζουμε διάστημα $(a, +\infty)$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x > a$.
- Ονομάζουμε διάστημα $(-\infty, a]$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x \leq a$.
- Ονομάζουμε διάστημα $(-\infty, a)$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $x < a$.

Διάστημα	Ανισότητα	Συμβολισμός
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

Ιδιότητες των Ανισοτήτων

- $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
- $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$, τότε $\alpha > \gamma$
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Αν $\alpha > \beta > 0$ και $\gamma > \delta > 0$, τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$
- Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$
- Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$
- Αν $\alpha\beta > 0$, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

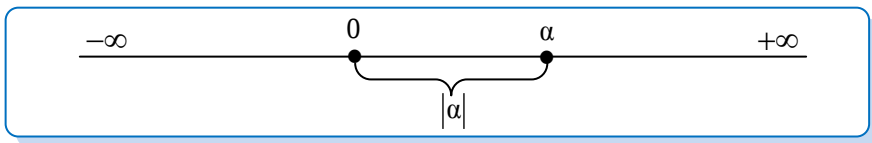
- $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = \beta$.
- $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ για κάθε $\alpha > 0$.
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 1$.

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

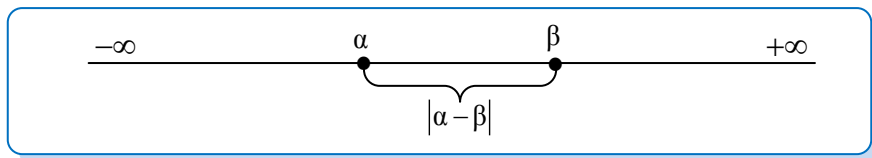
Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού a συμβολίζεται με $|a|$ και ορίζεται από τον τύπο

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

- Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή του a παριστάνει την απόσταση του αριθμού a από τον αριθμό 0.



- Γεωμετρικά, η απόλυτη τιμή της διαφοράς $a - \beta$ παριστάνει την απόσταση των αριθμών a και β .



Ιδιότητες

- $|a| = |-a| \geq 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- $|a|^2 = a^2$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$
- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ ή $x = -a$
- $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$

- $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- Αν $\theta > 0$, τότε $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$ ή $x < -\theta$

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.

Ιδιότητες

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$.

Αν $\alpha \geq 0$, η $\sqrt[n]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^n = \alpha$.

Ιδιότητες

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$ και $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$
- Αν $\alpha \leq 0$ και n άρτιος, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$.
- $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$
- $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$ για κάθε $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$.
- $\sqrt[n]{\alpha^n \beta} = \alpha \sqrt[n]{\beta}$ για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$.

Για κάθε $\alpha > 0$, $\mu \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^\mu}$.

Επίσης, για κάθε $\mu, n \in \mathbb{N}^*$, ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{0^\mu} = 0$.

Εξισώσεις 1^{ου} Βαθμού

Έστω η εξίσωση $ax + \beta = 0$.

- Αν $a \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει **ακριβώς μία ρίζα**, την $x = -\frac{\beta}{a}$.
- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $0x = -\beta$, οπότε:
 - αν $\beta \neq 0$ είναι **αδύνατη**.
 - αν $\beta = 0$ είναι **ταυτότητα**, δηλαδή αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Η Εξίσωση $x^v = a$

- Αν $a > 0$ και v περιττός φυσικός αριθμός, τότε

$$x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}.$$
- Αν $a > 0$ και v άρτιος φυσικός αριθμός, τότε

$$x^v = a \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[v]{a}.$$
- Αν $a < 0$ και v περιττός φυσικός αριθμός, τότε

$$x^v = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{|a|}.$$
- Αν $a < 0$ και v άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^v = a$ είναι αδύνατη.

Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Έστω η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ με διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$.

- Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα

$$x_0 = \frac{-\beta}{2a}.$$

- Αν $\Delta < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
- Αν η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2 ισχύουν οι τύποι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

Ανισώσεις 1^{ου} Βαθμού

Έστω η ανίσωση $ax + \beta > 0$

- Αν $a > 0$, τότε η ανίσωση γράφεται

$$ax > -\beta \Leftrightarrow x > -\frac{\beta}{a}$$

- Αν $a < 0$, τότε η ανίσωση γράφεται

$$ax > -\beta \Leftrightarrow x < -\frac{\beta}{a}$$

- Αν $a = 0$, τότε η ανίσωση γράφεται

$$0x > -\beta$$

οπότε

- αν $\beta > 0$, αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- αν $\beta \leq 0$, είναι αδύνατη.

Ανισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Έστω το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ με διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

- Αν $\Delta > 0$, τότε

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - x_1)(x - x_2)$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + \gamma$	πρόσημο του a	0	πρόσημο του $-a$	0	πρόσημο του a

- Αν $\Delta = 0$, τότε

$$ax^2 + bx + \gamma = a \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2$$

Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + \gamma$	πρόσημο του α		πρόσημο του α

- Αν $\Delta < 0$, τότε

$$ax^2 + bx + \gamma = a \left[\left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2} \right].$$

Στην περίπτωση αυτή το πρόσημο του τριωνύμου φαίνεται στον πίνακα

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + \gamma$	πρόσημο του α	

Αριθμητική Πρόοδος

Μία ακολουθία (α_v) ονομάζεται **αριθμητική πρόοδος** με διαφορά ω αν και μόνο αν ισχύει

$$\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega \quad \text{ή} \quad \alpha_{v+1} - \alpha_v = \omega.$$

- Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_v) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω ισχύει

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v-1)\omega.$$

- Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Γεωμετρική Πρόοδος

Μία ακολουθία (a_n) ονομάζεται **γεωμετρική πρόοδος** με λόγο λ αν και μόνο αν ισχύει

$$a_{n+1} = a_n \cdot \lambda \quad \text{ή} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda.$$

- Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο (a_n) με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ ισχύει

$$a_n = a_1 \cdot \lambda^{n-1}.$$

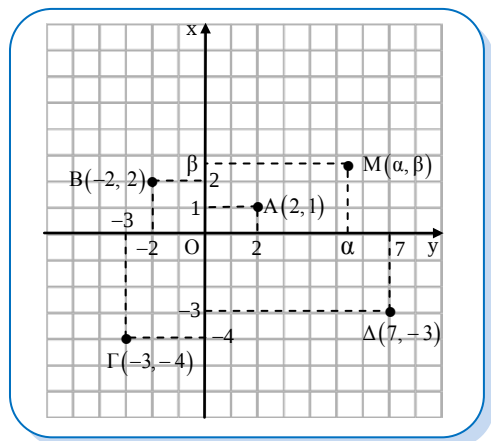
- Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta^2 = \alpha\gamma.$$

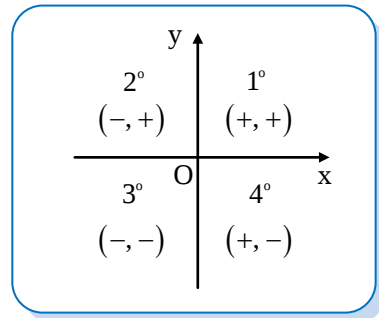
Καρτεσιανές Συντεταγμένες

- Σε ένα επίπεδο θεωρούμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή ένα σημείο O . Από τους άξονες αυτούς ο $x'x$ είναι οριζόντιος και λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή **άξονας των x** ενώ ο $y'y$ είναι κατακόρυφος και λέγεται **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y** .

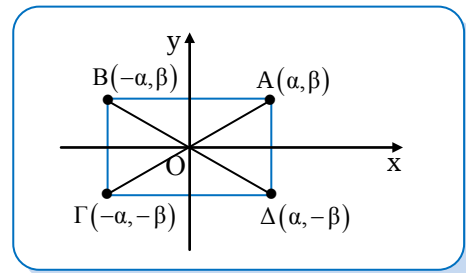
- Σε κάθε σημείο M του επιπέδου των αξόνων αντιστοιχίζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, αντιστοιχίζουμε ένα σημείο M του επιπέδου. Οι παραπάνω αντιστοιχίσεις γίνονται με έναν μοναδικό τρόπο όπως φαίνεται στο σχήμα:



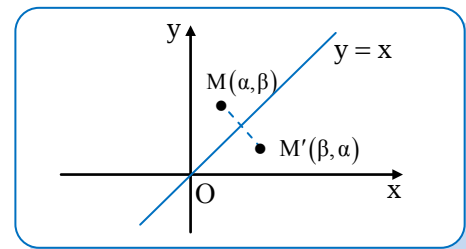
- Οι αριθμοί α, β λέγονται **συντεταγμένες** του M . Ειδικότερα ο α λέγεται τετμημένη και ο β **τεταγμένη** του σημείου M . Το σημείο M συμβολίζεται με $M(\alpha, \beta)$ ή απλά με (α, β) .
- Τα σημεία του άξονα $x'x$ και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, δηλαδή έχουν συντεταγμένες της μορφής $(\alpha, 0)$.
- Τα σημεία του άξονα $y'y$ και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν, δηλαδή έχουν συντεταγμένες της μορφής $(0, \beta)$.
- Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y, y\hat{O}x', x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζονται 1°, 2°, 3° και 4° τεταρτημόριο αντίστοιχα. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



- Το συμμετρικό του σημείου $A(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το σημείο $\Delta(\alpha, -\beta)$.
- Το συμμετρικό του σημείου $A(\alpha, \beta)$ ως προς τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο $B(-\alpha, \beta)$.
- Το συμμετρικό του σημείου $A(\alpha, \beta)$ ως προς την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ είναι το σημείο $\Gamma(-\alpha, -\beta)$.

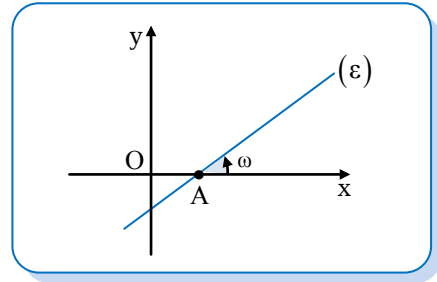


- Το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$ ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο $M'(\beta, \alpha)$.



Εξίσωση Ευθείας

- Έστω (ε) μία ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$** , τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , όταν στραφεί γύρω από το A κατά τη θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία (ε) . Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ ή συμπίπτει με αυτόν, τότε ορίζουμε $\omega = 0^\circ$. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση ισχύει



$$0^\circ \leq \omega < 180^\circ.$$

Ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** ή **κλίση** μιας ευθείας (ε) τον αριθμό

$$\alpha = \varepsilon\omega, \quad \omega \neq 90^\circ.$$

Αν $\omega = 90^\circ$, δηλαδή αν η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, τότε δεν ορίζουμε γι' αυτήν συντελεστή διεύθυνσης.

- Η εξίσωση $y = ax + \beta$ παριστάνει ευθεία η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης α και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- $\alpha > 0 \Leftrightarrow 0^\circ < \omega < 90^\circ$
- $\alpha < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \omega < 180^\circ$
- $\alpha = 0 \Leftrightarrow \omega = 0^\circ$
- Η εξίσωση $y = \beta$ παριστάνει ευθεία η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ όταν $\beta \neq 0$ ή συμπίπτει με αυτόν όταν $\beta = 0$.
- Η ευθεία $y = ax$ παριστάνει ευθεία η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης α και διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.
- Έστω οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1, y = \alpha_2 x + \beta_2$ αντίστοιχα.
 - Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται.
 - Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ είναι παράλληλες.
 - Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$, τότε οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ ταυτίζονται.

Η Έννοια της Συνάρτησης

Ορισμός

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A** μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζουμε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Τον αριθμό y ονομάζουμε **τιμή της f στο x** και τον συμβολίζουμε με $f(x)$.

- Το γράμμα x , που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
- Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A , γράφουμε $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.
- Το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f συνήθως συμβολίζεται με D_f .
- Το σύνολο που έχει ως στοιχεία του μόνο τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, ονομάζεται **σύνολο τιμών** της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Δηλαδή,

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάθε } x \in A\}$$

- Όταν λέμε ότι «**Η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο B** » εννοούμε ότι το B είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της. Σ' αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε με $f(B)$ το σύνολο τιμών της f σε κάθε $x \in B$. Δηλαδή,

$$f(B) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάθε } x \in B\}$$

- Θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού τους είναι **διάστημα ή ένωση διαστημάτων**.

Συντομογραφία συνάρτησης

Για να ορίσουμε μία συνάρτηση f αρκεί να ορίσουμε δύο στοιχεία:

- το πεδίο ορισμού της A
- την τιμή της, $f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Όμως, πολλές φορές περιγράφουμε μία συνάρτηση f δίνοντας μόνο τον τύπο της. Σε μία τέτοια περίπτωση θεωρούμε συμβατικά ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x , για τους οποίους το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Παράδειγμα

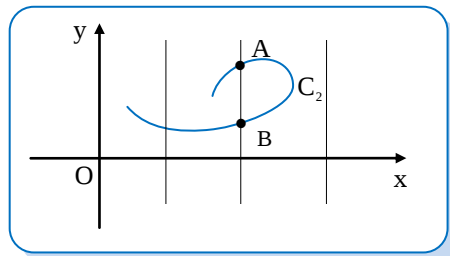
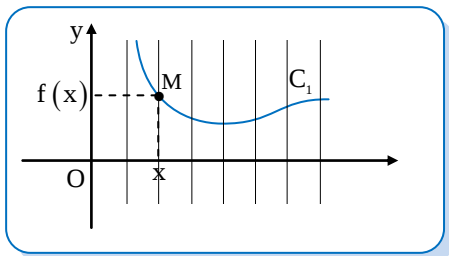
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-2}$ είναι το σύνολο $A = [2, +\infty)$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

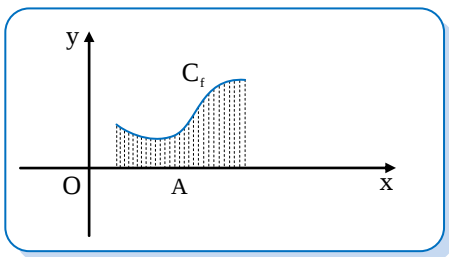
Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Ονομάζουμε **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζουμε συνήθως με C_f το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$.

- Η γραφική παράσταση κάθε συνάρτησης f έχει εξίσωση $y = f(x)$.
- Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Δηλαδή, κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο. Έτσι, στα παρακάτω σχήματα, η καμπύλη C_1 είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης f , ενώ η καμπύλη C_2 όχι.



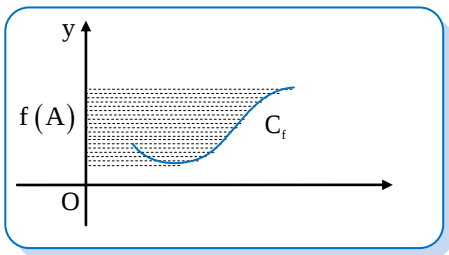
- Το πεδίο ορισμού κάθε συνάρτησης f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της γραφικής της παράστασης.



Παρατήρηση

Αντιλαμβανόμαστε γεωμετρικά το πεδίο ορισμού A της f ως προς την προβολή της C_f στον άξονα $x'x$.

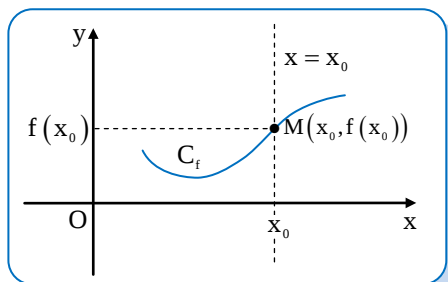
- Το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της γραφικής της παράστασης.



Παρατήρηση

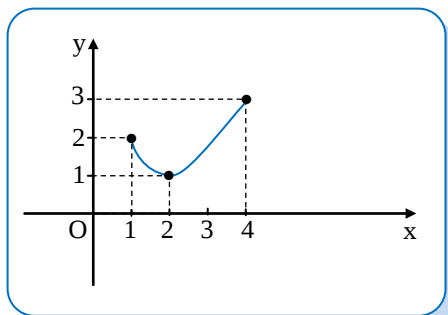
Αντιλαμβανόμαστε γεωμετρικά το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ως την προβολή της C_f στον άξονα $y'y$.

- Η τιμή της f σε κάθε $x_0 \in A$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ με τη C_f .



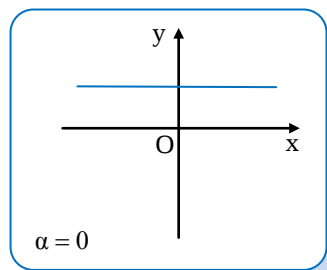
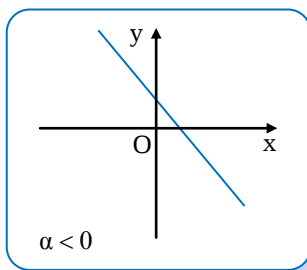
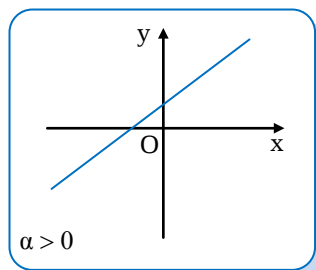
Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [1, 4]$ και το σύνολο τιμών της το $f(A) = [1, 3]$.

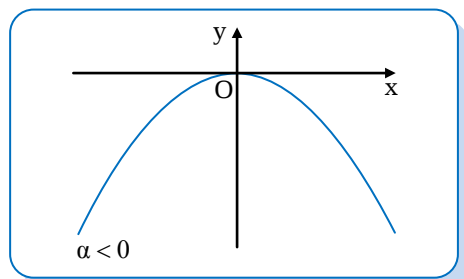
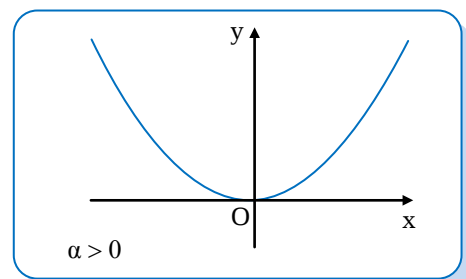


Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

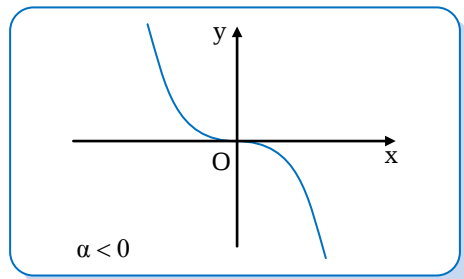
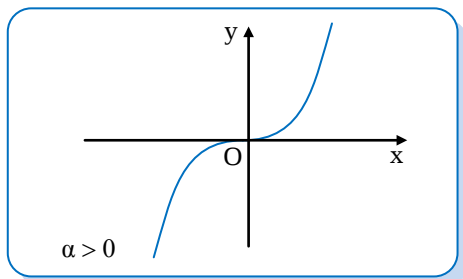
Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$



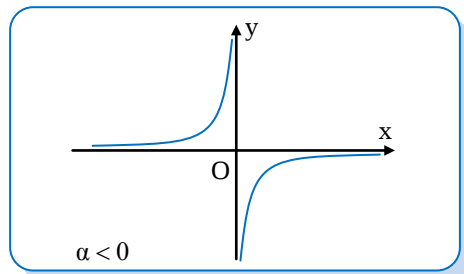
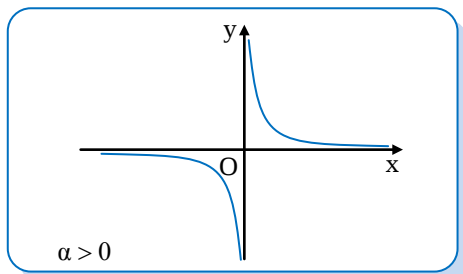
Η συνάρτηση $f(x) = ax^2, a \neq 0$



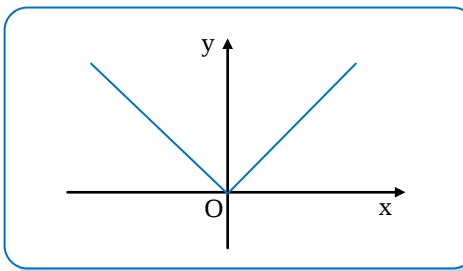
Η συνάρτηση $f(x) = ax^3, a \neq 0$



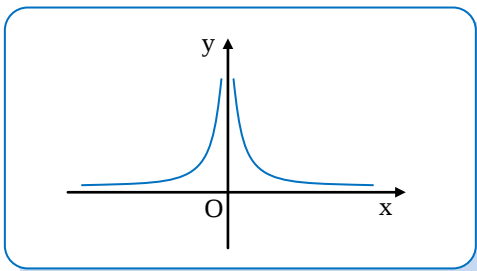
Η συνάρτηση, $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$



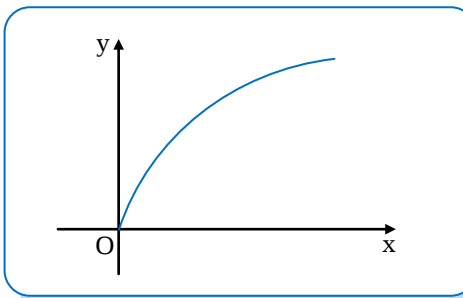
Η συνάρτηση $f(x) = |x|$



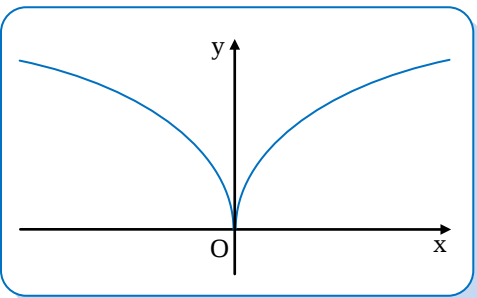
Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{|x|}$



Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$

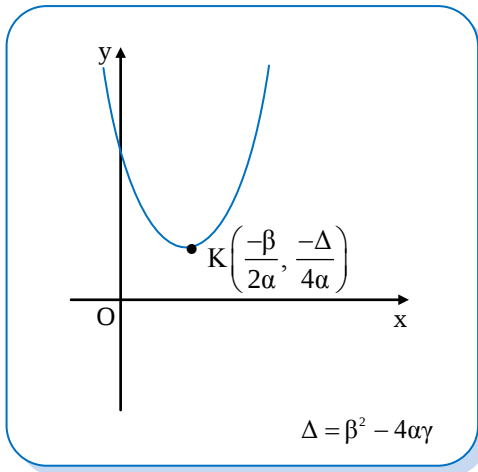


Η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{|x|}$

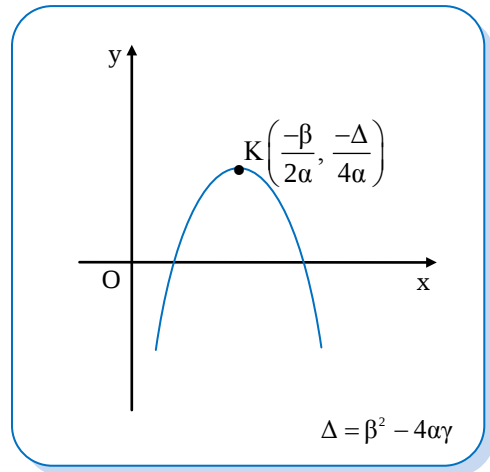


Η συνάρτηση

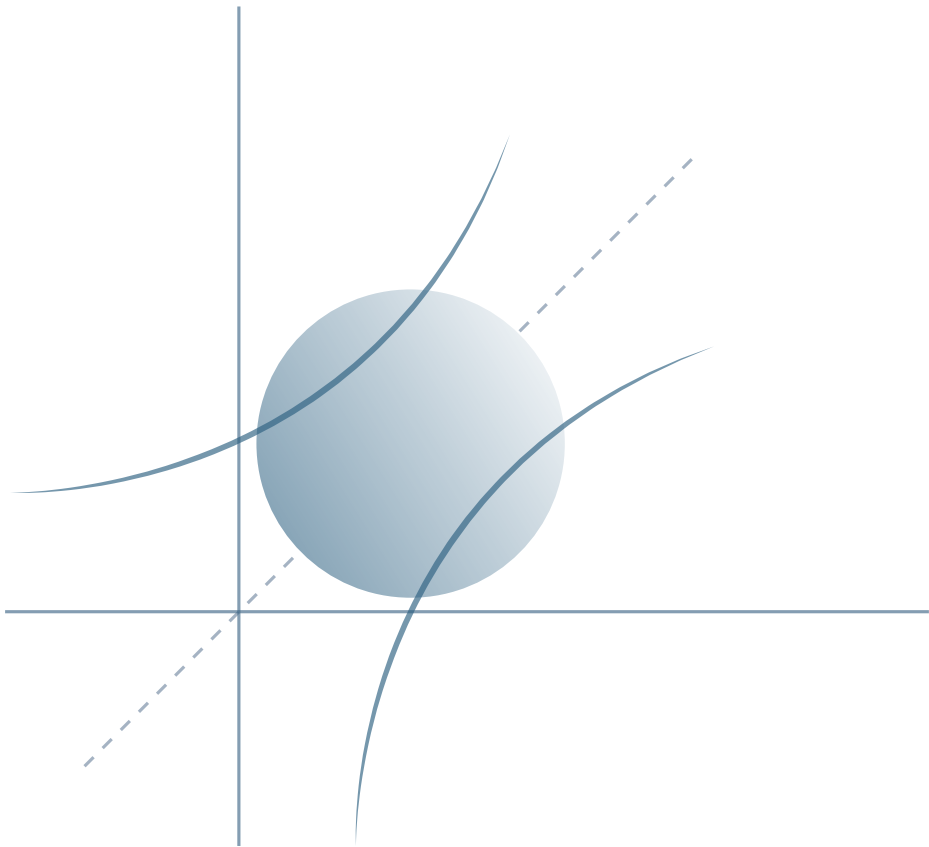
$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \text{ με } a > 0$$

**Η συνάρτηση**

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \text{ με } a < 0$$



Συστήματα





*«Ο σκοπός της επιστήμης δεν είναι η δράση.
Η επιστήμη είναι χρήσιμη επειδή είναι αληθινή,
αλλά δεν είναι αληθινή
επειδή πρόκειται να είναι χρήσιμη.»*

Jules Henri Poincaré

Jules Henri Poincaré

(1854 – 1912)

Γάλλος μαθηματικός από τους μεγαλύτερους όλων των εποχών, που μεγαλούργησε σαν καθηγητής-ερευνητής του Πανεπιστημίου του Παρισιού. Το έργο του στα Μαθηματικά σήμανε το τέλος της κλασικής εποχής στη συγκεκριμένη επιστήμη και άνοιξε το δρόμο στην ανάπτυξη των σύγχρονων μαθηματικών. Ελάχιστοι μαθηματικοί είχαν την πνοή της φιλοσοφικής ενατένισης με την οποία ήταν προικισμένος ο Πουανκαρέ και κανένας δεν είχε σε τέτοιο βαθμό το χάρισμα της σαφούς έκθεσης.

Γραμμικά Συστήματα

Ορισμός

Ονομάζεται **γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y** κάθε εξίσωση της μορφής

$$ax + by = \gamma \quad \text{με} \quad a \neq 0 \quad \text{ή} \quad b \neq 0.$$

Πρόταση

Κάθε γραμμική εξίσωση

$$ax + by = \gamma \quad \text{με} \quad a \neq 0 \quad \text{ή} \quad b \neq 0$$

παριστάνει στο επίπεδο ευθεία γραμμή.

Απόδειξη

- Αν $b \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται

$$ax + by = \gamma \Leftrightarrow by = -ax + \gamma$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{\gamma}{b}$$

Επομένως, παριστάνει ευθεία η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{a}{b}$ και τέμνει

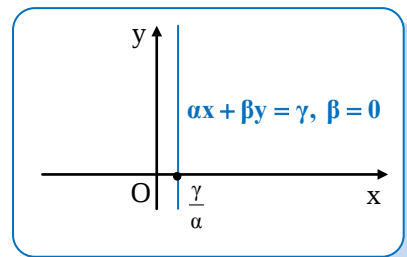
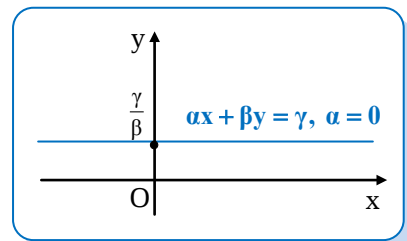
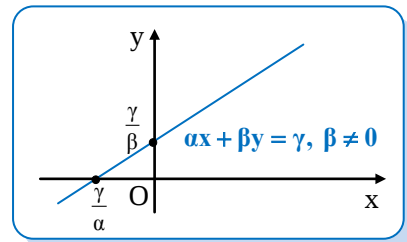
τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0, \frac{\gamma}{b}\right)$.

Ειδικότερα:

- Αν $a \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες.
- Αν $a = 0$, τότε η ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.
- Αν $b = 0$ (οπότε $a \neq 0$), τότε η εξίσωση $ax + by = \gamma$ γράφεται

$$x = \frac{\gamma}{a}$$

και παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.



Παράδειγμα

Η εξίσωση $3x - 2y = 4$ παίρνει τη μορφή $y = \frac{3}{2}x - 2$ και παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{3}{2}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -2)$.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $y = 4$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$, ενώ η εξίσωση $x = -1$ παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$.

- Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει μια γραμμική εξίσωση λέγεται **λύση** της γραμμικής εξίσωσης. Οι λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης είναι άπειρες.

Παράδειγμα

Τα ζεύγη $(1, -2)$ και $(-1, 8)$ είναι λύσεις της εξίσωσης $5x + y = 3$, αφού

$$5 \cdot 1 + (-2) = 3 \quad \text{και} \quad 5(-1) + 8 = 3.$$

Οι άπειρες λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλα τα ζεύγη της μορφής

$$(κ, 3 - 5κ) \quad \text{με} \quad κ \in \mathbb{R}.$$

- Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις

$$αx + βy = γ \quad \text{και} \quad α'x + β'y = γ'$$

και ζητούμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα 2×2** και γράφουμε

$$\begin{cases} αx + βy = γ \\ α'x + β'y = γ' \end{cases}$$

Κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις λέγεται **λύση του συστήματος**.

- Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν δύο ευθείες $(ε_1)$ και $(ε_2)$, οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή ακόμη και να συμπίπτουν.

Ειδικότερα:

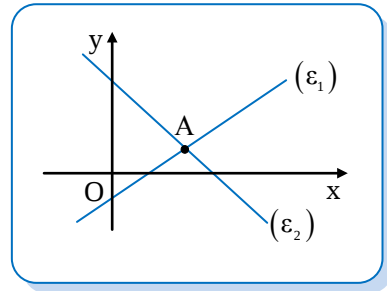
- Αν οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : ax + by = \gamma \text{ και } \varepsilon_2 : a'x + \beta'y = \gamma'$$

τέμνονται, τότε το σύστημα

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

έχει **μοναδική λύση** (x, y) που είναι οι συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .



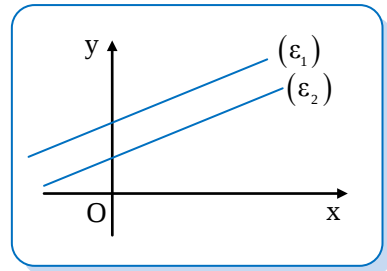
- Αν οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : ax + by = \gamma \text{ και } \varepsilon_2 : a'x + \beta'y = \gamma'$$

είναι **παράλληλες**, τότε το σύστημα

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

είναι **αδύνατο**.



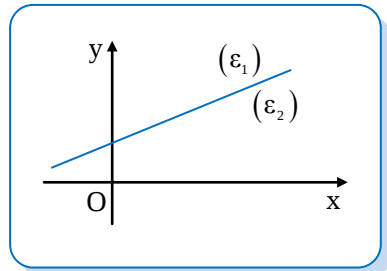
- Αν οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : ax + by = \gamma \text{ και } \varepsilon_2 : a'x + \beta'y = \gamma'$$

συμπίπτουν, τότε το σύστημα

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

έχει **άπειρες λύσεις**.



Παράδειγμα

Το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση, αφού οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y = 8$ και $\varepsilon_2 : 2x - y = 7$ έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης και συνεπώς τέμνονται.

Παράδειγμα

Το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ είναι αδύνατο, αφού οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y = 8$ και $\varepsilon_2 : 3x + y = 7$ είναι παράλληλες.

Παράδειγμα

Το σύστημα $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 6x + 2y = 16 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις, αφού οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y = 8$

και $\varepsilon_2 : 6x + 2y = 16 \Leftrightarrow 3x + y = 8$ συμπίπτουν.

- Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ακολουθούμε κάποια από τις παρακάτω μεθόδους.

Μέθοδος της Αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει υπολογίζοντας έτσι τον έναν άγνωστο. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλον άγνωστο.

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = 13 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y \\ 2(1 - 3y) - 5y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y \\ 2 - 6y - 5y = 13 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y \\ -11y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (4, -1)$.

Μέθοδος των Αντίθετων Συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς έτσι, ώστε να προκύψουν εξισώσεις στις οποίες οι συντελεστές του ενός αγνώστου να είναι αντίθετοι. Στη συνέχεια, προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο τον οποίο και βρίσκουμε. Αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις αρχικές εξισώσεις υπολογίζουμε και τον άλλο άγνωστο.

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases} \cdot 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 2 \\ -10x + 25y = -95 \end{cases} + \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 2 \\ 31y = -93 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 6(-3) = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x = 20 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x, y) = (2, -3)$.

Ορισμός (Ορίζουσας)

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ η παράσταση
 $\alpha\delta - \beta\gamma$

ονομάζεται **ορίζουσα 2ης τάξης** και συμβολίζεται με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$. Δηλαδή

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

Μέθοδος των Ορίζουσών

Στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \quad \text{και} \quad D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma.$$

Η ορίζουσα D λέγεται **ορίζουσα του συστήματος** και ισχύει:

- Αν $D \neq 0$, τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** (x, y) με

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D}.$$

- Αν $D = 0$, τότε το σύστημα είναι **αδύνατο** ή έχει **άπειρο πλήθος λύσεων**.

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 4x + 5y = 3 \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0,$$

οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) . Και επειδή

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 5 = 14 \quad \text{και} \quad D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 6 = -10,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{2} = -5.$$

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x - 4y = -6. \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

και συνεπώς το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης με το -2 , τότε το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ -x + 2y = 3, \end{cases}$$

δηλαδή έχει μόνο μία εξίσωση, την $-x + 2y = 3$. Επομένως, οι λύσεις του συστήματος είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$-x + 2y = 3 \Leftrightarrow x = 2y - 3.$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, τα ζεύγη της μορφής

$$(x, y) = (2\kappa - 3, \kappa), \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 6x + 4y = 10. \end{cases}$$

Λύση

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

και συνεπώς το σύστημα ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης με το 2, τότε το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

και προφανώς είναι αδύνατο.

Ορισμός

Ονομάζεται **γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους x, y, z** κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by + cz = \delta$,

με έναν τουλάχιστον από τους συντελεστές a, b, c διάφορο του μηδενός.

- Κάθε τριάδα αριθμών (x, y, z) που επαληθεύει μία γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους $ax + by + cz = \delta$ λέγεται **λύση** αυτής. Οι λύσεις μιας γραμμικής εξίσωσης με τρεις αγνώστους είναι άπειρες.

- Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1, \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2$$

και

$$\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3$$

και ζητούμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα 3×3** και γράφουμε

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z = \delta_3. \end{cases}$$

Κάθε τριάδα αριθμών (x, y, z) που επαληθεύει και τις τρεις εξισώσεις λέγεται **λύση του συστήματος**. Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με εκείνες που χρησιμοποιούμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 .

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ x + 2y + 2z = 5. \end{cases}$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης. Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$z = 3 - x - y \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στις άλλες δύο εξισώσεις προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 3y - (3 - x - y) = 0 \\ x + 2y + 2(3 - x - y) = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 3 + x + y = 0 \\ x + 2y + 6 - 2x - 2y = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ -x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 1 - 2y = 3 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) βρίσκουμε $z = 2$. Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y, z) = (1, 0, 2).$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 3y = 7. \end{cases}$$

Λύση

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος ως προς y έχουμε

$$y = 1 - 2x.$$

Οπότε, το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ 4x + 3y = 7. \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση η οποία γράφεται

$$\begin{aligned} 4x + 3(1 - 2x) &= 7 \\ \Leftrightarrow 4x + 3 - 6x &= 7 \\ \Leftrightarrow -2x &= 4 \\ \Leftrightarrow x &= -2. \end{aligned}$$

Επομένως, το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x = -2 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του x που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε

$$y = 1 - 2(-2) = 1 + 4 = 5.$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = (-2, 5).$$

Μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε τη μία από τις δύο εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο. Αντικαθιστούμε στη δεύτερη εξίσωση και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει υπολογίζοντας έτσι τον έναν άγνωστο. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση και υπολογίζουμε τον άλλο άγνωστο.

2. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 2x + 3y = 9. \end{cases}$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με το 2 και της δεύτερης εξίσωσης με το -3. Οπότε, το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} 6x - 8y = 10 \\ -6x - 9y = -27. \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$6x - 8y - 6x - 9y = 10 - 27$$

$$\Leftrightarrow -17y = -17 \Leftrightarrow y = 1.$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του y που βρήκαμε στην πρώτη εξίσωση του συστήματος που μας δόθηκε, προκύπτει

$$3x - 4 \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = (3, 1).$$

Μέθοδος των

αντίθετων συντελεστών

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς έτσι, ώστε να προκύψουν εξισώσεις στις οποίες οι συντελεστές του ενός αγνώστου να είναι αντίθετοι. Στη συνέχεια, προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο τον οποίο και βρίσκουμε. Αντικαθιστώντας την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις αρχικές εξισώσεις υπολογίζουμε και τον άλλο άγνωστο.

3. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3} \\ x+4y = 7 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x-4y = 2 \\ \frac{x}{4} - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad \begin{cases} y = 3x + 9 \\ x + 3 = \frac{y}{3} \end{cases}$$

Λύση

i) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(x+1) = 2(y+5)$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3 = 2y + 10$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y = 7.$$

Οπότε, το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

Σημείωση

Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 , δηλαδή ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν. Αυτό σημαίνει ότι ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να έχει μοναδική λύση, ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων αντίστοιχα.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x + 4y = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(7 - 4y) - 2y = 7 \\ x = 7 - 4y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 21 - 12y - 2y = 7 \\ x = 7 - 4y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -14y = -14 \\ x = 7 - 4y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = (3, 1).$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x - 4y = 2 \\ \frac{x}{4} - y = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 2 \\ 4\frac{x}{4} - 4y = 4 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 2 \\ x - 4y = 4 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} y - 3x = 9 \\ x + 3 = \frac{y}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 9 \\ 3x + 9 = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 9 \\ y = 3x + 9 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (\kappa, 3\kappa + 9) \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

4. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} (\sqrt{2}+1)x+y=3 \\ 2x-(\sqrt{2}-1)y=0. \end{cases}$$

Λύση

Πρόκειται για 2×2 γραμμικό σύστημα με

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 \\ 2 & -(\sqrt{2}-1) \end{vmatrix} \\ &= -(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)-2 \\ &= -[(\sqrt{2})^2-1^2]-2 \\ &= -(2-1)-2 \\ &= -3 \neq 0. \end{aligned}$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Και επειδή

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -(\sqrt{2}-1) \end{vmatrix} = -3(\sqrt{2}-1)$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} \sqrt{2}+1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6,$$

συμπεραίνουμε ότι η μοναδική λύση του συστήματος είναι η (x, y) με

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-3(\sqrt{2}-1)}{-3} = \sqrt{2}-1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Μέθοδος των Οριζουσών

Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} ax+by=\gamma \\ a'x+\beta'y=\gamma' \end{cases}$$

- Αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

- Αν $D = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

5. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ 4x + \lambda y = \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Λύση

Πρόκειται για 2×2 γραμμικό σύστημα με

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ 4 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4) \\ = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 2$ και $\lambda \neq -2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = 0$$

και

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} = \lambda.$$

- Αν $\lambda = 2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (\kappa, -2\kappa + 2)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

- Αν $\lambda = -2$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = -2 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (\kappa, 2\kappa - 2)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Σχόλια

Παρατηρούμε ότι κάποιοι από τους συντελεστές και τους σταθερούς όρους του συστήματος εξαρτώνται από την παράμετρο λ . Ενδέχεται λοιπόν, όπως και στις εξισώσεις, να ακολουθήσουμε μία πορεία διερεύνησης εργαζόμενοι ως εξής:

Βρίσκουμε τις ορίζουσες D , D_x , D_y προσπαθώντας να τις φέρουμε σε μορφή γινομένου. Αν δεν μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τη D εξετάζουμε μήπως μπορούμε να τη γράψουμε ως άθροισμα τετραγώνων. Οπότε:

- αν $D \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D}$$

- αν $D = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

6. Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} \lambda x + 3y = \mu \\ \mu x + y = \lambda \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 3x - y = \lambda \\ \lambda x + (\mu - 2)y = 4 \end{cases} \quad \text{με } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές των λ και μ για τις οποίες τα παραπάνω συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα.

Λύση

Έστω D, D' οι αντίστοιχες ορίζουσες των δύο συστημάτων. Αν τα συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα, τότε κατ' ανάγκη ισχύουν οι σχέσεις

$$D = 0 \quad \text{και} \quad D' = 0.$$

Δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ \mu & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ \lambda & \mu - 2 \end{vmatrix} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda - 3\mu = 0 \quad \text{και} \quad 3(\mu - 2) + \lambda = 0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} \lambda - 3\mu = 0 \\ 3\mu - 6 + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3\mu \\ 3\mu + 3\mu = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3\mu \\ 6\mu = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 1. \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των λ και μ που βρήκαμε, τα αρχικά συστήματα γράφονται

$$\begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{3} \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 3x - y = 3 \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

Προφανώς, τα δύο συστήματα είναι αδύνατα. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τα αρχικά συστήματα είναι συγχρόνως αδύνατα αν και μόνο αν

$$\lambda = 3 \quad \text{και} \quad \mu = 1.$$

Σχόλιο

Γνωρίζουμε ότι αν η ορίζουσα ενός γραμμικού συστήματος 2×2 είναι ίση με το μηδέν, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

Επομένως, οι συνθήκες

$$D = 0 \quad \text{και} \quad D' = 0$$

είναι αναγκαίες, όχι όμως και ικανές, για να είναι τα δύο συστήματα συγχρόνως, αδύνατα.

7. Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} \lambda x - 3y = 0 \\ x + (\lambda - 4)y = \lambda - 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x + (\lambda + 1)y = \lambda \\ \lambda x + 2y = 2, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι αν το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε το δεύτερο σύστημα είναι αδύνατο.

Λύση

Αν το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε

$$\begin{aligned} D = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 4) + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ή} \quad \lambda = 3. \end{aligned}$$

- Για $\lambda = 1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

και έχει άπειρες λύσεις.

- Για $\lambda = 3$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

Άρα, το πρώτο σύστημα έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $\lambda = 1$. Γι' αυτήν την τιμή του λ , το δεύτερο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

και προφανώς είναι αδύνατο.

8. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα κοινά σημεία των ευθειών

$$\varepsilon_1 : 2\alpha x + (2\alpha - 1)y = 1$$

και

$$\varepsilon_2 : 2x + \alpha y = \alpha.$$

Λύση

Το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών είναι

$$\begin{cases} 2\alpha x + (2\alpha - 1)y = 1 \\ 2x + \alpha y = \alpha, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Πρόκειται για 2×2 γραμμικό σύστημα με

$$D = \begin{vmatrix} 2\alpha & 2\alpha - 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha^2 - 2(2\alpha - 1) = 2(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 2(\alpha - 1)^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2\alpha - 1 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - \alpha(2\alpha - 1) = \alpha[1 - (2\alpha - 1)] = \alpha(-2\alpha + 2) = -2\alpha(\alpha - 1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2\alpha & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha^2 - 2 = 2(\alpha^2 - 1) = 2(\alpha - 1)(\alpha + 1).$$

- Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\alpha \neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{2\alpha(\alpha - 1)}{2(\alpha - 1)^2} = \frac{-\alpha}{\alpha - 1}.$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)^2} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}.$$

Δηλαδή, οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο

$$M\left(\frac{-\alpha}{\alpha - 1}, \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}\right).$$

- Αν $\alpha = 1$, το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις που σημαίνει ότι οι δύο ευθείες ταυτίζονται.

Μεθοδολογία

Η εύρεση των κοινών σημείων δύο ευθειών ανάγεται στην επίλυση του συστήματος των εξισώσεών τους.

9. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \kappa x - \lambda y = 1 \\ \lambda x + \kappa y = 0, \end{cases} \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια να βρείτε τη λύση (x, y) του συστήματος για την οποία ισχύει

$$x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{D}.$$

Λύση

Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 2×2 με

$$D = \begin{vmatrix} \kappa & -\lambda \\ \lambda & \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 + \lambda^2, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & \kappa \end{vmatrix} = \kappa$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} \kappa & 1 \\ \lambda & 0 \end{vmatrix} = -\lambda.$$

- Αν $\kappa^2 + \lambda^2 \neq 0$ δηλαδή αν ένα τουλάχιστο από τα κ, λ δεν είναι μηδέν, τότε $D \neq 0$. Οπότε, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \lambda^2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-\lambda}{\kappa^2 + \lambda^2}.$$

- Αν $\kappa^2 + \lambda^2 = 0$ δηλαδή αν $\kappa = \lambda = 0$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

και προφανώς είναι αδύνατο.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι η σχέση

$$x + y = \frac{1}{2} + \frac{1}{D}$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{\kappa^2 + \lambda^2} - \frac{\lambda}{\kappa^2 + \lambda^2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\kappa^2 + \lambda^2} \\ \Leftrightarrow 2\kappa - 2\lambda &= \kappa^2 + \lambda^2 + 2 \\ \Leftrightarrow \kappa^2 + \lambda^2 - 2\kappa + 2\lambda + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\kappa^2 - 2\kappa + 1) + (\lambda^2 + 2\lambda + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\kappa - 1)^2 + (\lambda + 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \kappa - 1 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \kappa = 1 \quad \text{και} \quad \lambda = -1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$x = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{-\lambda}{\kappa^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2}.$$

Δηλαδή,

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

10. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda - 1 \\ \lambda x + (\lambda + 1)y = 4, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Να βρείτε την τιμή του ακεραίου λ για την οποία το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) τέτοια, ώστε

$$x + y > 1.$$

Λύση

Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 2×2 με ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda + 1 - 2\lambda = 1 - \lambda.$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν

$$D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1.$$

Έχουμε

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 4 & \lambda+1 \end{vmatrix}}{1-\lambda} = \frac{\lambda^2-1-8}{1-\lambda} = \frac{\lambda^2-9}{1-\lambda},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 \\ \lambda & 4 \end{vmatrix}}{1-\lambda} = \frac{4-\lambda(\lambda-1)}{1-\lambda} = \frac{-\lambda^2+\lambda+4}{1-\lambda}.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} x+y > 1 &\Leftrightarrow \frac{\lambda^2-9}{1-\lambda} + \frac{-\lambda^2+\lambda+4}{1-\lambda} > 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2-9-\lambda^2+\lambda+4}{1-\lambda} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda-5}{1-\lambda} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda-5-1+\lambda}{1-\lambda} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2\lambda-6}{1-\lambda} > 0 \Leftrightarrow 2(\lambda-3)(1-\lambda) > 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in (1,3). \end{aligned}$$

Και επειδή $\lambda \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda = 2.$$

11. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + 4y = 0 \\ 2x + \lambda^2 y = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- i) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
- ii) Αν το ζεύγος $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ είναι λύση του συστήματος, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ .

Λύση

- i) Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $(x, y) = (0, 0)$ αποτελεί λύση του συστήματος για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα, το σύστημα έχει μια τουλάχιστον λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .

- ii) Γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα 2×2 μπορεί να έχει μοναδική λύση, να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρες λύσεις. Όμως, το δοθέν σύστημα έχει δύο τουλάχιστον λύσεις, τα ζεύγη $(0,0)$ και $(x_1, y_1) \neq (0,0)$. Επομένως, έχει άπειρες λύσεις και συνεπώς ισχύει $D = 0$.

Δηλαδή,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

και τελικά

$$\lambda = 2.$$

Σχόλιο

Όταν γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα 2×2 δεν είναι αδύνατο, τότε η συνθήκη

$$D = 0$$

είναι ικανή και αναγκαία ώστε αυτό να έχει άπειρες λύσεις.

12. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

και δύο λύσεις του

$$(x_1, y_1) \quad \text{και} \quad (x_2, y_2)$$

διαφορετικές μεταξύ τους. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lambda = 1$

ii) $y_1 y_2 + x_1 + x_2 = 1 + x_1 x_2.$

Λύση

- i) Το δοθέν σύστημα είναι γραμμικό 2×2 και συνεπώς έχει μοναδική λύση ή είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις. Και επειδή γνωρίζουμε ότι έχει δύο τουλάχιστον λύσεις, συμπεραίνουμε ότι έχει άπειρες. Επομένως,

$$D = 0$$

δηλαδή

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$1 - \lambda^2 = 0$$

και τελικά

$$\lambda = 1 \quad \text{ή} \quad \lambda = -1.$$

- Για $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

και προφανώς έχει άπειρες λύσεις.

- Για $\lambda = -1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

και προφανώς είναι αδύνατο.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda = 1.$$

- ii)** Αντικαθιστώντας την τιμή του λ που βρήκαμε στο ερώτημα **i)** το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$y = 1 - x.$$

Δηλαδή, έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (\kappa, 1 - \kappa) \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε

$$(x_1, y_1) = (\kappa_1, 1 - \kappa_1)$$

και

$$(x_2, y_2) = (\kappa_2, 1 - \kappa_2).$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} y_1 y_2 + x_1 + x_2 &= (1 - \kappa_1)(1 - \kappa_2) + \kappa_1 + \kappa_2 \\ &= 1 - \kappa_2 - \kappa_1 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 + \kappa_2 \\ &= 1 + \kappa_1 \kappa_2 \\ &= 1 + x_1 x_2. \end{aligned}$$

13. Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + (\lambda^2 + 1)y = \lambda \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (1 - \lambda)x + y = 1 \\ (\lambda - 2)x + \lambda^2 y = 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- i) Αν είναι D και D' οι αντίστοιχες ορίζουσες των παραπάνω συστημάτων, να υπολογίσετε το άθροισμα $D + D'$.
- ii) Να αποδείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.

Λύση

i) Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 + 1) - 1 = \lambda^3 + \lambda - 1$$

και

$$D' = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & \lambda^2 \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\lambda^2 - (\lambda - 2) = \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda + 2.$$

Επομένως,

$$D + D' = \lambda^3 + \lambda - 1 + \lambda^2 - \lambda^3 - \lambda + 2 = \lambda^2 + 1.$$

- ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι μία τουλάχιστον από τις ορίζουσες D και D' είναι διαφορετική του μηδενός. Προς τούτο, υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι

$$D = 0 \quad \text{και} \quad D' = 0.$$

Επομένως,

$$D + D' = 0.$$

Ή ισοδύναμα, λόγω του ερωτήματος i)

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

που είναι αδύνατον. Άρα, μία τουλάχιστον από τις ορίζουσες D και D' είναι διαφορετική του μηδενός.

14. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = \kappa + 1 \\ 3x + \lambda y = 9 - 3\kappa \end{cases} \text{ με } \kappa, \lambda \in \mathbb{R}$$

- i) Να βρείτε την τιμή του κ έτσι, ώστε το σύστημα να έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Αν το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση και $\kappa = 1$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.
- iii) Αν το παραπάνω σύστημα έχει άπειρες λύσεις (x, y) , να αποδείξετε ότι

$$x^2 + y^2 \geq \frac{4}{5}.$$

Λύση

- i) Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 2×2 με ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 6.$$

- Αν $\lambda \neq 6$, τότε $D \neq 0$ οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.
- Αν $\lambda = 6$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + 2y = \kappa + 1 \\ 3x + 6y = 9 - 3\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = \kappa + 1 \\ x + 2y = 3 - \kappa \end{cases}$$

οπότε έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν

$$\kappa + 1 = 3 - \kappa \Leftrightarrow 2\kappa = 2 \Leftrightarrow \kappa = 1.$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\kappa = 1$.

- ii) Αποδείξαμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\lambda \neq 6$. Για αυτές τις τιμές του λ και για $\kappa = 1$, το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + \lambda y = 6. \end{cases}$$

Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 12 = 2(\lambda - 6)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0.$$

Άρα,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\lambda - 6)}{\lambda - 6} = 2$$

και

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{\lambda - 6} = 0.$$

Δηλαδή, η μοναδική λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(x, y) = (2, 0)$.

- iii)** Από το ερώτημα **i)** είναι φανερό ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $\lambda = 6$ και $\kappa = 1$. Γι' αυτές τις τιμές των κ, λ το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$x = 2 - 2y.$$

Δηλαδή, οι άπειρες λύσεις του είναι της μορφής

$$(x, y) = (2 - 2\mu, \mu) \quad \text{με } \mu \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (2 - 2\mu)^2 + \mu^2 &\geq \frac{4}{5} \Leftrightarrow 4 + 4\mu^2 - 8\mu + \mu^2 \geq \frac{4}{5} \\ &\Leftrightarrow 5\mu^2 - 8\mu + \frac{16}{5} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 25\mu^2 - 40\mu + 16 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (5\mu - 4)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

- 15.** Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x, y για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$D_x \neq D_y$$

και

$$2D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2D(D_x - D_y).$$

- i) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.
 ii) Να βρείτε τις τιμές των x και y .

Λύση

- i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $D \neq 0$. Προς τούτο, υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι $D = 0$. Αντικαθιστώντας στη δοθείσα ισότητα προκύπτει

$$D_x^2 + D_y^2 = 0$$

δηλαδή

$$D_x = D_y = 0$$

πράγμα άτοπο, αφού από την υπόθεση έχουμε

$$D_x \neq D_y.$$

Επομένως,

$$D \neq 0.$$

- ii) Από τη δοθείσα ισότητα, διαιρώντας και τα δύο μέλη με D^2 παίρνουμε

$$2\frac{D^2}{D^2} + \frac{D_x^2}{D^2} + \frac{D_y^2}{D^2} = \frac{2D(D_x - D_y)}{D^2}.$$

Δηλαδή,

$$2 + \left(\frac{D_x}{D}\right)^2 + \left(\frac{D_y}{D}\right)^2 = 2\frac{D_x}{D} - 2\frac{D_y}{D}$$

$$\Leftrightarrow 2 + x^2 + y^2 = 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{και} \quad y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{και} \quad y = -1.$$

16. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y - \omega = 3 \\ 2x + 3y + 4\omega = 0 \\ 3x - y + 5\omega = 1. \end{cases}$$

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$x = 3 - 2y + \omega \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στις άλλες δύο εξισώσεις προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} 2(3 - 2y + \omega) + 3y + 4\omega = 0 \\ 3(3 - 2y + \omega) - y + 5\omega = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y + 2\omega + 3y + 4\omega = 0 \\ 9 - 6y + 3\omega - y + 5\omega = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y + 6\omega = -6 \\ -7y + 8\omega = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6\omega + 6 \\ -7(6\omega + 6) + 8\omega = -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6\omega + 6 \\ -34\omega = 34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \omega = -1 \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1) βρίσκουμε

$$x = 3 - 2 \cdot 0 + (-1) = 2$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y, \omega) = (2, 0, -1).$$

Σημείωση

Πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους δηλαδή, για ένα γραμμικό σύστημα 3×3 . Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιούμε μεθόδους ανάλογες με εκείνες που χρησιμοποιούμε για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 . Στο συγκεκριμένο σύστημα επιλέγουμε τη μέθοδο της αντικατάστασης.

17. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x - 3y - \omega = 0 \\ \lambda x + 2y + \omega = 1 \\ (\lambda + 1)x + 4y + 2\omega = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση λύνοντας ως προς ω έχουμε

$$\omega = 2x - 3y.$$

Αντικαθιστώντας στις άλλες δύο εξισώσεις προκύπτει το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + 2y + (2x - 3y) = 1 \\ (\lambda + 1)x + 4y + 2(2x - 3y) = \lambda \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - y = 1 \\ (\lambda + 5)x - 2y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν

$$D = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ \lambda + 5 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda + 2) + (\lambda + 5) = -\lambda + 1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda = -\lambda,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ \lambda + 5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 2) - (\lambda + 5) = \lambda^2 + \lambda - 5$$

Επομένως:

- Αν $\lambda \neq 1$, τότε $D \neq 0$ οπότε το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y, ω) με

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-\lambda}{-\lambda + 1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\lambda^2 + \lambda - 5}{-\lambda + 1}$$

και

$$\omega = 2x + 3y = \frac{-2\lambda}{-\lambda + 1} + \frac{3(\lambda^2 + \lambda - 5)}{-\lambda + 1} = \frac{3\lambda^2 + \lambda - 15}{-\lambda + 1}.$$

Σχόλιο

Λύνουμε την μία από τις τρεις εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο. Έτσι, η επίλυση του συστήματος ανάγεται στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 .

- Αν $\lambda = 1$, το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x - 3y - \omega = 0 \\ x + 2y + \omega = 1 \\ 2x + 4y + 2\omega = 1 \end{cases}$$

ισοδύναμα

$$\begin{cases} 2x - 3y - \omega = 0 \\ x + 2y + \omega = 1 \\ x + 2y + \omega = \frac{1}{2} \end{cases}$$

και όπως φαίνεται από τις δύο τελευταίες εξισώσεις του είναι αδύνατο.

- 18.** Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}$$

να διέρχεται από τα σημεία

$$A(1,2), \quad B(2,0) \quad \text{και} \quad \Gamma(4,2).$$

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία

$$A(1,2), \quad B(2,0) \quad \text{και} \quad \Gamma(4,2)$$

αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις:

- $f(1) = 2 \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 2 \quad (1)$

- $f(2) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad (2)$

- $f(4) = 2 \Leftrightarrow 16\alpha + 4\beta + \gamma = 2 \quad (3)$

Από την εξίσωση (1) έχουμε

$$\gamma = 2 - \alpha - \beta$$

και αντικαθιστώντας στις (2) και (3) προκύπτει το σύστημα

Σχόλιο

Έχουμε τρεις αγνώστους α, β και γ .

Επομένως, χρειαζόμαστε τρεις εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν από ισάριθμες πληροφορίες.

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta + 2 - \alpha - \beta = 0 \\ 16\alpha + 4\beta + 2 - \alpha - \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = -2 \\ 15\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = -2 \\ 5\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις, αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε

$$2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Επομένως, η εξίσωση $5\alpha + \beta = 0$ γίνεται

$$5 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -5.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση **(1)** έχουμε $1 - 5 + \gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 6$.

Τελικά

$$f(x) = x^2 - 5x + 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \frac{x+1}{4} = \frac{y+7}{3} \\ 3x + 2y = 1. \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \frac{x+3}{2} + \frac{y}{7} = 2 \\ \frac{x-1}{5} + \frac{y+2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \frac{x+11}{5} = 5 - \frac{y+4}{3} \\ \frac{1-x}{7} = y - 7. \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x + 5y = 10 \\ \frac{x}{5} + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 2x - y = 8 \\ x - 4 = \frac{y}{2}. \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \frac{x+4}{2} + \frac{y+2}{5} = 2 \\ \frac{x+2}{3} + \frac{y+1}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x - \frac{5}{2}y = 4 \\ 6(x-1) = 5(3y+1) \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{3} \\ x+4y=1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 2x-y=1 \\ x-1 = \frac{y-1}{2} \end{cases}$$

6. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x - (\sqrt{2}+1)y = -1 \\ \sqrt{2}x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 3 - \sqrt{5} \\ x + \sqrt{5}y = \sqrt{3} + 5. \end{cases}$$

7. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει η σχέση

$$(2x+y-5)^2 + |3x-2y-4| = 0.$$

8. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x+y+\omega=3 \\ 2x-y-2\omega=2 \\ 4x+2y+3\omega=6 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 4x-y+2\omega=-2 \\ 5x+2y+3\omega=0 \\ 3x-7y+2\omega=1. \end{cases}$$

9. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} x+y-\omega=1 \\ 2x-y+4\omega=0 \\ 5x+2y+\omega=2 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x-y+\omega=4 \\ 3x+y-5\omega=0 \\ x+y-3\omega=-2 \end{cases}$$

10. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + y = 5 \\ x + \omega = 7 \\ y + \omega = 8 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 11x + 13y + 17\omega = 23 \\ 19x + 17y + 13\omega = 29 \\ 30x + 30y + 30\omega = 51 \end{cases}$$

11. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{5} = \frac{\omega}{8} \\ 2x + y - \omega = 30. \end{cases}$$

12. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{\omega-3}{4} \\ x + y + \omega = 15. \end{cases}$$

13. Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x^2 - 4 & x - 2 \\ (1-x)^2 & 1-x \end{vmatrix} = 0.$$

14. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \lambda x + 2y = 3 \\ 5x + y = \lambda \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ \lambda x + y = \lambda^2. \end{cases}$$

15. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda^3, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} \mu x - y = 1 \\ x + (\mu + 1)y = -\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

16. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων:

$$\text{i)} \begin{cases} 752x + 481y = 100 \\ 2503x + 9657y = 200 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} 17x + 19y = 11 \\ 23x + 13\sqrt{2}y = 29 \end{cases}$$

17. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = y, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - \lambda^2 y = \lambda^2 + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

18. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} (\lambda - 1)x + 4y = 1 \\ (\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} x + (2 - \mu)y = 0 \\ \mu x + (\lambda^2 + 1)y = 1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

19. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - \omega = 0 \\ (\lambda - 1)x + 2y + \omega = 3 \\ 2x + 4y + 2\omega = 5 \end{cases} \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

20. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x - \alpha y = \alpha \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \alpha x + y = 1 \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του α οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο.
- ii) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) αν είναι γνωστό ότι η τετμημένη του είναι ίση με 1.

21. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : (\alpha + 2)x + (\alpha - 4)y = 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : x + (\alpha - 2)y = \alpha.$$

- i) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο ευθειών.
- ii) Αν οι δύο ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο να αποδείξετε ότι το σημείο αυτό δεν μπορεί να ανήκει στην ευθεία $y = x$.

22. Δίνονται οι ευθείες

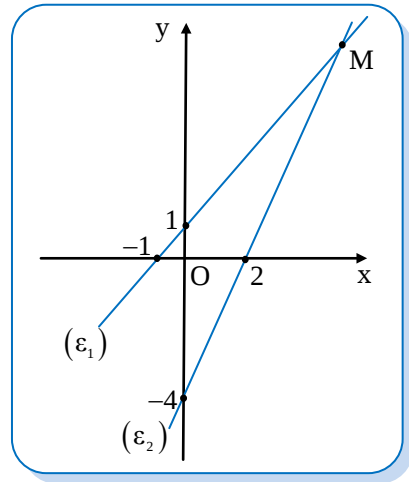
$$\varepsilon_1 : x + 3y = \alpha \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \alpha x + 12y = \beta.$$

- i) Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .
- ii) Για ποιες τιμές των παραμέτρων α, β οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) συμπίπτουν;

23. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο ευθείες (ε_1) και (ε_2) .

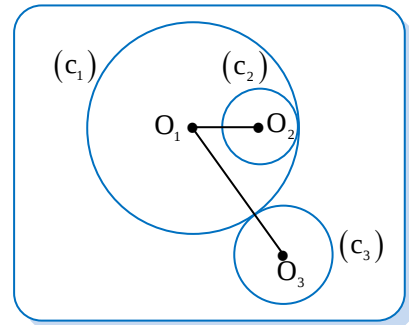
Να βρείτε:

- τις εξισώσεις των δύο ευθειών
- το σημείο τομής των δύο ευθειών.



24. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τρεις κύκλοι $(c_1), (c_2), (c_3)$ με κέντρα O_1, O_2, O_3 και ακτίνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 αντίστοιχα. Οι κύκλοι $(c_1), (c_2)$ εφάπτονται εσωτερικά και οι κύκλοι $(c_1), (c_3)$ εφάπτονται εξωτερικά, έτσι ώστε:

- $(O_1O_2) = 3$
- $(O_1O_3) = 8$
- Το μήκος του (c_1) είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των (c_2) και (c_3) .



Να βρείτε τις ακτίνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 των τριών κύκλων.

25. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = 2 \\ 2x + (\lambda - 3)y = \lambda \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις.

26. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = \lambda \\ x + (\lambda - 3)y = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
- Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα i) να λύσετε το σύστημα.

27. Να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} x - \alpha y = 1 \\ 2x + (1 - \beta)y = 2\alpha \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις.

28. Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \lambda x + \mu y = 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x - \mu y = \lambda \\ x + (\lambda - 4)y = \mu \end{cases} \quad \text{με} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές των λ, μ για τις οποίες το πρώτο από τα παραπάνω συστήματα έχει άπειρες λύσεις και συγχρόνως το δεύτερο σύστημα είναι αδύνατο.

29. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ και λ για τους οποίους τα συστήματα

$$\begin{cases} (\kappa - 1)x - \lambda y = 3 \\ \kappa x + y = 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 2x + 6y = 1 \\ -x + \kappa y = 3, \end{cases}$$

είναι συγχρόνως αδύνατα.

30. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = 0 \\ 3x + (\lambda - 5)y = 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου λ .
 ii) Αν το ζεύγος (x_1, y_1) με $x_1 \neq y_1$ είναι λύση του παραπάνω συστήματος, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ .

31. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda^2 - 2\lambda \\ x + \lambda y = 2\lambda^2 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 ii) το σημείο $M(x, y)$ ανήκει σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

32. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α έτσι, ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = 8 - \alpha \\ 4x + (\lambda - 4)y = 2\alpha \end{cases}$$

να έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

33. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} x + y = \gamma^2 \\ \beta x + y = 2\gamma - \alpha \end{cases} \quad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του α έτσι, ώστε για κάθε β να υπάρχει ένα τουλάχιστον γ για το οποίο το παραπάνω σύστημα έχει μία τουλάχιστον λύση.

34. Δίνεται η παραβολή

$$y = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες -2 και 1 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 4 .

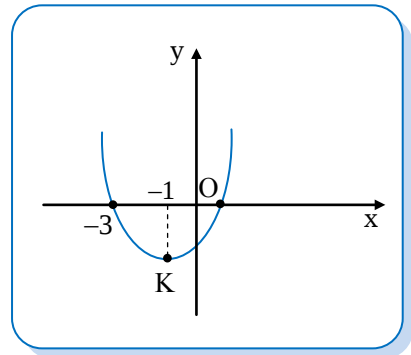
Να βρείτε:

- i) τις τιμές των α , β και γ
- ii) την κορυφή της παραβολής.

35. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια παραβολή με κορυφή το K , η οποία είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\beta = 2\alpha > 0$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii) Αν $K(-1, -2)$, να βρείτε τις τιμές των α , β και γ .



36. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = 2 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

και δύο λύσεις του (x_1, y_1) , (x_2, y_2) οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

- i) Να βρείτε την τιμή του λ .
- ii) Να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2$.

37. Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y το οποίο έχει μοναδική λύση και για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$D_x + D_y = 4D \quad \text{και} \quad 2D_x + 3D_y = 5D.$$

Να υπολογίσετε τους x και y .

38. Έστω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις:

$$D_x^2 + 4D_y^2 = 4D_x D_y \quad \text{και} \quad D \neq 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $x = 2y$.
 ii) Αν ισχύει επίσης

$$D_x + D_y = 12D,$$

να βρείτε τους x και y .

39. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y έχει μοναδική λύση. Αν ισχύει η σχέση

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 = 2D \cdot D_x,$$

να βρείτε τους x και y .

40. Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους x και y για το οποίο ισχύει η σχέση

$$D_x^2 + D_y^2 + 13D^2 \leq 2D(2D_x - 3D_y).$$

Αν οι ορίζουσες D_x, D_y δεν είναι και οι δύο μηδέν, να αποδείξετε ότι:

- i) το σύστημα έχει μοναδική λύση
 ii) $x = 2$ και $y = -3$.

41. Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x και y για το οποίο ισχύει η σχέση

$$D_x^2 + D_y^2 + D^2 \leq 2(D_y + D - 1).$$

- i) Να βρείτε τις ορίζουσες D_x, D_y και D .
 ii) Να λύσετε το σύστημα.

Μη Γραμμικά Συστήματα

- Όταν οι εξισώσεις ενός συστήματος δεν είναι όλες γραμμικές, τότε λέμε ότι έχουμε ένα **μη γραμμικό σύστημα**. Για την επίλυση ενός τέτοιου συστήματος συνήθως επιλύουμε την πιο απλή από τις εξισώσεις, ως προς έναν άγνωστο και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στις άλλες εξισώσεις.

Παράδειγμα

Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y^2 - 3x = 4. \end{cases}$$

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$x = 1 - 2y \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$y^2 - 3(1 - 2y) = 4 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ή } y = -7.$$

Οπότε από την εξίσωση (1) έχουμε

- για $y = 1$, $x = 1 - 2 \cdot 1 = -1$
- για $y = -7$, $x = 1 - 2 \cdot (-7) = 15$.

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις

$$(x, y) = (-1, 1) \text{ ή } (x, y) = (15, -7).$$

Παράδειγμα

Το σύστημα

$$\begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 - x^2 = -3 \end{cases}$$

είναι αδύνατο, αφού αν αντικαταστήσουμε το x στη δεύτερη εξίσωση, προκύπτει η εξίσωση

$$5y^2 - 4y^2 = -3 \Leftrightarrow y^2 = -3,$$

που είναι αδύνατη

Λυμένες Ασκήσεις

19. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ xy + 3 = 0. \end{cases}$$

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$x = y + 4 \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$(y + 4)y + 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 3 = 0.$$

Είναι

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$$

Επομένως

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

Δηλαδή

$$y = -3 \quad \text{ή} \quad y = -1.$$

Οπότε, από την (1) έχουμε

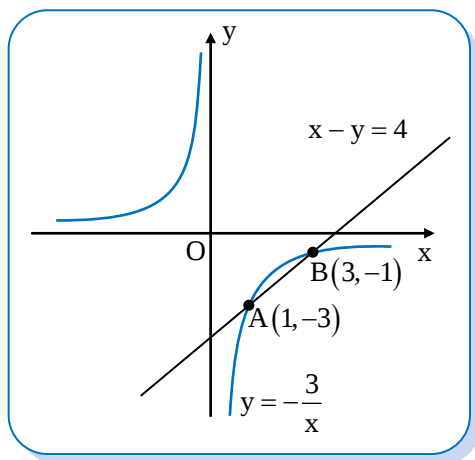
- για $y = -3$, $x = -3 + 4 = 1$
- για $y = -1$, $x = -1 + 4 = 3$.

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις

$$(x, y) = (1, -3) \quad \text{ή} \quad (x, y) = (3, -1).$$

Μεθοδολογία

Επιλύουμε την πιο απλή από τις εξισώσεις, ως προς έναν άγνωστο, π.χ. ως προς x και στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση.



Σχόλιο

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος $x - y = 4$ παριστάνει ευθεία, ενώ η δεύτερη $xy + 3 = 0$ παριστάνει την υπερβολή

$$y = -\frac{3}{x}.$$

Επομένως, οι δύο λύσεις $(1, -3)$ και $(3, -1)$ του συστήματος αντιπροσωπεύουν τις συντεταγμένες των κοινών σημείων A και B της ευθείας και της υπερβολής.

20. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}.$$

Λύση

Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε

$$y = \frac{3}{x}.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση, αυτή γίνεται

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{9}{x^2} &= 10 \\ \Leftrightarrow x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot \frac{9}{x^2} &= 10x^2 \\ \Leftrightarrow x^4 - 10x^2 + 9 &= 0. \end{aligned}$$

Θέτουμε $x^2 = \omega$ και συνεπώς η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} \omega^2 - 10\omega + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega &= 9. \end{aligned}$$

Δηλαδή

- $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

και

$$y = \frac{3}{\pm 1} = \pm 3 \text{ αντίστοιχα}$$

ή

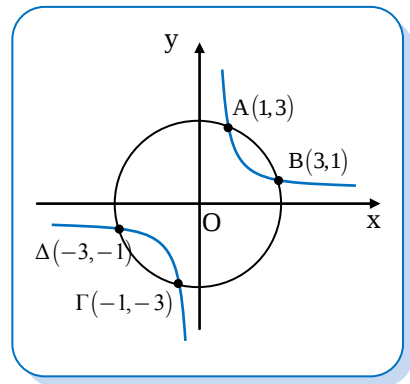
- $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

και

$$y = \frac{3}{\pm 3} = \pm 1 \text{ αντίστοιχα.}$$

Άρα, το σύστημα έχει 4 λύσεις

$$(x, y) = (1, 3) \text{ ή } (-1, -3) \text{ ή } (3, 1) \text{ ή } (-3, -1).$$



Σχόλιο

- Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 10$ παριστάνει κύκλο, ενώ η εξίσωση

$$xy = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{x}$$

παριστάνει υπερβολή.

Επομένως:

- Η επίλυση του συστήματος ερμηνευόμενη σε γλώσσα Γεωμετρίας σημαίνει την εύρεση των συντεταγμένων των κοινών σημείων του κύκλου

$$x^2 + y^2 = 10$$

και της υπερβολής

$$y = \frac{3}{x}.$$

- 21.** Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = 4x - \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ και η παραβολή $c : y = x^2$.
- i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία.
- ii) Για $\kappa = 3$ να βρείτε τα κοινά σημεία των (ε) και (c).

Λύση

- i) Η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (c) σε δύο σημεία αν και μόνο αν το σύστημα των εξισώσεών τους

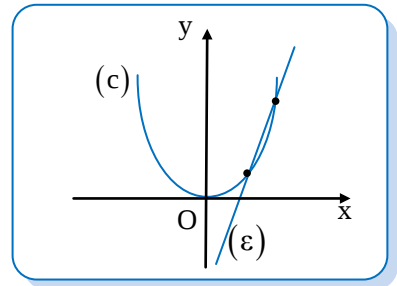
$$\begin{cases} y = 4x - \kappa \\ y = x^2 \end{cases}$$

έχει δύο ζεύγη λύσεων. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος, λόγω της πρώτης, γίνεται

$$4x - \kappa = x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + \kappa = 0.$$

Είναι φανερό ότι το σύστημα έχει δύο λύσεις, ακριβώς τότε όταν η τελευταία εξίσωση έχει δύο λύσεις. Δηλαδή, όταν ισχύει

$$\begin{aligned} \Delta &> 0 \\ \Leftrightarrow (-4)^2 - 4\kappa &> 0 \\ \Leftrightarrow 4\kappa &< 16 \\ \Leftrightarrow \kappa &< 4. \end{aligned}$$



Σχόλιο

Το πρόβλημα είναι διατυπωμένο σε γεωμετρική γλώσσα. Το μεταφράζουμε λοιπόν στη γλώσσα της Άλγεβρας και το λύνουμε με καθαρά Αλγεβρικές μεθόδους.

- ii) Για $\kappa = 3$ το σύστημα του ερωτήματος i) γίνεται

$$\begin{cases} y = 4x - 3 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Η δεύτερη εξίσωση, λόγω της πρώτης, γράφεται

$$4x - 3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3.$$

- Για $x = 1$ είναι $y = 4 - 3 = 1$.
- Για $x = 3$ είναι $y = 4 \cdot 3 - 3 = 9$.

Άρα $(x, y) = (1, 1)$ ή $(x, y) = (3, 9)$. Δηλαδή, τα κοινά σημεία των (ε) και (c) είναι $A(1, 1)$ και $B(3, 9)$.

22. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} y = x + \kappa \\ x^2 + y^2 = 2, \quad \kappa \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- i) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων του συστήματος για τις διάφορες τιμές του κ .
- ii) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τα αποτελέσματα του ερωτήματος i).

Λύση

- i) Η δεύτερη εξίσωση, λόγω της πρώτης, γίνεται

$$\begin{aligned} x^2 + (x + \kappa)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2\kappa x + \kappa^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2\kappa x + \kappa^2 - 2 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \Delta &= (2\kappa)^2 - 4 \cdot 2(\kappa^2 - 2) \\ &= 4\kappa^2 - 8(\kappa^2 - 2) \\ &= -4\kappa^2 + 16 \\ &= -4(\kappa^2 - 4) \\ &= -4(\kappa - 2)(\kappa + 2). \end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$, δηλαδή αν $\kappa \in (-2, 2)$, η εξίσωση (1) και συνεπώς το αρχικό σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν $\kappa = -2$ ή $\kappa = 2$, η εξίσωση (1) και συνεπώς το αρχικό σύστημα έχει μία λύση.
- Αν $\Delta < 0$, δηλαδή αν $\kappa \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, η εξίσωση (1) και συνεπώς το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

ii) Παρατηρούμε, ότι η πρώτη εξίσωση του συστήματος, δηλαδή η εξίσωση

$$y = x + \kappa$$

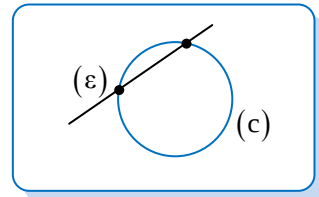
είναι εξίσωση ευθείας (ε) ενώ η δεύτερη εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 2$$

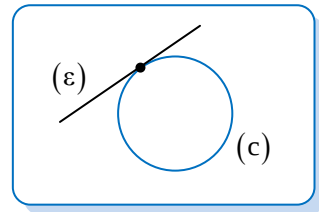
είναι εξίσωση κύκλου (ς). Επομένως, το πλήθος των λύσεων του συστήματος συμπίπτει με το πλήθος των κοινών σημείων της ευθείας (ε) και του κύκλου (ς). Δηλαδή:

..

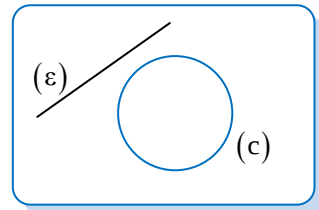
- Αν $\kappa \in (-2, 2)$, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία (σημεία τομής) με τον κύκλο (ς).



- Αν $\kappa = -2$ ή $\kappa = 2$, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής) με τον κύκλο (ς).



- Αν $\kappa \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, η ευθεία (ε) δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο (ς).



23. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa \in \mathbb{N}^*$, έτσι ώστε η ευθεία $\varepsilon : y = 8x - \kappa$ να τέμνει την παραβολή $\varsigma : y = 4x^2$ σε δύο σημεία.

Λύση

Η ευθεία (ε) τέμνει την παραβολή (ς) σε δύο σημεία αν και μόνο αν το σύστημα των εξισώσεών τους

$$\begin{cases} y = 8x - \kappa \\ y = 4x^2 \end{cases}$$

έχει δύο ζεύγη λύσεων. Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος αυτού, λόγω της πρώτης εξίσωσης, γίνεται

$$8x - \kappa = 4x^2$$

ή ισοδύναμα

$$4x^2 - 8x + \kappa = 0.$$

Οπότε, το παραπάνω σύστημα έχει δύο λύσεις αν και μόνο αν η τελευταία εξίσωση έχει δύο λύσεις. Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (-8)^2 - 4 \cdot 4\kappa > 0$$

$$\Leftrightarrow 64 - 16\kappa > 0$$

$$\Leftrightarrow 16\kappa < 64$$

$$\Leftrightarrow \kappa < 4.$$

Και επειδή $\kappa \in \mathbb{N}^*$, συμπεραίνουμε ότι

$$\kappa = 1 \text{ ή } \kappa = 2 \text{ ή } \kappa = 3.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

42. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x - y = 1 \\ |x| + y = 3 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ |x + y| = 1 \end{cases}$

43. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} -2x + y = 4 \\ 2x^2 = y \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3. \end{cases}$

44. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^2 = 6y + 1 \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$

45. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x + y = 5 \\ y = \frac{4}{x} \end{cases}$$

46. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x + y = 4 \\ xy + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 - y^2 = 21 \end{cases}$$

47. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{3}{x} + y = 0 \\ x + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

48. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{2} \\ xy = 4 \end{cases}$$

49. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - \frac{x}{y} = 1 \\ x + y - \frac{y}{x} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

50. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$$

51. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} xy = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.

52. Δίνεται η παραβολή

$$y = x^2$$

και η ευθεία

$$y = 2x + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία.
- ii) Για $\kappa = 3$, να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την παραβολή.

53. Δίνεται η ευθεία

$$y = 3x + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

και ο κύκλος

$$x^2 + y^2 = 10.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο.
- ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του κ που βρήκατε στο ερώτημα i) να βρείτε το σημείο επαφής της ευθείας με τον κύκλο.

54. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x^2 + y^2 - 2z = 0. \end{cases}$$

55. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ \omega - y = 1 \\ x^3 + (y - 1)^3 + (\omega - 2)^3 = 3. \end{cases}$$

56. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + \omega = 3 \\ x + 2y - \omega = 2 \\ x + y\omega + x\omega = 3. \end{cases}$$

57. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

και η ευθεία

$$\varepsilon: y = -x + \kappa,$$

η οποία έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο A με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

- i) Να υπολογίσετε την τιμή του κ .
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε) με εξαίρεση το σημείο A .

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y ;
2. Να αποδείξετε ότι κάθε γραμμική εξίσωση $ax + by = \gamma$ με $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει στο επίπεδο ευθεία γραμμή.
3. Τι ονομάζουμε γραμμικό σύστημα 2×2 ;
4. Πότε δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα;
5. Ποιες είναι οι δύο κλασσικές μέθοδοι επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος;
6. Τι αναμένουμε, ως προς το πλήθος των λύσεων, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2×2 ;
7. Τι ονομάζουμε ορίζουσα του συστήματος

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

8. Τι συμπέρασμα προκύπτει για ένα γραμμικό σύστημα 2×2 , αν αυτό έχει ορίζουσα $D \neq 0$ και τι αν $D = 0$;
9. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους x, y, z ;
10. Πότε λέμε ότι ένα σύστημα εξισώσεων είναι μη γραμμικό;

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Κάθε εξίσωση της μορφής
$$ax + by = \gamma \text{ με } a \neq 0 \text{ ή } b \neq 0$$
λέγεται γραμμική εξίσωση Σ Λ
2. Κάθε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους x, y παριστάνει ευθεία γραμμή. Σ Λ
3. Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει κάποια από τις δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 λέγεται λύση του συστήματος Σ Λ
4. Υπάρχει γραμμικό σύστημα 2×2 το οποίο έχει ακριβώς δύο λύσεις. Σ Λ
5. Τα γραμμικά συστήματα 3×3 λύνονται μόνο με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Σ Λ
6. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει ορίζουσα $D \neq 0$, τότε έχει μοναδική λύση. Σ Λ
7. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει ορίζουσα $D = 0$, τότε είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Σ Λ
8. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει μοναδική λύση, τότε έχει ορίζουσα $D \neq 0$. Σ Λ
9. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 είναι αδύνατο, τότε έχει ορίζουσα $D = 0$. Σ Λ

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

- A1.** Τι ονομάζουμε λύση ενός συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ;
- A2.** Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με τρεις αγνώστους x, y, z ;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Κάθε ζεύγος αριθμών που επαληθεύει μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 λέγεται λύση του συστήματος.
- β)** Οι δύο εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος 2×2 παριστάνουν δύο ευθείες οι οποίες μπορεί να τέμνονται ή να είναι παράλληλες ή να συμπίπτουν.
- γ)** Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει ορίζουσα $D \neq 0$, τότε αυτό είναι αδύνατο.
- δ)** Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει άπειρες λύσεις, τότε ισχύει $D = 0$.
- ε)** Ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Θέμα Β

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - 2y = \lambda \\ x + (\lambda - 3)y = 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- B1.** Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) , να αποδείξετε ότι $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$.
- B2.** Να λύσετε το σύστημα όταν:
- α)** $\lambda = 1$
- β)** $\lambda = 2$
- B3.** Αν (x, y) είναι μοναδική λύση του συστήματος τέτοια, ώστε $x + y = 0$, να βρείτε την τιμή του λ και τη λύση του συστήματος.

Θέμα Γ

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : \alpha x + y = \alpha \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : 4x + 2y = \alpha - 1 \quad \text{με} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Αν οι ευθείες δεν τέμνονται σε ένα σημείο, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = 2$

β) οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

Γ2. Αν οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και $\varepsilon_3 : x + 2y = 3$ διέρχονται από το ίδιο σημείο και ο αριθμός α είναι ακέραιος, να βρείτε το σημείο τομής A των ευθειών (ε_1) και (ε_2) .

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 3x + \kappa, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

και η ευθεία

$$\varepsilon : y = x - 3\kappa,$$

η οποία έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο A με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του κ .

Δ2. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

Δ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

- A1.** Τι ονομάζουμε 3×3 γραμμικό σύστημα;
A2. Τι ονομάζουμε ορίζουσα του συστήματος

$$\begin{cases} ax + by = \gamma \\ a'x + b'y = \gamma' \end{cases}$$

με αγνώστους x, y ;

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Ένα 2×2 γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει ακριβώς δύο λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους.
- β)** Ένα 2×2 γραμμικό σύστημα είναι αδύνατο αν και μόνο αν $D = 0$.
- γ)** Ένα 2×2 γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $D \neq 0$.
- δ)** Ένα 3×3 γραμμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.
- ε)** Ένα μη γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους δεν μπορεί να έχει μοναδική λύση.

Θέμα Β

Έστω ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους x, y τέτοιο, ώστε

$$D_x^2 + 9D_y^2 \leq 6D_x D_y.$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι

$$D_x = 3D_y$$

- B2.** Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$D_x D_y = D^2 - 1,$$

τότε:

- α)** να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση
β) για $D = 2$, να βρείτε τη λύση του συστήματος.

Θέμα Γ

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda^2 x^2 - \lambda y = 2 \\ (2\lambda + 1)x + (\lambda + 1)y = \lambda^2 - 6, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Αν $(x, y) = (1, -1)$ είναι μία λύση του συστήματος, τότε:

- Γ1.** να βρείτε την τιμή του λ
- Γ2.** να λύσετε το σύστημα
- Γ3.** να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : x + \lambda y = \lambda + 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2 : \lambda x + 4y = 2\lambda$$

είναι παράλληλες μεταξύ τους.

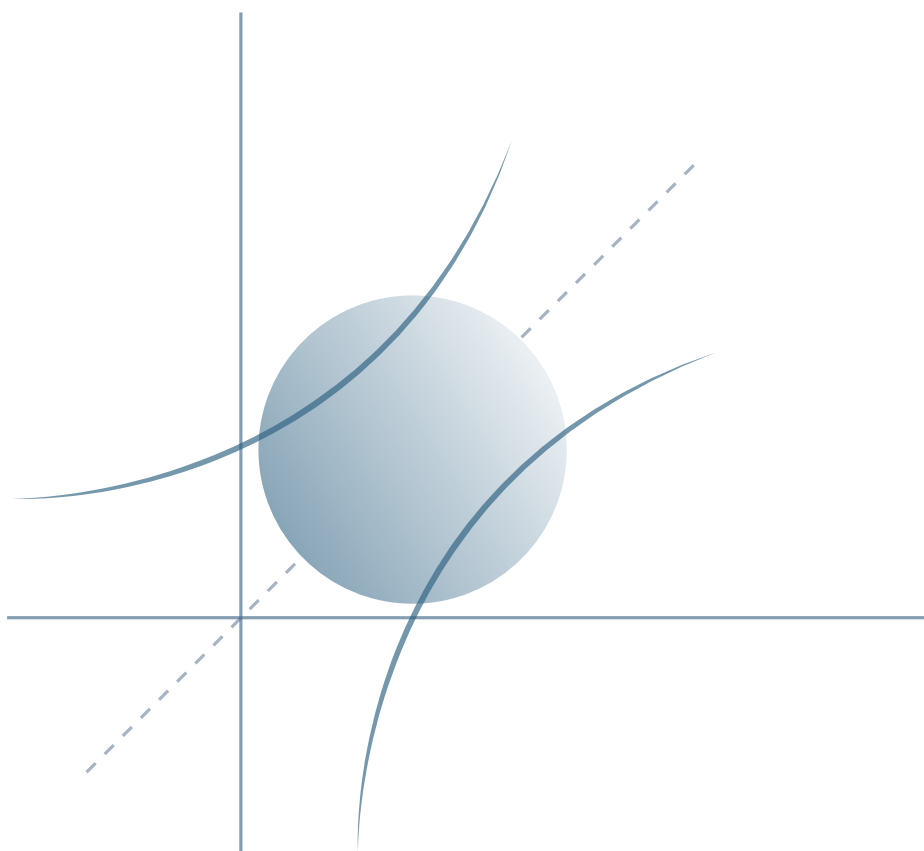
Θέμα Δ

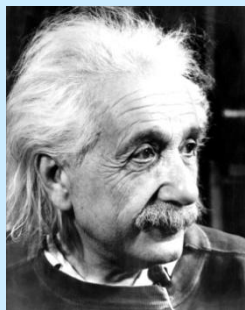
Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} (\kappa + 1)x + (\lambda + 2)y = 2\kappa \\ 2\kappa x + (\kappa + 3)y = \lambda \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} (\lambda - 2)x - \lambda y = \kappa + 5 \\ (2\kappa + 1)x + (\lambda + 1)y = 3\kappa, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Δ1.** Αν D και D' είναι οι ορίζουσες των παραπάνω συστημάτων, να υπολογίσετε το άθροισμα $D + D'$.
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.
- Δ3.** Αν $\kappa = 1$ και το πρώτο σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων, τότε:
 - α)** να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$
 - β)** να λύσετε τα παραπάνω συστήματα.

Ιδιότητες Συναρτήσεων





*«Τα καθαρά Μαθηματικά είναι
κατά κάποιον τρόπο
η ποίηση των λογικών ιδεών.»*

Albert Einstein

Albert Einstein

(1879-1955)

Ο Albert Einstein ένας από τους μεγαλύτερους φυσικούς όλων των εποχών, αν όχι ο μεγαλύτερος, γεννήθηκε στην πόλη Ούλμ (Ulm) της Γερμανίας στις 14/3/1879 και πέθανε στο Πρίνστον (Princeton) του Νιού Τζέρσεϊ στις 18/4/1955.

Ο Einstein ανέπτυξε την περίφημη «Θεωρία της σχετικότητας» σύμφωνα με την οποία ο χρόνος, το μήκος και η μάζα δεν είναι απόλυτα μεγέθη, αλλά μεταβάλλονται ανάλογα με την ταχύτητα.

Ο διάσημος τύπος $E = mc^2$ που απέδειξε δηλώνει την ισοδυναμία μάζας και ενέργειας. Με βάση τις εργασίες του Gauss και του Riemann υποστήριξε ότι υπάρχει ένα σύμπαν με τέσσερις διαστάσεις: μήκος, πλάτος, ύψος και χρόνος.

Μονοτονία Συνάρτησης

Ορισμός

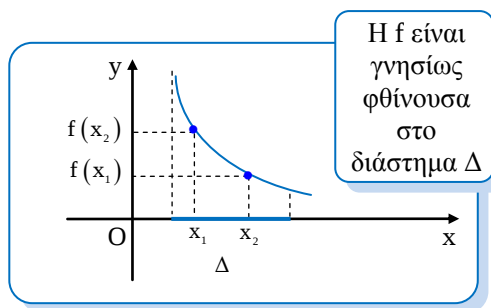
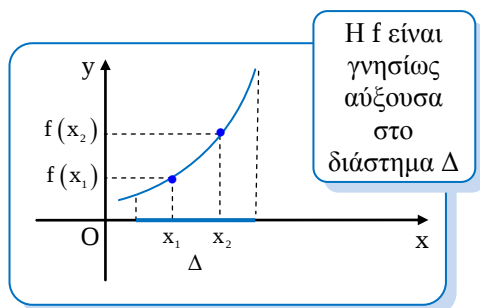
Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι:

- **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2).$$

- **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2).$$



- Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε, καθώς το x αυξάνεται, η γραφική της παράσταση **ανέρχεται** στο διάστημα αυτό.
- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ τότε, καθώς το x αυξάνεται, η γραφική της παράσταση **κατέρχεται** στο διάστημα αυτό.
- Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.
- Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$.
- Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι **γνησίως μονότονη** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- Αν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα διάστημα Δ και η f είναι γνησίως μονότονη σ' αυτό, τότε θα λέμε απλά, ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Παράδειγμα

- Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $x_1^3 < x_2^3$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, αφού για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$.

Ακρότατα Συνάρτησης

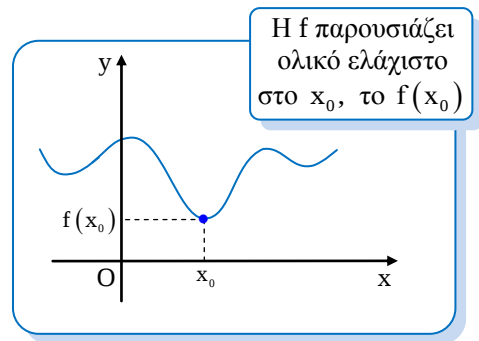
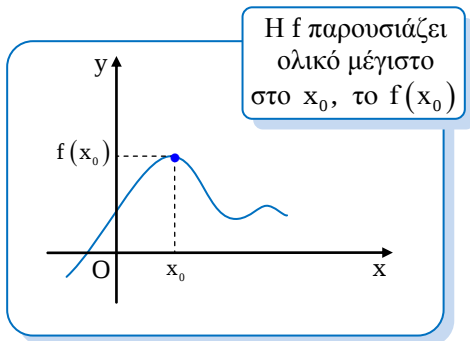
Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) μέγιστο** το $f(x_0)$ αν και μόνο αν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **(ολικό) ελάχιστο** το $f(x_0)$ αν και μόνο αν

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$



- Αν το $f(x_0)$ είναι μέγιστο μιας συνάρτησης f τότε, το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι το **ψηλότερο** σημείο της γραφικής της παράστασης.
- Αν το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο μιας συνάρτησης f τότε, το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι το **χαμηλότερο** σημείο της γραφικής της παράστασης.
- Υπάρχουν συναρτήσεις που παρουσιάζουν μόνο μέγιστο, άλλες μόνο ελάχιστο, άλλες μέγιστο και ελάχιστο και άλλες ούτε μέγιστο, ούτε ελάχιστο.

- Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται **ολικά ακρότατα** της f .

Παράδειγμα

- Η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$.
Πράγματι,

$$f(x) = 1 - x^2 \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1.$$

Δηλαδή,

$$f(x) \leq f(0) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Η συνάρτηση $f(x) = |x| + 4$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 4$.
Πράγματι,

$$f(x) = |x| + 4 \geq 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 4.$$

Δηλαδή,

$$f(x) \geq f(0) = 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συμμετρίες Συνάρτησης

Άρτια και Περιττή Συνάρτηση

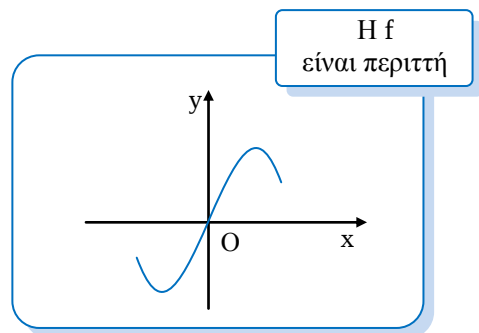
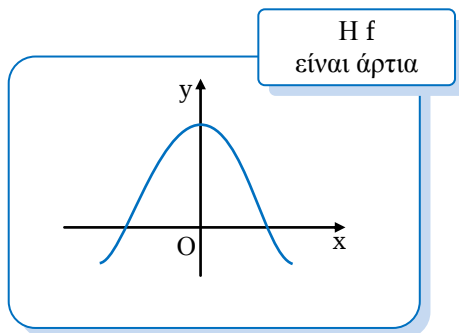
Ορισμός

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται **περιττή** αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$



- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον **άξονα $y'y$** .
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την **αρχή των αξόνων**.

Παράδειγμα

- Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$ και για κάθε $x \in [-3, 3]$ ισχύει

$$-x \in [-3, 3] \quad \text{και} \quad f(-x) = \sqrt{9-(-x)^2} = \sqrt{9-x^2} = f(x)$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^5}$ είναι περιττή συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$-x \in \mathbb{R}^* \quad \text{και} \quad f(-x) = \frac{1}{(-x)^5} = -\frac{1}{x^5} = -f(x)$$

- Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[1, +\infty)$ και $2 \in [1, +\infty)$, ενώ $-2 \notin [1, +\infty)$.

- Η συνάρτηση $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ είναι η μοναδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι και άρτια και περιττή. Πράγματι, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$f(-x) = f(x) \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Παράδειγμα

- Οι άρτιες συναρτήσεις δεν είναι γνησίως μονότονες. Πράγματι, για κάθε x του πεδίου ορισμού με $x \neq 0$ ισχύει

$$-x < x \quad \text{ή} \quad -x > x.$$

Όμως,

$$f(-x) = f(x).$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + 4x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2$$

έχουμε

$$x_1^3 < x_2^3$$

και

$$4x_1 < 4x_2.$$

Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$x_1^3 + 4x_1 < x_2^3 + 4x_2$$

και συνεπώς

$$x_1^3 + 4x_1 - 1 < x_2^3 + 4x_2 - 1.$$

Δηλαδή,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2$$

ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2).$$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x} - 4x, \quad x \in (0, +\infty)$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Λύση

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2$$

έχουμε

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

και

$$-4x_1 > -4x_2.$$

Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\frac{1}{x_1} - 4x_1 > \frac{1}{x_2} - 4x_2$$

δηλαδή

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Σημείωση

Μία συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με

$$x_1 < x_2$$

ισχύει

$$f(x_1) > f(x_2).$$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + 3|x| + 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 3|x| + 5 \\ &= \begin{cases} x + 3x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \\ x - 3x + 5, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4x + 5, & \text{αν } x \geq 0 \\ -2x + 5, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Σχόλιο

Αρχικά απαλλαγόμαστε από το σύμβολο της απόλυτης τιμής, χρησιμοποιώντας τον αλγεβρικό ορισμό της.

Έχουμε λοιπόν:

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$-2x_1 > -2x_2$$

και συνεπώς

$$-2x_1 + 5 > -2x_2 + 5$$

δηλαδή,

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$4x_1 < 4x_2$$

και συνεπώς

$$4x_1 + 5 < 4x_2 + 5$$

δηλαδή,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

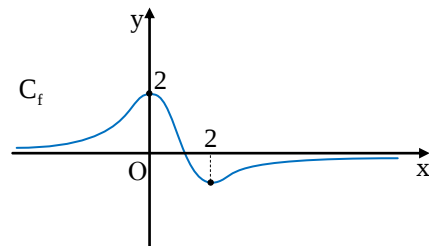
Σημείωση

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Σημείωση

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- 4.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι:
- γνησίως αύξουσα
 - γνησίως φθίνουσα.



Λύση

- i) Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το x η γραφική παράσταση της f ανέρχεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Σημείωση

Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f **ανέρχεται** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αυτό σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ .

- ii) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα $[0, 2]$ καθώς αυξάνεται το x η γραφική παράσταση της f κατέρχεται. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

Σημείωση

Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f **κατέρχεται** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αυτό σημαίνει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ .

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x\sqrt{x-1}, \quad x \geq 1.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$x^3\sqrt{x^3-1} > 8\sqrt{7}.$$

Λύση

- i) Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$ και συνεπώς

$$0 \leq \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1}.$$

Επομένως,

$$x_1\sqrt{x_1 - 1} < x_2\sqrt{x_2 - 1}$$

δηλαδή

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται

$$x^3\sqrt{x^3-1} > 8\sqrt{8-1}.$$

Δηλαδή,

$$f(x^3) > f(8)$$

Και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, ισοδύναμα παίρνουμε

$$x^3 > 8 \quad \text{και} \quad x^3 \geq 1$$

και τελικά

$$x > 2.$$

Σημείωση

Από τους ορισμούς της μονοτονίας προκύπτει άμεσα, με απαγωγή σε άτοπο, η εγκυρότητα των ισοδυναμιών:

- $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2$
αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
- $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2$
αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

6. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία

$$A(2, 7) \quad \text{και} \quad B(3, 5).$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(4x-1) < 5.$$

iii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x^2+2) \leq 7 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(2, 7)$ και $B(3, 5)$. Δηλαδή

$$f(2) = 7 \quad \text{και} \quad f(3) = 5.$$

Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε, επειδή $2 < 3$, θα πρέπει να ισχύει

$$f(2) < f(3)$$

δηλαδή $7 < 5$, που είναι αδύνατον. Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Και επειδή είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

ii) Η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} f(4x-1) &< f(3) \\ \Leftrightarrow 4x-1 &> 3, \quad \text{αφού } f \downarrow \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 4x &> 4 \\ \Leftrightarrow x &> 1. \end{aligned}$$

iii) Είναι έγκυρες οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} f(x^2+2) &\leq 7 \\ \Leftrightarrow f(x^2+2) &\leq f(2) \\ \Leftrightarrow x^2+2 &\geq 2, \quad \text{αφού } f \downarrow \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow x^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Σημειώσεις

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$.

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.

Και επειδή η τελευταία σχέση είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει με την ισοδύναμη προς αυτήν αρχική σχέση. Δηλαδή,

$$f(x^2+2) \leq 7 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

7. i) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα Δ .

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$x^5 + x^3 + x - 3 = 0.$$

Λύση

i) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες $x_1 < x_2$ στο διάστημα Δ . Δηλαδή,

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

Όμως, ανάλογα με το αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ έχουμε

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{ή} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Αυτό όμως είναι αδύνατον. Άρα, η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα Δ .

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^5 + x^3 + x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

και παρατηρούμε ότι

$$f(1) = 1^5 + 1^3 + 1 - 3 = 0.$$

Επίσης, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$x_1^3 < x_2^3 \quad \text{και} \quad x_1^5 < x_2^5.$$

Οπότε,

$$x_1^5 + x_1^3 + x_1 - 3 < x_2^5 + x_2^3 + x_2 - 3$$

δηλαδή

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, σύμφωνα με το ερώτημα i) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα. Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δηλαδή, η εξίσωση

$$x^5 + x^3 + x - 3 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

8. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε οι αριθμοί $f(1)$, $f(3)$ και $f(2)$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Λύση

Οι αριθμοί $f(1)$, $f(3)$ και $f(2)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$f(1) + f(2) = 2f(3)$$

δηλαδή

$$f(1) + f(2) = f(3) + f(3)$$

ή ισοδύναμα

$$f(1) - f(3) = f(3) - f(2) \quad (1)$$

- Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε ισχύουν

$$f(1) < f(3) \quad \text{και} \quad f(3) > f(2).$$

Οπότε,

$$f(1) - f(3) < 0 \quad \text{και} \quad f(3) - f(2) > 0$$

πράγμα άτοπο λόγω της σχέσης **(1)**. Επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Μεθοδολογία

Όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι **δεν** ισχύει κάτι, συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της **απαγωγής σε άτοπο** ή ένα **αντιπαράδειγμα**.

- Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύουν

$$f(1) > f(3) \quad \text{και} \quad f(3) < f(2).$$

Οπότε,

$$f(1) - f(3) > 0 \quad \text{και} \quad f(3) - f(2) < 0$$

πράγμα άτοπο λόγω της σχέσης **(1)**. Επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 8|x| + 21, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 4$.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

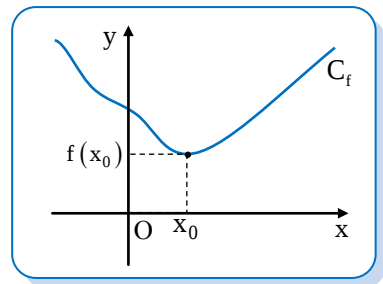
$$f(x) \geq f(4).$$

Δηλαδή,

$$x^2 - 8|x| + 21 \geq 4^2 - 8 \cdot 4 + 21$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8|x| + 21 \geq 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 8|x| + 16 \geq 0 \quad (1)$$



Όμως,

$$x^2 = |x|^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η ζητούμενη σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$|x|^2 - 8|x| + 16 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και τελικά

$$(|x| - 4)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

που ισχύει.

Σημείωση

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό ελάχιστο** αν και μόνο αν ισχύει

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$, τότε:

- i) να βρείτε την τιμή του a
- ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 2$.

Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$.

Δηλαδή,

$$f(2) = 1 \Leftrightarrow \frac{a \cdot 2}{2^2 + 4} = 1 \Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4.$$

- ii) Αντικαθιστώντας την τιμή του a που βρήκαμε στο ερώτημα i) έχουμε

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

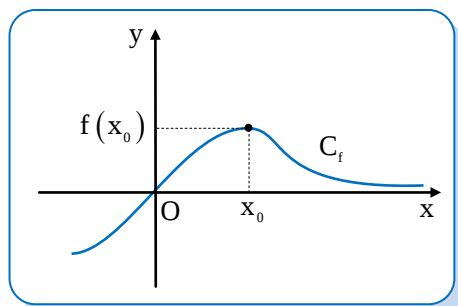
$$f(x) \leq f(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x}{x^2 + 4} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4x \leq x^2 + 4, \text{ αφού } x^2 + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$



Σημείωση

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ολικό μέγιστο** αν και μόνο αν ισχύει

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A.$$

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 + (x-1)^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) ο αριθμός 3 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

Λύση

- i) Έχουμε

$$x^4 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$(x-1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε,

$$x^4 + (x-1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς

$$x^4 + (x-1)^2 + 3 \geq 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή

$$f(x) \geq 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Η εξίσωση

$$f(x) = 3$$

γράφεται

$$x^4 + (x-1)^2 + 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^4 + (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ και } x - 1 = 0, \text{ αδύνατον.}$$

Άρα, ο αριθμός 3 δεν είναι τιμή της f και κατ' επέκταση δεν μπορεί να είναι ελάχιστη τιμή της f .

Σχόλιο

Η σχέση

$$f(x) \geq 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

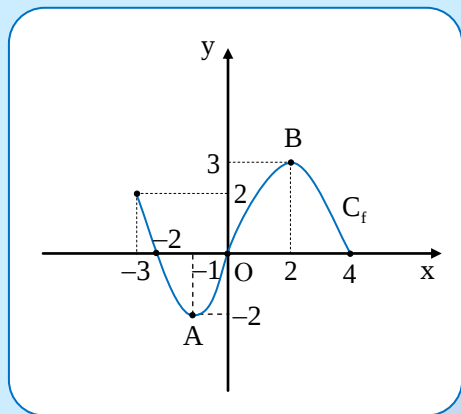
δεν μας εξασφαλίζει ότι το 3 είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . Εκτός και αν αποδείξουμε ότι το 3 είναι τιμή της f , κάτι που δεν ισχύει για τη συγκεκριμένη συνάρτηση.

12. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $A = [-3, 4]$.

i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι:

- α) γνησίως αύξουσα
- β) γνησίως φθίνουσα.

ii) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.



Λύση

- i) α) Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το x η γραφική παράσταση της f ανέρχεται στο διάστημα $[-1, 2]$. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 2]$.
- β) Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται το x η γραφική παράσταση της f κατέρχεται σε καθένα από τα διαστήματα $[-3, -1]$ και $[2, 4]$. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[-3, -1]$ και $[2, 4]$.

- ii) Είναι φανερό ότι το σημείο $A(-1, -2)$ είναι το χαμηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Άρα, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ το

$$f(-1) = -2.$$

Επίσης, το σημείο $B(2, 3)$ είναι το ψηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Επομένως, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 2$ το

$$f(2) = 3.$$

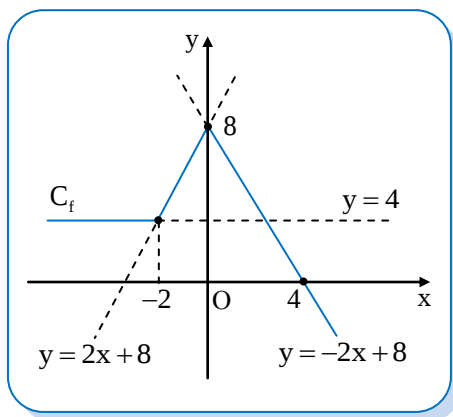
13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x \in (-\infty, -2) \\ 2x + 8, & x \in [-2, 0] \\ -2x + 8, & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

- i) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι:
 α) γνησίως αύξουσα β) γνησίως φθίνουσα
 γ) σταθερή.
 iii) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της ευθείας
 $y = 4$
 του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x < -2$, το τμήμα της ευθείας
 $y = 2x + 8$
 του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $-2 \leq x \leq 0$ και το τμήμα της ευθείας
 $y = -2x + 8$
 του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x > 0$.

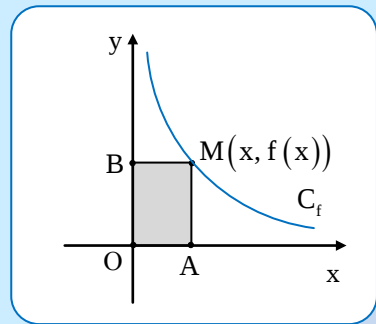


- ii) Παρατηρούμε ότι καθώς το x αυξάνεται:
- α) η γραφική παράσταση της f ανέρχεται στο διάστημα $[-2, 0]$. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, 0]$.
 - β) η γραφική παράσταση της f κατέρχεται στο διάστημα $[0, +\infty)$. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
 - γ) η τιμή της f είναι η ίδια (ίση με 4) για κάθε $x \in (-\infty, -2]$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα $(-\infty, -2]$.
- iii) Είναι φανερό ότι το σημείο με συντεταγμένες $(0, 8)$ είναι το ψηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Άρα, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = 8$. Επίσης, παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει το χαμηλότερο σημείο της γραφικής παράστασης της f . Επομένως, η συνάρτηση f δεν έχει ολικό ελάχιστο.

14. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$$

Από τυχαίο σημείο $M(x, f(x))$ της C_f άγουμε παράλληλες προς τους άξονες x' και y' και σχηματίζεται έτσι το ορθογώνιο $OAMB$. Να αποδείξετε ότι:



- i) η περίμετρος του ορθογωνίου δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = \frac{2(x^2 + 1)}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

- ii) η περίμετρος του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη για $x = 1$.

Λύση

- i) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi = (OA) + (AM) + (BM) + (OB) = 2(OA) + 2(OB).$$

Όμως

$$(OA) = x \text{ και } (OB) = f(x) = \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x > 0.$$

Επομένως, η περίμετρος δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Pi(x) = 2x + \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + 2}{x} = \frac{2(x^2 + 1)}{x} \text{ για κάθε } x > 0.$$

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} \Pi(x) &\geq \Pi(1) \Leftrightarrow \frac{2(x^2 + 1)}{x} \geq 4 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 + 1) \geq 4x \quad \text{αφού } x > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

που ισχύει.

- 15.** Δίνεται το σημείο $A(1,2)$ και μια μεταβλητή ευθεία (ε) , η οποία διέρχεται από το A και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $M(\kappa, 0)$ και $N(0, \lambda)$ αντίστοιχα, με $\kappa > 1$ και $\lambda > 2$.

i) Να αποδείξετε ότι

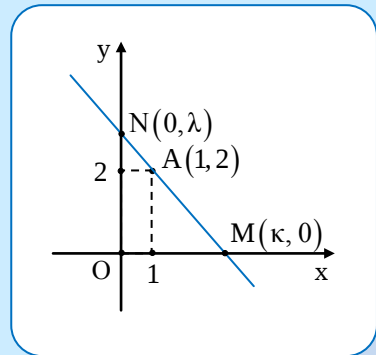
$$\lambda = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \text{ για κάθε } \kappa > 1.$$

ii) Να εκφράσετε το εμβαδό $E(\kappa)$ του τριγώνου OMN ως συνάρτηση της τετμημένης κ του σημείου M .

iii) Να αποδείξετε ότι

$$E(\kappa) \geq 4 \text{ για κάθε } \kappa > 1.$$

iv) Να βρείτε τη θέση του σημείου $M(\kappa, 0)$ για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου OMN γίνεται ελάχιστο.



Λύση

i) Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $N(0, \lambda)$. Οπότε, η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι της μορφής

$$y = ax + \lambda.$$

Επειδή η ευθεία (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ συμπεραίνουμε ότι

$$2 = \alpha \cdot 1 + \lambda \Leftrightarrow \alpha = 2 - \lambda.$$

Αξιοποιώντας και το γεγονός ότι το σημείο $M(\kappa, 0)$ ανήκει στην ευθεία (ε) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \cdot \kappa + \lambda \Leftrightarrow 0 = (2 - \lambda)\kappa + \lambda \\ &\Leftrightarrow 0 = 2\kappa - \kappa\lambda + \lambda \\ &\Leftrightarrow \kappa\lambda - \lambda = 2\kappa \\ &\Leftrightarrow (\kappa - 1)\lambda = 2\kappa \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{2\kappa}{\kappa - 1} \quad \text{για κάθε } \kappa > 1. \end{aligned}$$

ii) Για το εμβαδό του τριγώνου OMN έχουμε

$$E(\kappa) = \frac{1}{2}(OM) \cdot (ON).$$

Και επειδή

$$(OM) = \kappa \quad \text{και} \quad (ON) = \lambda = \frac{2\kappa}{\kappa - 1}$$

προκύπτει ότι

$$E(\kappa) = \frac{1}{2} \kappa \cdot \frac{2\kappa}{\kappa - 1} = \frac{\kappa^2}{\kappa - 1} \quad \text{για κάθε } \kappa > 1.$$

iii) Διαδοχικά και ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned} E(\kappa) \geq 4 &\Leftrightarrow \frac{\kappa^2}{\kappa - 1} \geq 4 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 \geq 4(\kappa - 1), \quad \text{αφού } \kappa - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa^2 - 4\kappa + 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\kappa - 2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Και επειδή η τελευταία σχέση είναι αληθής για κάθε $\kappa > 1$, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει με την ισοδύναμή της αρχική σχέση

$$E(\kappa) \geq 4 \quad \text{για κάθε } \kappa > 1.$$

iv) Παρατηρούμε ότι

$$E(2) = \frac{2^2}{2-1} = 4.$$

Άρα, η σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **iii)** παίρνει τη μορφή

$$E(\kappa) \geq E(2) \quad \text{για κάθε } \kappa > 1$$

και φανερώνει ότι το εμβαδό E του τριγώνου OMN γίνεται ελάχιστο για $\kappa = 2$. Επομένως, γίνεται ελάχιστο, όταν $M(2, 0)$.

16. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο το $f(0)$.
 ii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή με την οποία μπορεί να ισούται το $f(0)$ έτσι, ώστε να ισχύει

$$f(x) \leq 2f(0) - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

- i) ● Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.
 Επομένως, για κάθε $x \leq 0$ ισχύει $f(x) \leq f(0)$.

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
 Επομένως, για κάθε $x \geq 0$ ισχύει $f(x) \leq f(0)$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο το $f(0)$.

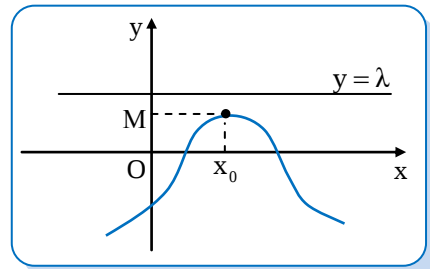
- ii) Η σχέση $f(x) \leq 2f(0) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει αν και μόνο αν $\max f \leq 2f(0) - 1$.

Δηλαδή, $f(0) \leq 2f(0) - 1$

ή ισοδύναμα

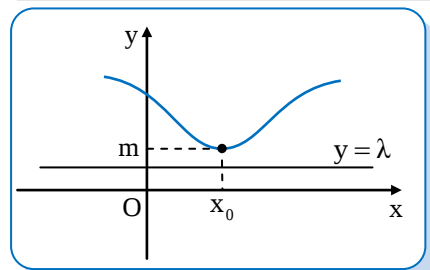
$$f(0) \geq 1.$$

Άρα, η ζητούμενη ελάχιστη τιμή του $f(0)$ είναι ίση με 1.



Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο M , τότε η σχέση $f(x) \leq \lambda$ για κάθε $x \in D_f$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $M \leq \lambda$.



Παρατήρηση

Αν μια συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο m τότε η σχέση $f(x) \geq \lambda$ για κάθε $x \in D_f$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $m \geq \lambda$.

17. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$[f(x) - f(0)] \cdot [g(x) - g(0)] < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$.

Λύση

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$. Δηλαδή,

$$f(x) \geq f(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όμως, λόγω της δοθείσας ανισότητας είναι φανερό ότι η ισότητα στην παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για $x = 0$. Επομένως,

$$f(x) > f(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

δηλαδή

$$f(x) - f(0) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Οπότε, από τη δοθείσα ανισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$g(x) - g(0) < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Επομένως,

$$g(x) \leq g(0) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$.

18. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$f(2x) > f(x) \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f δεν έχει ολικό μέγιστο
- ii) αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση

- i) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο. Δηλαδή, ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Οπότε, θέτοντας στην παραπάνω σχέση όπου x το $2x_0$ προκύπτει

$$f(2x_0) \leq f(x_0)$$

που είναι άτοπο, αφού σύμφωνα με την υπόθεση ισχύει

$$f(2x) > f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Επομένως, η συνάρτηση f δεν έχει ολικό μέγιστο.

- ii) Θέτοντας στη δοθείσα σχέση όπου x το 1 έχουμε

$$f(2) > f(1).$$

Οπότε, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Και επειδή είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Σχόλιο

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Οπότε, για να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα, αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Για το σκοπό αυτό, καταφεύγουμε στη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα.

19. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

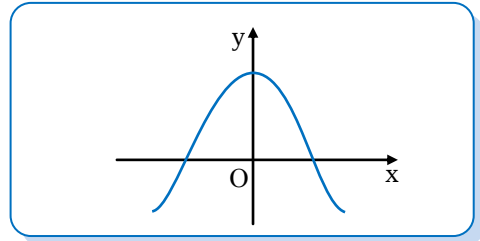
i) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}.$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= (-x)^4 - 5(-x)^2 + 1 \\
 &= x^4 - 5x^2 + 1 \\
 &= f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

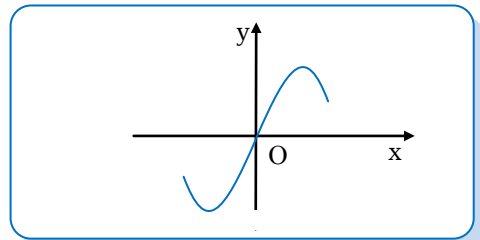
Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

Σημείωση

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται **άρτια** αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.
- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

ii) Έχουμε

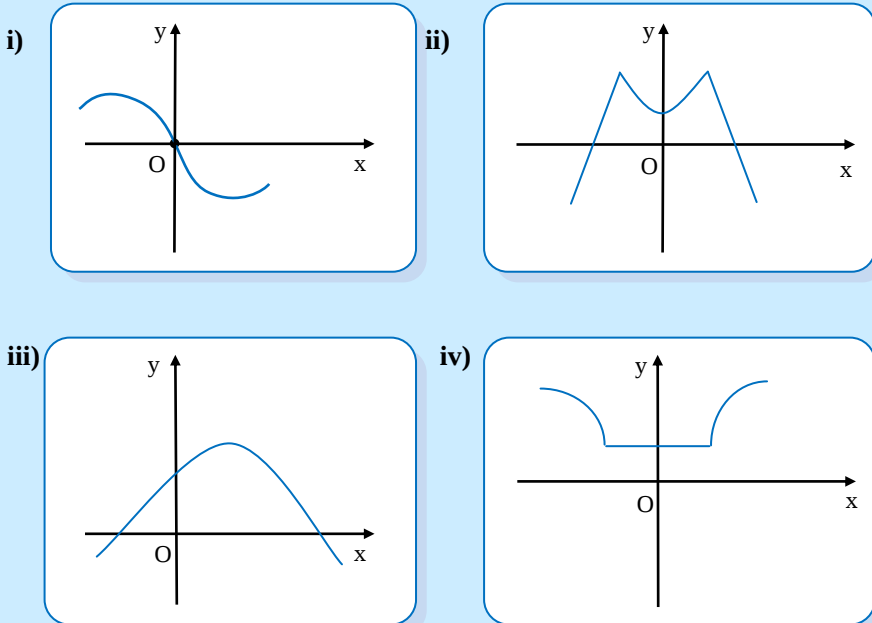
$$\begin{aligned}
 f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} \\
 &= \frac{-x^3}{x^2 + 1} \\
 &= -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι περιττή.

Σημείωση

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται **περιττή** αν και μόνο αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και $f(-x) = -f(x)$.
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

20. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφικές παραστάσεις άρτιας και ποιες περιττής συνάρτησης.



Λύση

- i) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Άρα, η συνάρτηση είναι περιττή.
- ii) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα, η συνάρτηση είναι άρτια.
- iii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον $y'y$, ούτε κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Επομένως, η συνάρτηση δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.
- iv) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα η συνάρτηση είναι άρτια.

21. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή, γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε

$$f(2) = 5.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(3x-8)+5 < 0.$$

Λύση

- i) Η συνάρτηση f είναι περιττή. Δηλαδή, ισχύει

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς

$$f(-2) = -f(2) = -5.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι

$$f(-2) < f(2).$$

Οπότε, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Και επειδή είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

- ii) Η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f(3x-8) < -5$$

δηλαδή

$$f(3x-8) < f(-2).$$

Και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$3x-8 < -2$$

ή ισοδύναμα

$$3x < 6$$

και τελικά

$$x < 2.$$

- 22.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι άρτια.
- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.
- ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Λύση

- i) Η συνάρτηση f είναι άρτια. Δηλαδή ισχύει

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς

$$f(-1) = f(1).$$

Οπότε, η συνάρτηση f δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα αφού τότε θα έπρεπε να ισχύει

$$f(-1) < f(1) \quad \text{ή} \quad f(-1) > f(1)$$

αντίστοιχα. Επομένως, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

- ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$-x_1 > -x_2$$

και

$$-x_1, -x_2 \in (-\infty, 0].$$

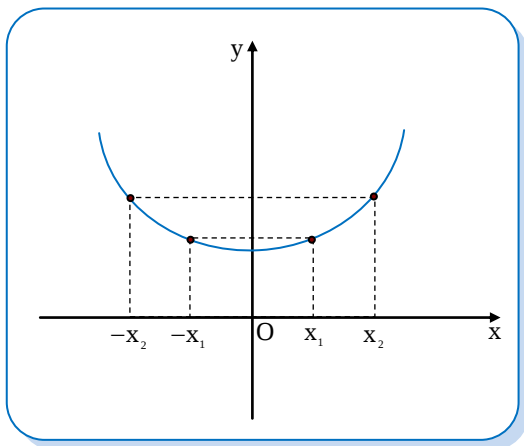
Όμως, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επομένως,

$$f(-x_1) < f(-x_2)$$

και τελικά

$$f(x_1) < f(x_2)$$

αφού η συνάρτηση f είναι άρτια. Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.



23. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(f(x)) = -x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα
- ii) η συνάρτηση f είναι περιττή.

Λύση

- i) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Δηλαδή, ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε,

$$f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

δηλαδή,

$$-x_1 < -x_2$$

που είναι άτοπο. Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Σχόλιο

Την υπόθεση ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα την χρησιμοποιούμε δύο φορές. Την πρώτη φορά για να μεταβούμε από τη σχέση $x_1 < x_2$ στη σχέση $f(x_1) < f(x_2)$ και τη δεύτερη φορά για να μεταβούμε από την τελευταία σχέση στη σχέση

$$f(f(x_1)) < f(f(x_2)).$$

- ii) Θέτουμε στη δοθείσα σχέση όπου x το $f(x)$ οπότε προκύπτει

$$f(f(f(x))) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επικαλούμενοι ξανά τη δοθείσα σχέση η παραπάνω ισότητα γράφεται

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι περιττή.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^3 + 5x + 7, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
- ii) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 5 + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 1 - \sqrt{3 - x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = 2x - 5|x| + 7, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = 7x + 4|x| - 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως αύξουσα.

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = |x + 1| - 3x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι γνησίως φθίνουσα.

7. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4}{x^3} - 5x, \quad x > 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{4}{x} - 5\sqrt[3]{x} + 1 < 0.$$

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^7 + 5x^3 + 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$x^{21} + 5x^9 + 2x^3 < 8.$$

9. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(5, 7)$.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x - 11) < 7.$$

10. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία

$$A(1, 3) \quad \text{και} \quad B(2, 5).$$

- i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x - 4) < 5.$$

11. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(3, -2)$.

- i) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της συνάρτησης f .
ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(|x|) + 2 < 0.$$

12. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(2,7)$ και $B(4,5)$.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.
 ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, να λύσετε την ανίσωση

$$f(f(x) - 3) < 7.$$

13. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και περιττή. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(-3, -4)$, τότε :

- i) να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $x = 3$
 ii) να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα
 iii) να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2 - 2x) < 4.$$

14. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε

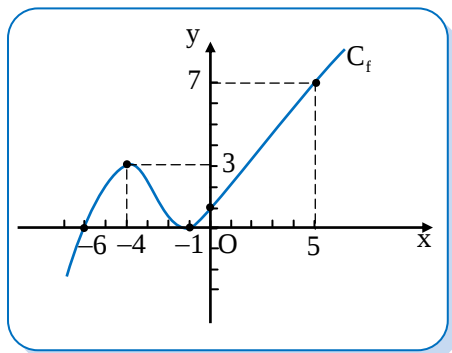
$$f(f(x)) + 3f(x) = -2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

15. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια ώστε $f(1) < 0$. Αν οι αριθμοί $f(1)$, $2f(2)$ και $-3f(3)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

16. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

- i) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-4)$, $f(0)$ και $f(5)$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.



- iv) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι:

α) γνησίως αύξουσα

β) γνησίως φθίνουσα.

17. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 8x + 19, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε την τιμή $f(4)$
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 4$.

18. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = 1 + 6x - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 3$.

19. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = x - 4\sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(4)$.

20. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση

$$f(x) = x^4 + x^2 - 2$$

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$.

ii) η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}$$

παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 5$.

21. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4 - |2x + 1|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

22. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |x^2 - 4| + |x| + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) ο αριθμός 2 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

23. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ii) $\min f(x) = -1$ και $\max f(x) = 1$.

24. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 10}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 ii) Να αποδείξετε ότι $\min f = 1$.

25. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

- ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

26. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2 - |x + 1|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \leq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

- ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

27. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{a}{x}, \quad x > 0$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(1, 5)$, τότε:

- i) να βρείτε την τιμή του a
 ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 2$.

28. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4|x - 3| + 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$
- ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

29. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 3, \quad x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

30. Δίνεται η συνάρτηση

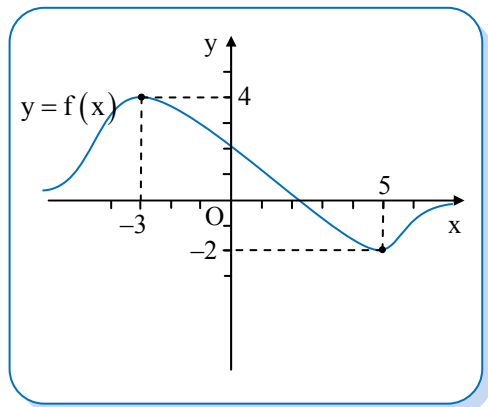
$$f(x) = x^3 - 2|x|^3 + 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
- ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

31. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι:
 - α) γνησίως αύξουσα
 - β) γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f καθώς επίσης και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.



32. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-4)$, $f(0)$ και $f(7)$.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

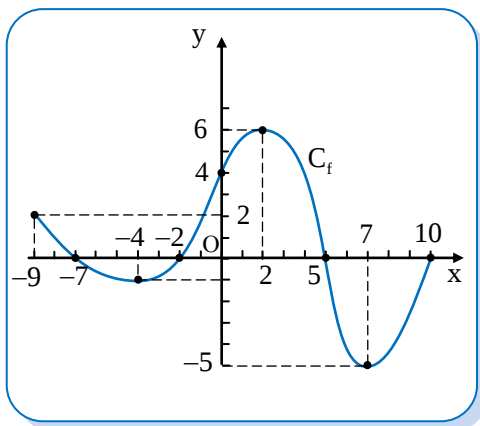
iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$.

v) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι:

α) γνησίως αύξουσα

β) γνησίως φθίνουσα.

vi) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα της f , καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.



33. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

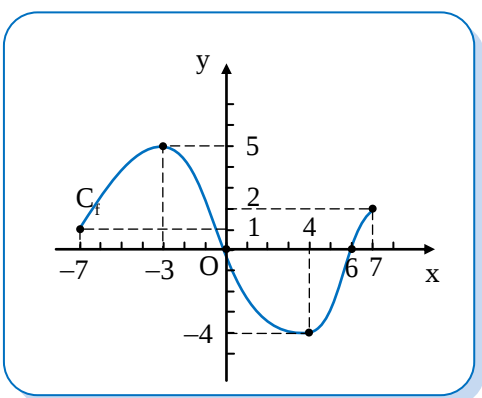
iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) < 0$.

v) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι:

α) γνησίως αύξουσα

β) γνησίως φθίνουσα.

vi) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα της f , καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.



34. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x+3, & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x+3, & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x+6, & x > 2. \end{cases}$$

i) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .

35. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 2\lambda + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή.
 ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του λ για την οποία ισχύει

$$f(x) \geq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

36. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$2f(x) \leq f(1) + f(2) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(1) = f(2)$ ii) η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο.

37. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$g(x) = (f(x))^2 - 2f(x) + 5 \quad \text{για } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $g(x) \geq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 ii) αν επιπλέον ισχύει $f(0) = 1$, τότε η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

38. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

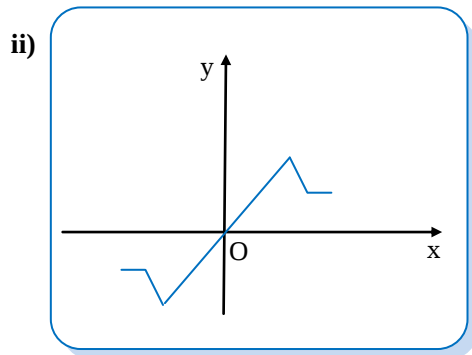
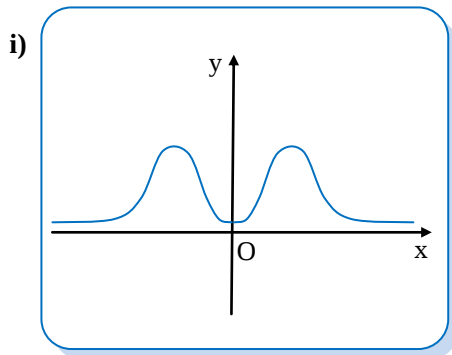
- i) $f(x) = x^4 - 5x^2, \quad x \in \mathbb{R}$ ii) $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$
 iii) $h(x) = \sqrt{4 - |x|}, \quad x \in [-4, 4]$ iv) $\varphi(x) = x^5 + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$

39. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

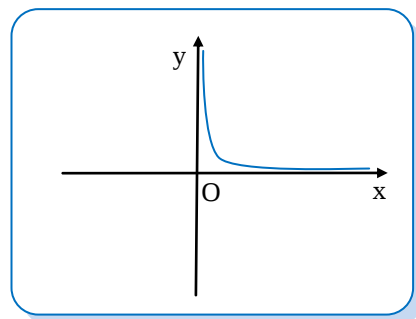
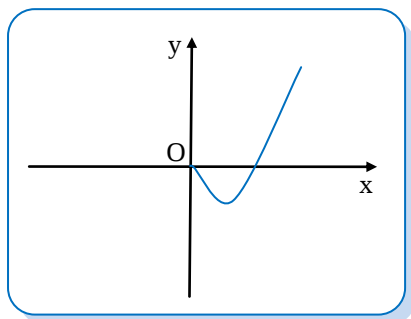
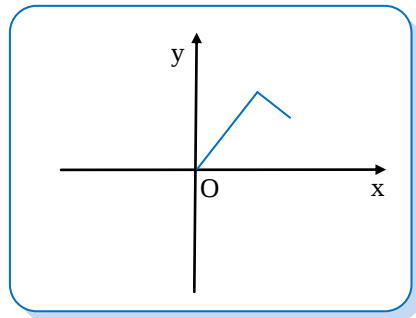
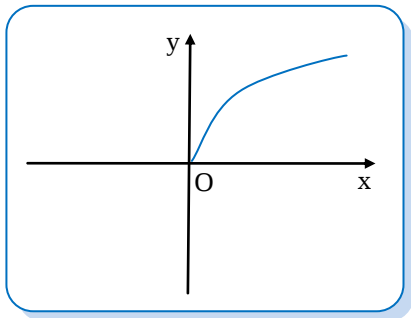
40. Να βρείτε ποια από τις παρακάτω γραμμές είναι γραφική παράσταση άρτιας και ποια περιττής συνάρτησης.



41. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω γραμμές, έτσι ώστε να παριστάνουν γραφικές παραστάσεις:

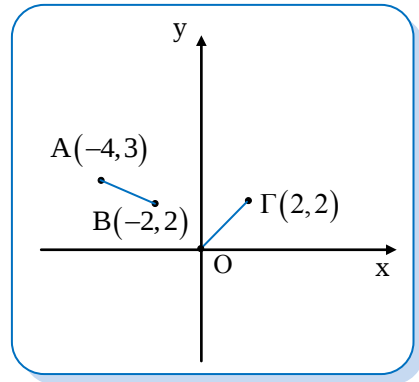
i) άρτιας συνάρτησης

ii) περιττής συνάρτησης.



- 42.** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $A = [-4, 4]$.

- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.



- 43.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 44.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι περιττή και γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε

$$f(-1) = 2.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \quad f(x-1) > 0$$

$$\beta) \quad f\left(\frac{x}{4}\right) + 2 < 0.$$

- 45.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

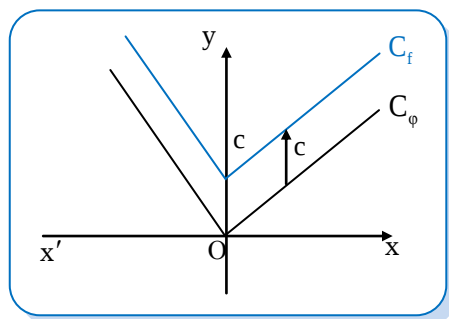
- i) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- ii) η συνάρτηση f είναι περιττή.

Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \varphi(x) + c,$$

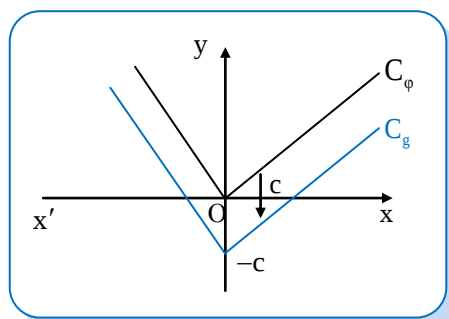
όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες προς τα πάνω**.



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \varphi(x) - c$$

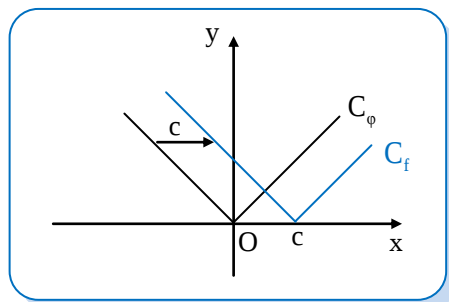
όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες προς τα κάτω**.



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \varphi(x - c),$$

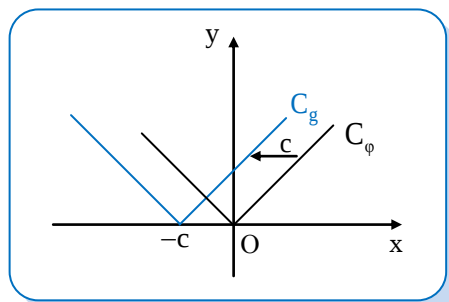
όπου $c > 0$ προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες προς τα δεξιά**.



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \varphi(x + c),$$

όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά **c μονάδες προς τα αριστερά**.



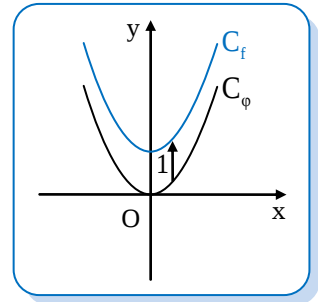
Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

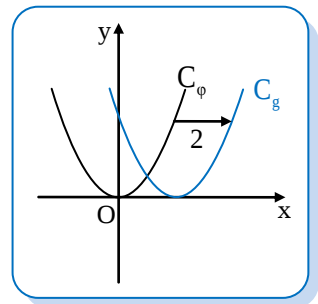
- Αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, τότε προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \varphi(x) + 1 = x^2 + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$



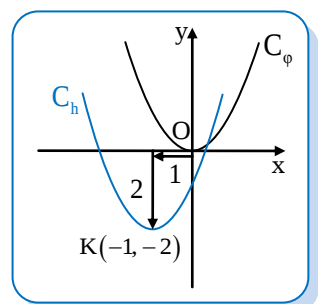
- Αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, τότε προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με τύπο

$$\begin{aligned} g(x) &= \varphi(x-2) = (x-2)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



- Αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, τότε προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο

$$\begin{aligned} h(x) &= \varphi(x+1) - 2 = (x+1)^2 - 2 \\ &= (x^2 + 2x + 1) - 2 \\ &= x^2 + 2x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



Λυμένες Ασκήσεις

- 24.** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = |x|, \quad f(x) = |x| + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = |x| - 2.$$

Λύση

- Γνωρίζουμε ότι η C_φ αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών xOy και $x'Oy$.

- Παρατηρούμε ότι

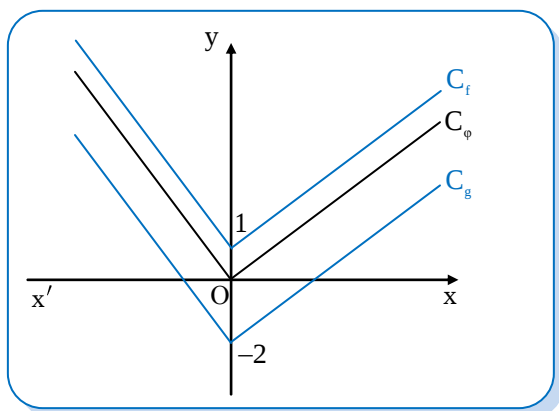
$$f(x) = \varphi(x) + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, οι τιμές της f είναι κατά 1 μονάδα μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τιμές της φ . Επομένως, η C_f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_φ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.

- Παρατηρούμε ότι

$$g(x) = \varphi(x) - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, οι τιμές της g είναι κατά 2 μονάδες μικρότερες από τις αντίστοιχες τιμές της φ . Επομένως, η C_g προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της C_φ κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.



Σημείωση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \varphi(x) + c,$$

όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.

Σημείωση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \varphi(x) - c$$

όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **κατακόρυφη μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω.

25. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = |x|, \quad f(x) = |x-2| \quad \text{και} \quad g(x) = |x+1| + 4.$$

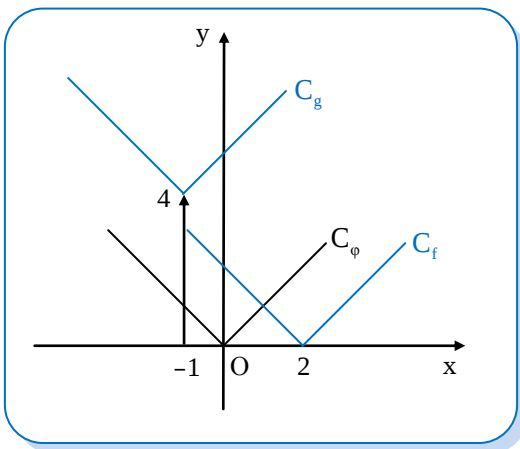
Λύση

- Γνωρίζουμε ότι η C_φ αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών xOy και $x'Oy$.
- Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = \varphi(x-2) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
 Δηλαδή, οι τιμές της φ στο x είναι ίσες με τις τιμές της f στο $x+2$. Επομένως, η C_f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της C_φ κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά.

- Παρατηρούμε ότι

$$g(x) = \varphi(x+1) + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
 Άρα, η C_g προκύπτει μετατοπίζοντας την C_φ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.



Σημείωση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \varphi(x-c),$$

όπου $c > 0$ προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

Σημείωση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \varphi(x+c),$$

όπου $c > 0$, προκύπτει από μία **οριζόντια μετατόπιση** της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.

26. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f :

- i) κατά 2 μονάδες προς τα κάτω
- ii) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά
- iii) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad g(x) &= f(x) - 2 \\ &= x^2 - 4x + 3 - 2 \\ &= x^2 - 4x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σχόλιο

Από την παράσταση $f(x)$ αφαιρούμε τον αριθμό 2.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad g(x) &= f(x-1) \\ &= (x-1)^2 - 4(x-1) + 3 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 4x + 4 + 3 \\ &= x^2 - 6x + 8 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σχόλιο

Στην παράσταση $f(x)$ θέτουμε όπου x το $x-1$.

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad g(x) &= f(x+2) + 4 \\ &= (x+2)^2 - 4(x+2) + 3 + 4 \\ &= x^2 + 4x + 4 - 4x - 8 + 3 + 4 \\ &= x^2 + 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σχόλιο

Στην παράσταση $f(x)$ θέτουμε όπου x το $x+2$ και στο τέλος προσθέτουμε τον αριθμό 4.

27. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 5x^2 - 30x + 47, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f στη μορφή

$$f(x) = a(x-p)^2 + q, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = 5x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 47 \\ &= 5\left(x^2 - 6x + \frac{47}{5}\right) \\ &= 5\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{47}{5}\right) \\ &= 5\left[(x-3)^2 - \frac{45}{5} + \frac{47}{5}\right] \\ &= 5\left[(x-3)^2 + \frac{2}{5}\right] \\ &= 5(x-3)^2 + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Σχόλιο

Βγάζουμε κοινό παράγοντα τον συντελεστή του x^2 . Στη συνέχεια, προσθέτοντας και αφαιρώντας μέσα στην παρένθεση τον ίδιο κατάλληλο αριθμό, σχηματίζουμε ένα τέλειο τετράγωνο της μορφής

$$(x-p)^2.$$

ii) Από το ερώτημα i) παρατηρούμε ότι

$$f(x) = g(x-3) + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

- 46.** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = |x|, \quad f(x) = |x| + 4$$

και

$$g(x) = |x| - 4.$$

- 47.** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις παραστάσεις:

$$\varphi(x) = |x|, \quad f(x) = |x + 5|$$

και

$$g(x) = |x - 5|.$$

- 48.** Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = |x|, \quad f(x) = |x + 4| - 2, \quad g(x) = |x - 7| + 3.$$

- 49.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f :

- i) κατά 2 μονάδες προς τα πάνω
- ii) κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.

- 50.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x - 2) \cdot |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f :

- i) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά
- ii) κατά 5 μονάδες προς τα αριστερά.

51. Δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x) = x^2 - 6x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ :

- i) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 1 μονάδα προς τα πάνω
- ii) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και κατά 4 μονάδες προς τα κάτω
- iii) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω
- iv) κατά 4 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 7 μονάδες προς τα κάτω.

52. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f :

- i) κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 5 μονάδες προς τα πάνω
- ii) κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω
- iii) κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατά 8 μονάδες προς τα πάνω
- iv) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 6 μονάδες προς τα κάτω.

53. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 22, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f στη μορφή

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
3. Να δώσετε τον ορισμό του ολικού μεγίστου μιας συνάρτησης f .
4. Να δώσετε τον ορισμό του ολικού ελαχίστου μιας συνάρτησης f .
5. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται άρτια;
6. Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται περιττή;
7. Να περιγράψετε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζει η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης.
8. Να περιγράψετε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζει η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης.

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Σ Λ
2. Κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ είναι γνησίως μονότονη. Σ Λ
3. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Σ Λ
4. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Σ Λ
5. Κάθε συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ολικό μέγιστο. Σ Λ

6. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε ολικό ελάχιστο, ούτε ολικό μέγιστο. Σ Λ
7. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$ αν και μόνο αν

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$
 Σ Λ
8. Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Σ Λ
9. Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Σ Λ
10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με

$$f(x) = \varphi(x) + c, \text{ όπου } c > 0$$
 προκύπτει από μία κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω. Σ Λ
11. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x) - c, \text{ όπου } c > 0$$
 προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα κάτω Σ Λ
12. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x - c), \text{ όπου } c > 0$$
 προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά Σ Λ
13. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x + c), \text{ όπου } c > 0$$
 προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά Σ Λ

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

- A1.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- A2.** Πότε μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο;
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται άρτια;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με
- $$f(x) = \varphi(x) + c, \text{ όπου } c > 0$$
- προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.
- β)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με
- $$f(x) = \varphi(x - c), \text{ όπου } c > 0$$
- προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα αριστερά.
- γ)** Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- δ)** Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν έχουν ούτε ολικό μέγιστο, ούτε ολικό ελάχιστο.
- ε)** Η γραφική παράσταση κάθε άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x+1)\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 10.$$

B3. Να αποδείξετε ότι

$$(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1} \geq (2x + 1)\sqrt{2x} \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 10|x| + 26, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \frac{10x}{x^2 + 25}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια, ενώ η συνάρτηση g είναι περιττή.
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ολικό ελάχιστο της συνάρτησης f .
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 5$.
- Γ4.** Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = g(x).$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Δ1.** Να γράψετε τον τύπο της f στη μορφή

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο.
- Δ3.** Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο;
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέγεται περιττή;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x) - c, \text{ όπου } c > 0$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα πάνω.

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με

$$f(x) = \varphi(x + c), \text{ όπου } c > 0$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

- γ)** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα σε κάποιο διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
- δ)** Υπάρχουν συναρτήσεις που έχουν και ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.
- ε)** Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x \leq 2 \\ -x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

- B1.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.
- B3.** Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης f .
- B4.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(x + 3).$$

Θέμα Γ

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, -3)$ και $B(5, -4)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και περιττή, τότε:

α) να λύσετε την ανίσωση

$$f(f(x) - 2) > 4$$

β) να αποδείξετε ότι

$$f(x^2 - 2|x|) \leq 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέμα Δ

Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$g(x) = (f(x))^2 - 6f(x) + 11 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$g(x) \geq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ισχύουν οι σχέσεις

$$f(4) = 3 \quad \text{και} \quad g(0) = 27$$

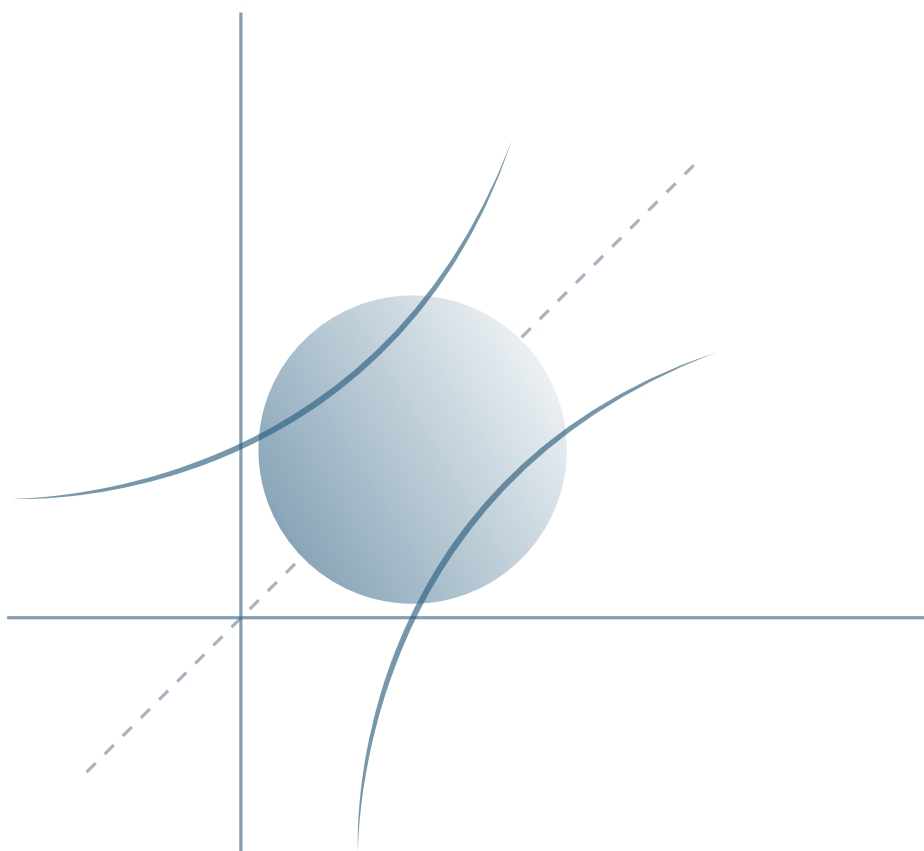
τότε:

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

β) να βρείτε την τιμή $f(0)$

γ) να αποδείξετε ότι $f(g(x)) > -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τριγωνομετρία





«Η ανάγνωση όλων των καλών βιβλίων
είναι σαν μια συνομιλία
με τους πιο καλλιεργημένους ανθρώπους
των περασμένων αιώνων...»

René Descartes

René Descartes

(1596-1650)

Ο Renè Descartes γεννήθηκε στις 31/3/1596 στην πόλη Τουραίν (σημερινή Ντεκάρτ) της Γαλλίας και πέθανε στη Στοκχόλμη της Σουηδίας στις 11/2/1650.

Ο Descartes θεωρούσε ότι τα Μαθηματικά είναι το πιο σπουδαίο μέσο για την κατανόηση του σύμπαντος. Το μεγαλύτερο επίτευγμα του Descartes έγκειται στο ότι εφήρμοσε με συνέπεια την καλά ανεπτυγμένη άλγεβρα του 16ου αιώνα στη γεωμετρική ανάλυση των αρχαίων με αποτέλεσμα μια τεράστια διεύρυνση των δυνατοτήτων εφαρμογής της άλγεβρας.

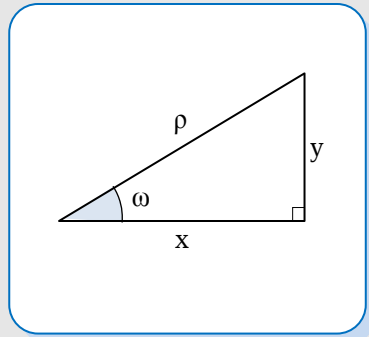
Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας

Ορισμός (Τριγωνομετρικών Αριθμών Γωνίας ω , με $0^\circ < \omega < 90^\circ$)

Έστω ω οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου, x η προσκείμενή της κάθετη πλευρά, y η απέναντί της κάθετη πλευρά και ρ η υποτείνουσα.

Όνομάζουμε **ημίτονο**, **συνημίτονο**, **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** της γωνίας ω και συμβολίζουμε με **ημω**, **συνω**, **εφω** και **σφω** αντίστοιχα τα πηλικά:

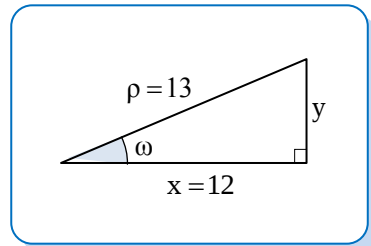
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \quad \text{και} \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y}.$$



- Οι αριθμοί ημω, συνω, εφω και σφω ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** της γωνίας ω .

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



Λύση

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

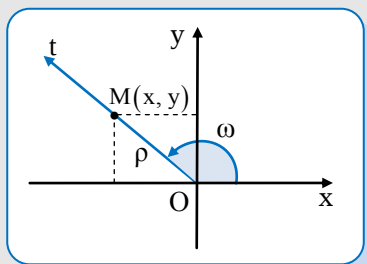
$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = \rho^2 - x^2 \Leftrightarrow y^2 = 13^2 - 12^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 = 169 - 144 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow y = 5. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \eta\mu\omega &= \frac{y}{\rho} = \frac{5}{13}, & \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{x}{\rho} = \frac{12}{13}, \\ \epsilon\phi\omega &= \frac{y}{x} = \frac{5}{12}, & \sigma\phi\omega &= \frac{x}{y} = \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Ορισμός (Τριγωνομετρικών Αριθμών Γωνίας ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$)

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων, Ot μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη **θετική φορά** γύρω από το O μέχρι να συμπίψει για **πρώτη φορά** με την ημιευθεία Ot . Ο ημιάξονας Ox λέγεται **αρχική πλευρά**, ενώ η ημιευθεία Ot λέγεται **τελική πλευρά** της γωνίας ω . Αν $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο



σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω , διαφορετικό του $O(0,0)$, τότε ονομάζουμε **ημίτονο**, **συνημίτονο**, **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** της γωνίας ω και συμβολίζουμε με **ημω**, **συνω**, **εφω** και **σφω** αντίστοιχα τα πηλίκα:

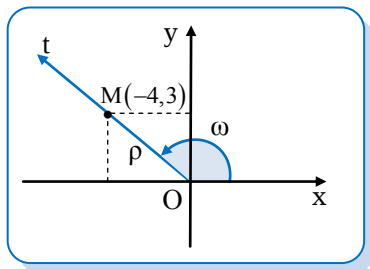
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \text{ (εφόσον } x \neq 0) \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \text{ (εφόσον } y \neq 0),$$

όπου x η τετμημένη του σημείου M , y η τεταγμένη του σημείου M και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του M από το O .

- Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι ανεξάρτητοι από την επιλογή του σημείου $M(x, y)$ της τελικής πλευράς της γωνίας ω .

Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



Λύση

Έχουμε

$$M(-4, 3)$$

και

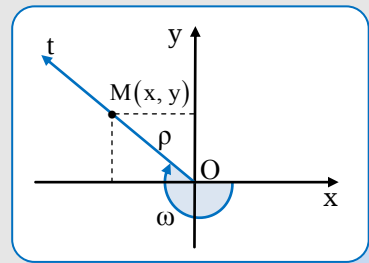
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Επομένως

$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4}{5}, \quad \epsilon\phi\omega = -\frac{3}{4} \text{ και } \sigma\phi\omega = -\frac{4}{3}.$$

Ορισμός (Τριγωνομετρικών Αριθμών Γωνίας ω , Θετικής ή Αρνητικής)

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων, Ot μία ημιευθεία αυτού και ω η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox αν περιστραφεί κατά τη **θετική** ή κατά την **αρνητική** φορά γύρω από το O μέχρι να συμπίψει με την ημιευθεία Ot (όχι απαραίτητα για πρώτη φορά). Δηλαδή η γωνία ω μπορεί να είναι **θετική** και **μεγαλύτερη των 360°** (αν ο ημιάξονας Ox περιστραφεί κατά τη θετική φορά υπερκαλύπτοντας μία ή περισσότερες πλήρεις περιστροφές), ή **αρνητική** (αν ο ημιάξονας Ox περιστραφεί κατά την αρνητική φορά).



Αν $M(x, y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω , διαφορετικό του $O(0, 0)$ τότε ονομάζουμε **ημίτονο**, **συνημίτονο**, **εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη** της γωνίας ω και συμβολίζουμε με **ημω**, **συνω**, **εφω** και **σφω** αντίστοιχα τα πηλίκα:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} \text{ (εφόσον } x \neq 0) \text{ και } \sigma\phi\omega = \frac{x}{y} \text{ (εφόσον } y \neq 0),$$

όπου x η τετμημένη του σημείου M , y η τεταγμένη του σημείου M και $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ η απόσταση του M από το O .

- Οι γωνίες ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$ και $\kappa \cdot 360^\circ + \omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουν την ίδια τελική πλευρά. Άρα, έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

$$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega \quad \sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu 780^\circ$ και $\eta\mu(-1035^\circ)$.

Λύση

- Έχουμε

$$780^\circ = 720^\circ + 60^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 60^\circ.$$

Άρα

$$\sigma\upsilon\nu 780^\circ = \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

- Έχουμε

$$-1035^\circ = -1080^\circ + 45^\circ = (-3) \cdot 360^\circ + 45^\circ.$$

Άρα

$$\eta\mu(-1035^\circ) = \eta\mu((-3) \cdot 360^\circ + 45^\circ) = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Τριγωνομετρικός Κύκλος

- Ένας κύκλος λέγεται **τριγωνομετρικός** όταν έχει κέντρο την αρχή $O(0,0)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και ακτίνα $\rho = 1$.
- Έστω γωνία ω , της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$. Παρατηρούμε ότι:

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{1} = y$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{1} = x.$$

Δηλαδή,

$\sigma\upsilon\nu\omega = x =$ τετμημένη του σημείου M

και

$\eta\mu\omega = y =$ τεταγμένη του σημείου M

Για το λόγο αυτό ο άξονας $x'x$ λέγεται και **άξονας των συνημιτόνων**, ενώ ο άξονας $y'y$ λέγεται και **άξονας των ημιτόνων**.

- Οι τιμές του $\sigma\upsilon\nu\omega$ και του $\eta\mu\omega$ δεν μπορούν να υπερβούν κατ' απόλυτη τιμή την ακτίνα $\rho = 1$ του τριγωνομετρικού κύκλου. Δηλαδή, για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$|\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1 \quad \text{ή} \quad -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

και

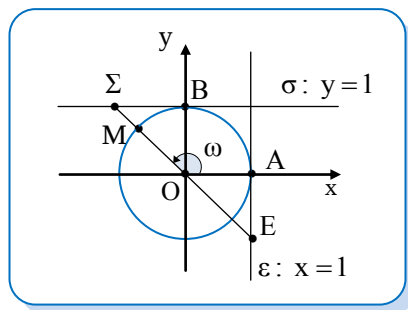
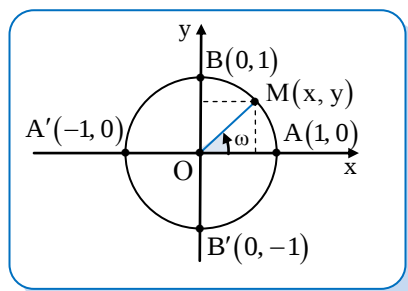
$$|\eta\mu\omega| \leq 1 \quad \text{ή} \quad -1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$

- Έστω γωνία ω , της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$. Θεωρούμε την εφαπτομένη $\varepsilon: x=1$ του κύκλου στο σημείο $A(1,0)$ και την εφαπτομένη $\sigma: y=1$ στο σημείο $B(0,1)$.

- Αν η ευθεία OM τέμνει την (ε) στο σημείο E , τότε ισχύει

$\varepsilon\varphi\omega =$ τεταγμένη του σημείου E .

Για το λόγο αυτό η ευθεία $\varepsilon: x=1$ λέγεται **άξονας των εφαπτομένων**.



- Αν η ευθεία OM τέμνει την (σ) στο σημείο Σ, τότε ισχύει

σφω = τετμημένη του σημείου Σ.

Για το λόγο αυτό η ευθεία σ: $y=1$ λέγεται **άξονας των συνεφαπτομένων**.

- Τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω , ανάλογα με το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας αυτής φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

	Τεταρτημόρια			
	α	β	γ	δ
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-

Παράδειγμα

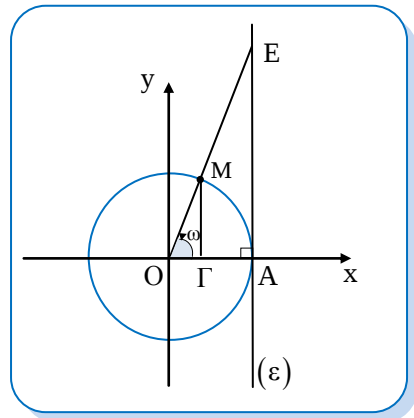
Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας τριγωνομετρικός κύκλος και μία γωνία ω της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον κύκλο στο σημείο

$$M\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

ημω, συνω, εφω

και τις συντεταγμένες του σημείου E.



Λύση

- $\eta\mu\omega = \text{τεταγμένη του σημείου } M = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = \text{τετμημένη του σημείου } M = \frac{1}{3}.$
- Το τρίγωνο OΓM είναι ορθογώνιο στην κορυφή Γ και συνεπώς

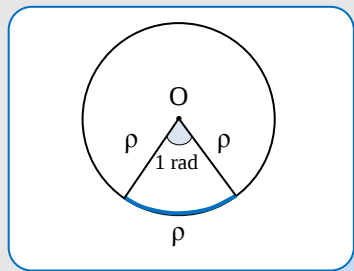
$$\epsilon\phi\omega = \frac{(ΓM)}{(ΟΓ)} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}.$$

- Το σημείο E έχει τετμημένη 1 και τεταγμένη $\epsilon\phi\omega = 2\sqrt{2}.$
Άρα,

$$E(1, 2\sqrt{2}).$$

Ορισμός (Ακτινίου)

Το **ακτίνιο (rad)** είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας ρ , βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ .



Πρόταση

Έστω γωνία ω η οποία είναι μ μοιρών και α ακτινίων. Ισχύει ο τύπος

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}.$$

Απόδειξη

Το μήκος του κύκλου ακτίνας ρ είναι $2\pi\rho$. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό του ακτινίου η επίκεντρη γωνία 360 μοιρών είναι ίση με 2π rad, οπότε η γωνία 1 rad είναι ίση με

$$\frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} \text{ μοίρες.}$$

Επομένως, η γωνία α rad είναι ίση με

$$\alpha \cdot \frac{180}{\pi} \text{ μοίρες.}$$

Και επειδή η γωνία ω είναι μ μοιρών, συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha \cdot \frac{180}{\pi} = \mu \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}.$$

Παράδειγμα

- Για να εκφράσουμε σε ακτίνια γωνία 30° , θέτουμε στον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ όπου μ το 30 και έχουμε

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Άρα, } 30^\circ = \frac{\pi}{6}^{\text{rad}}.$$

- Για να εκφράσουμε σε μοίρες γωνία $\frac{5\pi}{3}^{\text{rad}}$, θέτουμε στον τύπο $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ όπου α το $\frac{5\pi}{3}$ και έχουμε

$$\frac{\frac{5\pi}{3}}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{\mu}{180} \Leftrightarrow \mu = 180 \cdot \frac{5}{3} \Leftrightarrow \mu = 300.$$

Άρα, $\frac{5\pi}{3}^{\text{rad}} = 300^\circ$.

- Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των **βασικών γωνιών**.

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

- Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο το τόξο x rad έχει μήκος x , στη συνέχεια αντί να γράφουμε

$$\eta\mu(x \text{ rad}), \quad \sigma\upsilon\nu(x \text{ rad}), \quad \epsilon\phi(x \text{ rad}), \quad \sigma\phi(x \text{ rad}),$$

θα γράφουμε απλά

$$\eta\mu x, \quad \sigma\upsilon\nu x, \quad \epsilon\phi x, \quad \sigma\phi x.$$

- Όταν η γωνία ω εκφράζεται σε ακτίνια, τότε οι τύποι

$$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega.$$

παίρνουν τη μορφή

$$\eta\mu(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\sigma\varphi(\kappa \cdot 2\pi + \omega) = \sigma\varphi\omega.$$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας $\frac{25\pi}{3}^{\text{rad}}$.

Λύση

Είναι

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{25}{6} \cdot 2\pi.$$

Αν διαιρέσουμε το 25 με το 6 βρίσκουμε πηλίκο 4 και υπόλοιπο 1. Επομένως

$$25 = 4 \cdot 6 + 1 \Leftrightarrow \frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{6} \cdot 2\pi = 4 \cdot 2\pi + \frac{1}{6} \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{25\pi}{3} = 4 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Άρα, οι γωνίες $\frac{25\pi}{3}^{\text{rad}}$ και $\frac{\pi}{3}^{\text{rad}}$ έχουν την ίδια τελική πλευρά και συνεπώς έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή,

$$\eta\mu \frac{25\pi}{3} = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{25\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\epsilon\varphi \frac{25\pi}{3} = \epsilon\varphi \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

και

$$\sigma\varphi \frac{25\pi}{3} = \sigma\varphi \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου, αν είναι γνωστό ότι:

i) $\eta\mu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

ii) $\eta\mu^2\Gamma = \eta\mu\Gamma - \frac{1}{4}$.

Λύση

- i) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$. Οπότε,

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Όμως, σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Επομένως,

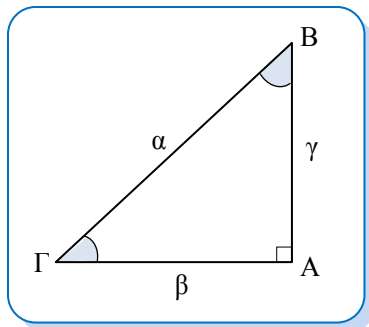
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

δηλαδή

$$\beta = \gamma.$$

Άρα, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές. Οπότε,

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ.$$



Σημείωση

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

- ii) Έχουμε

$$\eta\mu^2\Gamma = \eta\mu\Gamma - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma^2 = 4\alpha\gamma - \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 4\gamma^2 - 4\alpha\gamma + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow (2\gamma - \alpha)^2 = 0$$

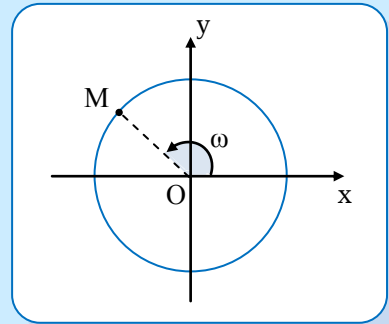
$$\Leftrightarrow 2\gamma = \alpha \Leftrightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2}.$$

Επομένως, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και φυσικά $\hat{B} = 60^\circ$.

3. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας τριγωνομετρικός κύκλος και ένα σημείο του M οι συντεταγμένες του οποίου είναι οι ρίζες της εξίσωσης
- $$25\omega^2 + 5\omega - 12 = 0.$$

Να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες του σημείου M
 ii) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin\omega$ και $\eta\mu\omega$.



Λύση

- i) Η εξίσωση

$$25\omega^2 + 5\omega - 12 = 0$$

είναι β' βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 25 \cdot (-12) = 25 \cdot 49 > 0.$$

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο ρίζες

$$\omega_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 \cdot 49}}{2 \cdot 25} = \frac{-5 \pm 5 \cdot 7}{50} = \frac{-1 \pm 7}{10}.$$

Δηλαδή,

$$\omega_1 = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \omega_2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Όμως, το σημείο M βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο. Άρα, έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$M\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

- ii) Αποδείξαμε ότι $M\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Επομένως,

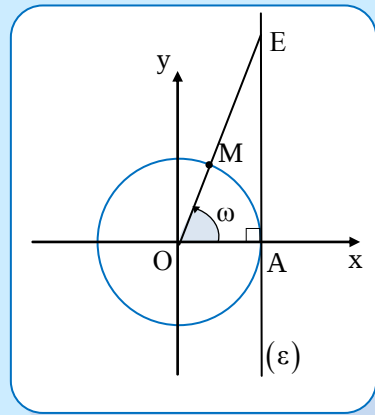
$$\sin\omega = -\frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \eta\mu\omega = \frac{3}{5}.$$

4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας τριγωνομετρικός κύκλος και γωνία ω τέτοια, ώστε

$$\varepsilon\phi\omega = 2\sqrt{2}.$$

Να βρείτε:

- i) τις συντεταγμένες του σημείου E
- ii) το μήκος του τμήματος OE
- iii) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin\omega$ και $\eta\mu\omega$
- iv) τις συντεταγμένες του σημείου M.



Λύση

- i) Η ευθεία (ε) εφαπτεται του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο A. Άρα, η ευθεία (ε) είναι ο άξονας των εφαπτομένων. Επομένως, το σημείο E έχει τετμημένη 1 και τεταγμένη $\varepsilon\phi\omega = 2\sqrt{2}$. Δηλαδή,

$$E(1, 2\sqrt{2}).$$

- ii) Το τρίγωνο OAE είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$. Επομένως, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$(OE)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 = 9.$$

Άρα,

$$(OE) = \sqrt{9} = 3.$$

- iii) Το τρίγωνο OAE είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$. Επομένως,

$$\sin\omega = \frac{(OA)}{(OE)} = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \eta\mu\omega = \frac{(AE)}{(OE)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

- iv) Το σημείο M είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Επομένως, $M(\sin\omega, \eta\mu\omega)$. Δηλαδή,

$$M\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Σημείωση

Έστω μια γωνία ω που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M. Θεωρούμε την εφαπτομένη (ε) του τριγωνομετρικού κύκλου στο A.

Αν η ευθεία OM τέμνει την (ε) στο σημείο E, τότε ισχύει $\varepsilon\phi\omega = \text{τεταγμένη του E}$.

5. Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών:

i) $\eta\mu 73^\circ$

ii) $\sigma\upsilon\nu 155^\circ$

iii) $\epsilon\varphi 4^{\text{rad}}$

iv) $\sigma\varphi 5^{\text{rad}}$

Λύση**i)** Έχουμε

$$0^\circ < 73^\circ < 90^\circ.$$

Δηλαδή, η τελική πλευρά της γωνίας 73° βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

Άρα,

$$\eta\mu 73^\circ > 0.$$

ii) Έχουμε

$$90^\circ < 155^\circ < 180^\circ.$$

Δηλαδή, η τελική πλευρά της γωνίας 155° βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu 155^\circ < 0.$$

iii) Είναι

$$\pi \approx 3,14 \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} \approx 4,71.$$

Οπότε,

$$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$$

και η τελική πλευρά της γωνίας 4^{rad} βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο. Άρα,

$$\epsilon\varphi 4^{\text{rad}} > 0.$$

iv) Έχουμε

$$\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi \approx 6,28.$$

Δηλαδή, η τελική πλευρά της γωνίας 5^{rad} βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο.

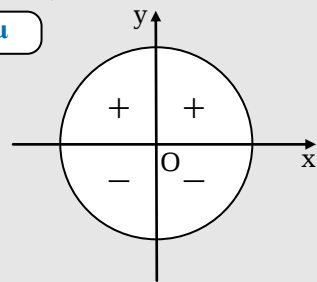
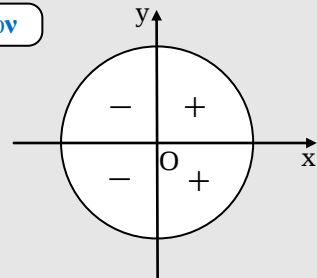
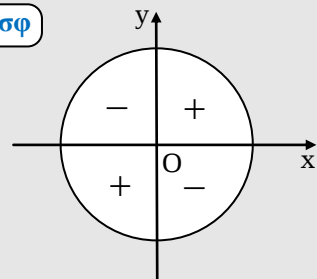
Άρα,

$$\sigma\varphi 5^{\text{rad}} < 0.$$

Κανόνες των προσήμων

Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω καθορίζεται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική της πλευρά.

Επομένως:

 $\eta\mu$  **$\sigma\upsilon\nu$**  **$\epsilon\varphi, \sigma\varphi$** 

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sin(\eta\mu x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ii) $\frac{\sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 4}{\sin(\eta\mu 5)} < 0.$

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή

$$-\frac{\pi}{2} < -1 \quad \text{και} \quad 1 < \frac{\pi}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$-\frac{\pi}{2} < \eta\mu x < \frac{\pi}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η τελική πλευρά της γωνίας $(\eta\mu x)$ rad βρίσκεται ή στο 4ο ή στο 1ο τεταρτημόριο. Και επειδή το συνημίτονο είναι θετικό στα τεταρτημόρια αυτά, συμπεραίνουμε ότι

$$\sin(\eta\mu x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε

- $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$, συνεπώς $\sin 1 > 0$
- $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$, συνεπώς $\sin 2 < 0$
- $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, συνεπώς $\sin 3 < 0$
- $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, συνεπώς $\sin 4 < 0$

Επίσης αποδείξαμε ότι

$$\sin(\eta\mu 5) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς

$$\sin(\eta\mu 5) > 0.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\sin 1 \cdot \sin 2 \cdot \sin 3 \cdot \sin 4}{\sin(\eta\mu 5)} < 0.$$

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 1820^\circ = \eta\mu 20^\circ$

ii) $\epsilon\phi 2580^\circ = \epsilon\phi 60^\circ$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{array}{r|l} 1820 & 360 \\ 20 & 5 \end{array}$$

Δηλαδή, αν διαιρέσουμε το 1820 με το 360 βρίσκουμε πηλίκιο 5 και υπόλοιπο 20. Επομένως

$$1820^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 20^\circ.$$

Άρα,

$$\eta\mu 1820^\circ = \eta\mu (5 \cdot 360^\circ + 20^\circ) = \eta\mu 20^\circ.$$

Σημείωση

Οι γωνίες της μορφής

$$\kappa \cdot 360^\circ + \omega, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία ω . Δηλαδή, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$

ισχύουν οι ισότητες

$$\eta\mu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu \omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu \omega$$

$$\epsilon\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi \omega$$

$$\sigma\phi(\kappa \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi \omega$$

ii) Έχουμε

$$\begin{array}{r|l} 2580 & 360 \\ 60 & 7 \end{array}$$

Δηλαδή, αν διαιρέσουμε το 2580 με το 360 βρίσκουμε πηλίκιο 7 και υπόλοιπο 60.

Επομένως,

$$2580^\circ = 7 \cdot 360^\circ + 60^\circ.$$

Άρα,

$$\epsilon\phi 2580^\circ = \epsilon\phi (7 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \epsilon\phi 60^\circ.$$

8. Να μετατρέψετε γωνία:i) 150° σε radii) $\frac{2\pi}{15}^{\text{rad}}$ σε μοίρες.**Λύση**

i) Σύμφωνα με τον τύπο

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180},$$

για $\mu = 150$ έχουμε

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{150}{180}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}.$$

Επομένως,

$$150^\circ = \frac{5\pi}{6}^{\text{rad}}.$$

ii) Σύμφωνα με τον τύπο

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180},$$

για

$$\alpha = \frac{2\pi}{15}$$

έχουμε

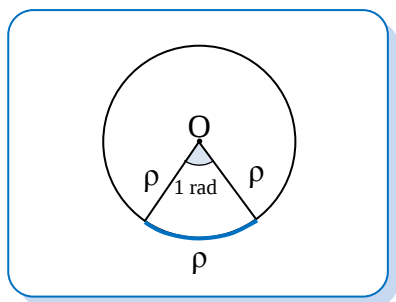
$$\frac{\frac{2\pi}{15}}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{15} = \frac{\mu}{180}$$

$$\Leftrightarrow \mu = 24.$$

Επομένως,

$$\frac{2\pi}{15}^{\text{rad}} = 24^\circ.$$

**Σημειώσεις**

- Το **ακτίνιο** (rad) είναι η γωνία που, όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο ακτίνας ρ , βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ .
- Έστω ότι μία γωνία είναι μ° και α rad. Ισχύει ο τύπος

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{array}{r|l} 97 & 8 \\ 17 & 12 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Δηλαδή, αν διαιρέσουμε το 97 με το 8 βρίσκουμε πηλίκο 12 και υπόλοιπο 1. Επομένως,

$$\begin{aligned} 97 &= 12 \cdot 8 + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{97}{4} &= 12 \cdot 2 + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{97\pi}{4} &= 12 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Διαιρούμε το 97 με το 8 (το διπλάσιο του 4) και γράφουμε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. Στη συνέχεια αξιοποιούμε το γεγονός ότι κάθε γωνία της μορφής

$$\kappa \cdot 2\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

έχει τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία θ .

Άρα, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $\frac{97\pi}{4}^{\text{rad}}$ είναι ίδιοι με τους αντίστοιχους

τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας $\frac{\pi}{4}^{\text{rad}}$. Δηλαδή,

$$\eta\mu \frac{97\pi}{4} = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu \frac{97\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\epsilon\phi \frac{97\pi}{4} = \epsilon\phi \frac{\pi}{4} = 1 \quad \text{και} \quad \sigma\phi \frac{97\pi}{4} = \sigma\phi \frac{\pi}{4} = 1.$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\phi\omega$	$\sigma\phi\omega$
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

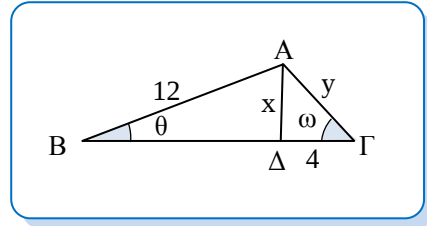
Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Επίσης, ισχύουν:

$$(AB)=12, (\Gamma\Delta)=4 \text{ και } \eta\mu\theta = \frac{1}{3}.$$

Να βρείτε:

- i) τα μήκη x και y
 ii) τη γωνία ω



2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$AB = 17, \quad A\Gamma = 10$$

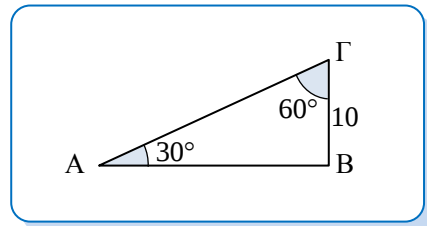
και το ύψος του $A\Delta$. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{15}{17} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{3}{5},$$

να βρείτε:

- i) το μήκος του τμήματος $B\Gamma$ ii) το μήκος του ύψους $A\Delta$
 iii) το $\eta\mu\Gamma$.

3. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών AB και $A\Gamma$ του τριγώνου του διπλανού σχήματος.



4. Σε έναν κύκλο, μια επίκεντρη γωνία του ω βαίνει σε τόξο μήκους $S=12$ cm.

Να εκφράσετε τη γωνία ω σε ακτίνια, αν η ακτίνα του κύκλου είναι:

- i) $\rho = 3$ cm ii) $\rho = 4$ cm
 iii) $\rho = 6$ cm iv) $\rho = 24$ cm.

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$\hat{A} = 90^\circ, \quad (AB)=12 \text{ και } (A\Gamma)=5.$$

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .

6. Να μετατρέψετε σε ακτίνια (rad) γωνία:

i) 210°

ii) 2730°

iii) -750°

iv) -1170° .

7. Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία:

i) $\frac{5\pi}{2}^{\text{rad}}$

ii) $\frac{\pi}{9}^{\text{rad}}$

iii) $\frac{\pi}{12}^{\text{rad}}$

iv) $-\frac{5\pi}{18}^{\text{rad}}$.

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

i) 450°

ii) 1470°

iii) 1860°

iv) 3645° .

9. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών

i) $28\pi^{\text{rad}}$

ii) $\frac{5\pi}{2}^{\text{rad}}$

iii) $\frac{25\pi}{6}^{\text{rad}}$

iv) $\frac{33\pi}{4}^{\text{rad}}$.

10. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ ο οποίος έχει περίμετρο ίση με 48 και

$$\hat{B} = 120^\circ.$$

Να βρείτε τα μήκη των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ.

11. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ τέτοιο, ώστε

$$\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ, \text{ } A\Delta = B\Gamma = 6 \text{ και } \Gamma\Delta = 4.$$

Να υπολογίσετε:

i) το ύψος υ του τραpezίου

ii) τη βάση ΑΒ του τραpezίου.

12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$\hat{A} = 90^\circ.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \eta\mu B \cdot \epsilon\varphi B = \frac{\beta^2}{\alpha\gamma}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu\Gamma} = \epsilon\varphi B.$$

13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με

$$\hat{A} = 90^\circ.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \text{αν } \beta = 3 \text{ και } \gamma = 4, \text{ τότε}$$

$$\frac{(\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu B)^2}{\sigma\upsilon\nu^2 B - \eta\mu^2 B} = 7$$

$$\text{ii)} \quad \text{αν } (\beta + \gamma)^4 - (\beta - \gamma)^4 = 2\alpha^4, \text{ τότε}$$

$$\eta\mu B \cdot \eta\mu\Gamma = \frac{1}{4}.$$

14. Δίνεται κύκλος με κέντρο ένα σημείο O και ακτίνα

$$\rho = 1.$$

Έστω επίσης δύο σημεία του A και B τέτοια, ώστε

$$(AB) = 1.$$

Αν M είναι το μέσο της χορδής AB και Δ το σημείο τομής της OM με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \hat{A\Delta B} = 150^\circ$$

$$\text{ii)} \quad (M\Delta) = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{iii)} \quad \epsilon\varphi 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

15. Έστω πραγματικοί αριθμοί α , x και y τέτοιοι, ώστε

$$\eta\mu x = 8\alpha - 7 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu y = 6\alpha - 7.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \alpha = 1$$

$$\text{ii)} \quad x - y \neq 2k\pi \text{ για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Πρόταση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
2. $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$
3. $\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$
4. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$
5. $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$.

Απόδειξη

1. Αν $M(x, y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο, τότε είναι

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{και} \quad y = \eta\mu\omega.$$

Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2.$$

Όμως $(OM) = 1$ και συνεπώς

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Δηλαδή

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$

2. Στο ίδιο σχήμα έχουμε

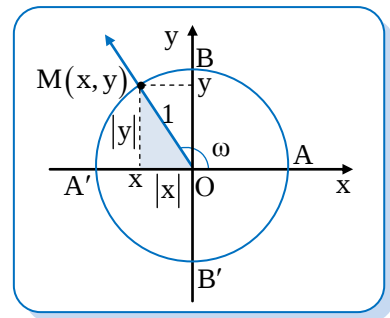
$$\epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \quad (\text{εφόσον } x \neq 0) \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} \quad (\text{εφόσον } y \neq 0).$$

Όμως

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{και} \quad y = \eta\mu\omega.$$

Επομένως

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$



3. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1,$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu\omega \neq 0.$$

4. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και έχουμε

$$\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

Άρα,

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

5. Αν στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θέσουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}$, έχουμε

$$\eta\mu^2\omega + \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

Άρα,

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1 + \varepsilon\varphi^2\omega}.$$

• Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ προκύπτουν οι τύποι

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega \quad \text{και} \quad \eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

οι οποίοι μετασχηματίζουν το $\sigma\upsilon\nu\omega$ σε $\eta\mu\omega$ και αντίστροφα, εφόσον οι παραπάνω τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι υψωμένοι στο τετράγωνο.

Παράδειγμα

Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$$

να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Λύση

- Έχουμε

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9}.$$

Οπότε

$$\eta\mu^2\omega = \frac{4}{9}.$$

Όμως, $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$. Δηλαδή, η τελική πλευρά της γωνίας ω βρίσκεται στο δ' τεταρτημόριο και συνεπώς $\eta\mu\omega < 0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\eta\mu\omega = -\sqrt{\frac{4}{9}} = -\frac{2}{3}.$$

- Έχουμε

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

- Έχουμε

$$\sigma\phi\omega = \frac{1}{\epsilon\phi\omega} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 2\eta\mu^2\omega - 1.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega &= (\eta\mu^2\omega)^2 - (\sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 \\ &= (\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega)(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) \\ &= \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega && (\text{διότι } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1) \\ &= \eta\mu^2\omega - 1 + \eta\mu^2\omega && (\text{διότι } \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega) \\ &= 2\eta\mu^2\omega - 1. \end{aligned}$$

Λυμένες Ασκήσεις

10. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta\mu\omega = \frac{12}{13} \quad \text{και} \quad 90^\circ < \omega < 180^\circ,$$

να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\sigma\upsilon\nu\omega$

ii) $\epsilon\phi\omega$

iii) $\sigma\phi\omega$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Επομένως,

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{25}{169}.$$

Όμως,

$$90^\circ < \omega < 180^\circ$$

και συνεπώς

$$\sigma\upsilon\nu\omega < 0.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

ii) Έχουμε

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

iii) Έχουμε

$$\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}.$$

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$
- $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
- $\sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

11. Αν ισχύουν οι σχέσεις
 $\sigma\phi\omega = 2\sqrt{2}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$,

να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\epsilon\phi\omega$

ii) $\sigma\upsilon\nu\omega$

iii) $\eta\mu\omega$.

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1.$$

Επομένως,

$$\epsilon\phi\omega \cdot 2\sqrt{2} = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi\omega = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

ii) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{8}} = \frac{8}{9}.$$

Όμως, $180^\circ < \omega < 270^\circ$ και συνεπώς $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}.$$

iii) α' τρόπος:

Γνωρίζουμε ότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$. Επομένως,

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\eta\mu\omega}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\frac{1}{3}.$$

β' τρόπος:

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$. Οπότε,

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{1}{9}.$$

Και επειδή $180^\circ < \omega < 270^\circ$, συμπεραίνουμε ότι $\eta\mu\omega < 0$ και τελικά $\eta\mu\omega = -\frac{1}{3}$.

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1$
- $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$
- $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$

12. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$x = 3\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{και} \quad y = 4\eta\mu\theta$$

να αποδείξετε ότι

$$16x^2 + 9y^2 = 144.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 16x^2 + 9y^2 &= 16(3\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + 9(4\eta\mu\theta)^2 \\ &= 16 \cdot 9\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9 \cdot 16\eta\mu^2\theta \\ &= 144\sigma\upsilon\nu^2\theta + 144\eta\mu^2\theta \\ &= 144(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta). \end{aligned}$$

Όμως, ισχύει η ταυτότητα

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1.$$

Επομένως,

$$16x^2 + 9y^2 = 144 \cdot 1 = 144.$$

13. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$x = 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega, \quad y = 2\eta\mu\theta\eta\mu\omega \quad \text{και} \quad z = 2\sigma\upsilon\nu\theta,$$

να αποδείξετε ότι

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (2\eta\mu\theta\eta\mu\omega)^2 + (2\sigma\upsilon\nu\theta)^2 \\ &= 4\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2\omega + 4\eta\mu^2\theta\eta\mu^2\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &= 4\eta\mu^2\theta(\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega) + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &= 4\eta\mu^2\theta \cdot 1 + 4\sigma\upsilon\nu^2\theta \\ &= 4(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) \\ &= 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

14. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 2 \quad \text{ii) } \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 &= \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \\ &= 1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 &= \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \\ &= 1 - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \end{aligned}$$

Επομένως,

$$(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = 1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + 1 - 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 2$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} &= \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} \\ &= \frac{\eta\mu\theta \cdot (1 + \eta\mu\theta) + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (1 + \eta\mu\theta)} \\ &= \frac{\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (1 + \eta\mu\theta)} \\ &= \frac{\eta\mu\theta + 1}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (1 + \eta\mu\theta)} \\ &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Για να αποδείξουμε μία ταυτότητα συνήθως επιλέγουμε το ένα μέλος της, προφανώς το πιο πολύπλοκο, και εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις καταλήγουμε στο άλλο μέλος.

15. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad \frac{1 - \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha - 1} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\epsilon\phi\alpha - \eta\mu\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{\epsilon\phi\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

Λύση

i) Για όποιες τιμές του α ορίζεται η ζητούμενη ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} & (1 + \eta\mu\alpha) \cdot (1 - \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha) \\ &= \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha - 1) \\ \Leftrightarrow & 1 - \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu\sigma\upsilon\nu\alpha \\ &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha \\ \Leftrightarrow & 1 - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ \Leftrightarrow & 1 = \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha. \end{aligned}$$

Και επειδή η τελευταία ισότητα είναι αληθής, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει με την ισοδύναμη προς αυτή ζητούμενη ισότητα.

Μεθοδολογία

Αν κρίνουμε ότι και τα δύο μέλη της ζητούμενης ταυτότητας είναι πολύπλοκα και συνεπώς είναι δύσκολο να καταλήξουμε από το πρώτο μέλος στο δεύτερο ή από το δεύτερο μέλος στο πρώτο, τότε εργαζόμαστε ως εξής: Μετασχηματίζουμε τη ζητούμενη ταυτότητα σε ισοδυναμική της για την οποία εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι αληθής. Η μέθοδος αυτή απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, ως προς την εγκυρότητα των ισοδυναμιών που χρησιμοποιούμε.

ii) Για όποιες τιμές του α ορίζεται η ζητούμενη ισότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} & (1 + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot (\epsilon\phi\alpha - \eta\mu\alpha) = \epsilon\phi\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha \\ \Leftrightarrow & (1 + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot \left(\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \eta\mu\alpha \right) = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \eta\mu^2\alpha \\ \Leftrightarrow & (1 + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot (\eta\mu\alpha - \eta\mu\sigma\upsilon\nu\alpha) = \eta\mu^3\alpha \\ \Leftrightarrow & \eta\mu\alpha - \eta\mu\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha - \eta\mu\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^3\alpha \\ \Leftrightarrow & \eta\mu\alpha - \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^3\alpha \\ \Leftrightarrow & \eta\mu\alpha(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \eta\mu^3\alpha \\ \Leftrightarrow & \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha = \eta\mu^3\alpha. \end{aligned}$$

Και επειδή η τελευταία ισότητα είναι αληθής, συμπεραίνουμε ότι το ίδιο ισχύει με την ισοδύναμη προς αυτή ζητούμενη ισότητα.

16. Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{7}{5}$$

να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$

ii) $\frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

iii) $\epsilon\phi\theta + \sigma\phi\theta$

iv) $\eta\mu^3\theta + \sigma\upsilon\nu^3\theta$.

Λύση

i) Από τη δοθείσα σχέση έχουμε

$$(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2.$$

Δηλαδή,

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{49}{25} \Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{49}{25}$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{24}{25}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{25}.$$

ii) Έχουμε

$$\frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta}{\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{12}{25}} = \frac{35}{12}.$$

iii) Έχουμε

$$\epsilon\phi\theta + \sigma\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \frac{\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{\frac{12}{25}} = \frac{25}{12}.$$

iv) Με βάση την ταυτότητα

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu^3\theta + \sigma\upsilon\nu^3\theta &= (\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)(\eta\mu^2\theta - \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) \\ &= \frac{7}{5} \left(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \frac{12}{25} \right) = \frac{7}{5} \left(1 - \frac{12}{25} \right) = \frac{91}{125}. \end{aligned}$$

17. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (a_n) έχουμε

$$a_1 = 1 - \eta\mu\theta \quad \text{και} \quad a_2 = \sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{με} \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$a_3 = 1 + \eta\mu\theta.$$

ii) Αν $\theta = \frac{\pi}{6}$, να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

Λύση

i) Οι αριθμοί a_1, a_2 και a_3 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Επομένως,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_3 &= a_2^2 \Leftrightarrow (1 - \eta\mu\theta) \cdot a_3 = \sigma\upsilon\nu^2\theta \\ \Leftrightarrow a_3 &= \frac{1 - \eta\mu^2\theta}{1 - \eta\mu\theta} \\ \Leftrightarrow a_3 &= \frac{(1 - \eta\mu\theta) \cdot (1 + \eta\mu\theta)}{1 - \eta\mu\theta}. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$a_3 = 1 + \eta\mu\theta.$$

ii) Αν $\theta = \frac{\pi}{6}$, τότε

$$a_1 = 1 - \eta\mu\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

και

$$a_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επομένως,

$$\lambda = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

16. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\sin x = \frac{\sqrt{8}}{3} \quad \text{και} \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi,$$

να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

17. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta\mu\theta = -\frac{8}{17} \quad \text{και} \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

18. Αν ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\phi\theta = -2 \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi,$$

να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ rad.

19. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του x τέτοια, ώστε:

i) $\eta\mu x = 0$ και $\sin x = 0$

ii) $\eta\mu x = -\frac{1}{3}$ και $\sin x = \frac{2}{3}$

iii) $\eta\mu x + \sin x = 2$.

20. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$x = 5\sin\theta \quad \text{και} \quad y = 4\eta\mu\theta,$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

21. Έστω γωνία α για την οποία ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\alpha = \frac{1}{5}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\sigma\upsilon\alpha = \frac{12}{25}$.
 ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha$.

22. Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{5},$$

να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

- i) $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$ ii) $\frac{1}{\eta\mu\omega} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$
 iii) $\eta\mu^3\omega + \sigma\upsilon\nu^3\omega$.

23. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

- i) $\eta\mu^4x - \sigma\upsilon\nu^4x = \eta\mu^2x - \sigma\upsilon\nu^2x$ ii) $\eta\mu^2x \cdot (1 + \sigma\phi^2x) = 1$
 iii) $\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu x\right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x\right) = \eta\mu^2x + \epsilon\phi^2x$.

24. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

- i) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ ii) $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2x}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x$
 iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\phi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\phi x} = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$.

25. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\eta\mu\alpha \cdot (1 + \epsilon\phi\alpha) + \sigma\upsilon\alpha \cdot (1 + \sigma\phi\alpha) = \frac{1}{\eta\mu\alpha} + \frac{1}{\sigma\upsilon\alpha}.$$

26. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

- i) $\epsilon\phi^2\theta - \eta\mu^2\theta = \epsilon\phi^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta$ ii) $\sigma\phi^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \sigma\phi^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta$.

27. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$.

28. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\beta}{\sigma\phi\alpha + \epsilon\phi\beta} = \frac{\epsilon\phi\alpha}{\epsilon\phi\beta}$

ii) $\frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta} = \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta$.

29. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}$

ii) $\frac{\epsilon\phi^2\alpha - 1}{\epsilon\phi^2\alpha + 1} = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

iii) $\frac{\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha} = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$.

30. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1)(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + 1) = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

ii) $\frac{\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1} + \frac{\eta\mu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha + 1} = \frac{4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{3 - 4\eta\mu^2\alpha}$.

31. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(\eta\mu x + \epsilon\phi x) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \sigma\phi x) = (1 + \eta\mu x) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu x)$

ii) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\epsilon\phi x + \sigma\phi x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$.

32. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(1 - \epsilon\phi\theta)^2 + (1 - \sigma\phi\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - \frac{1}{\eta\mu\theta} \right)^2$

ii) $2\epsilon\phi\theta + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = (\epsilon\phi\theta + 1)^2$.

33. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $1 + \frac{2\epsilon\phi^2\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}$

ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta} = \frac{1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta}$.

34. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{\eta\mu^2\alpha}{1-\sigma\phi\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1-\epsilon\phi\alpha} = 1 + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

ii) $\sqrt{1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = |\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha|$.

35. Δίνεται γωνία α για την οποία ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + 1)(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1) = \frac{2}{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha}$

ii) $|\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha| \neq 1$.

36. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(1 + \epsilon\phi\alpha)(1 + \sigma\phi\alpha) = \frac{(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

ii) $\frac{\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha} = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$.

37. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x} + \frac{1}{\eta\mu^2x}} = \epsilon\phi x + \sigma\phi x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

ii) $\sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}} = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

38. Αν ισχύει η σχέση

$$\epsilon\phi^2\alpha = 1 + 2\epsilon\phi^2\beta,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\epsilon\phi^2\alpha + 1 = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\beta = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

iii) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\beta - 1$.

39. Αν ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi\beta = 2\varepsilon\varphi\alpha$$

να αποδείξετε ότι

$$\frac{3\varepsilon\varphi\beta - 2\varepsilon\varphi\alpha}{2 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 - 1.$$

40. Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\beta}{1 + 3\eta\mu^2\beta}$$

να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^2\beta = \frac{2 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2 + 3\eta\mu^2\alpha}.$$

41. Αν ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = 1 + 2\varepsilon\varphi^2\beta$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta} = 2$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\beta = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$

42. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^4x + \sigma\upsilon\nu^4x = 1 - 2\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $\eta\mu^6x + \sigma\upsilon\nu^6x = 1 - 3\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) η παράσταση

$$\eta\mu^6x + \sigma\upsilon\nu^6x - 2\eta\mu^4x - \sigma\upsilon\nu^4x + \eta\mu^2x$$

είναι σταθερή, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του x .

43. Να αποδείξετε ότι:

i) $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

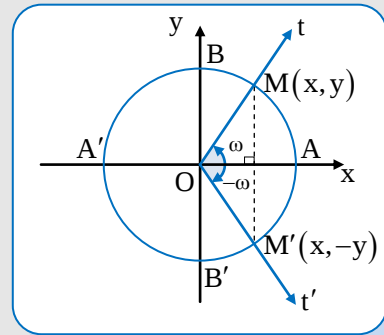
Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

Γωνίες Αντίθετες

Πρόταση

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το **ίδιο συνημίτονο** και **αντίθετους** τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}\sin(-\omega) &= \sin\omega & \eta\mu(-\omega) &= -\eta\mu\omega \\ \epsilon\phi(-\omega) &= -\epsilon\phi\omega & \sigma\phi(-\omega) &= -\sigma\phi\omega\end{aligned}$$



Παράδειγμα

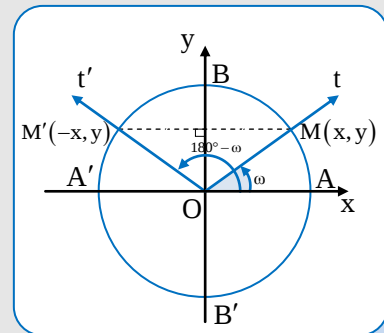
- $\sin(-45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\epsilon\phi(-60^\circ) = -\epsilon\phi 60^\circ = -\sqrt{3}$
- $\sigma\phi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\phi\frac{\pi}{4} = -1$.

Γωνίες με Άθροισμα 180° (παραπληρωματικές)

Πρόταση

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το **ίδιο ημίτονο** και **αντίθετους** τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}\eta\mu(180^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega & \sin(180^\circ - \omega) &= -\sin\omega \\ \epsilon\phi(180^\circ - \omega) &= -\epsilon\phi\omega & \sigma\phi(180^\circ - \omega) &= -\sigma\phi\omega\end{aligned}$$



Παράδειγμα

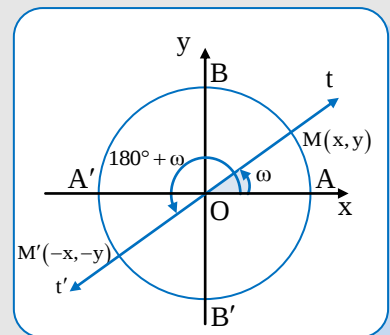
- $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\epsilon\varphi 150^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- $\sigma\varphi \frac{2\pi}{3} = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\varphi \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Γωνίες με Διαφορά 180°

Πρόταση

Οι γωνίες με διαφορά 180° έχουν **αντίθετο ημίτονο** και **συνημίτονο**, ενώ έχουν την **ίδια εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη**. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \eta\mu(180^\circ + \omega) &= -\eta\mu\omega & \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\varphi(180^\circ - \omega) &= \epsilon\varphi\omega & \sigma\varphi(180^\circ + \omega) &= \sigma\varphi\omega \end{aligned}$$



Παράδειγμα

- $\eta\mu 210^\circ = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$.
- $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- $\epsilon\varphi 240^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ + 60^\circ) = \epsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$.
- $\sigma\varphi \frac{7\pi}{6} = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\varphi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

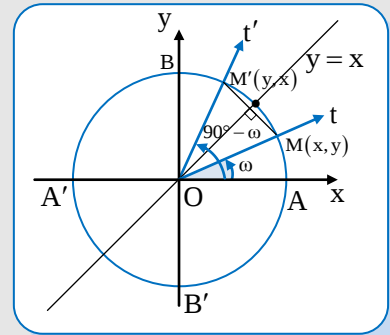
Γωνίες με Άθροισμα 90° (συμπληρωματικές)

Πρόταση

Στις γωνίες με άθροισμα 90° **το ημίτονο** καθεμιάς ισούται με το **συνημίτονο** της άλλης και η **εφαπτομένη** καθεμιάς ισούται με τη **συνεφαπτομένη** της άλλης. Δηλαδή:

$$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \quad \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega \quad \sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \epsilon\varphi\omega$$



Παράδειγμα

- $\eta\mu 80^\circ = \eta\mu(90^\circ - 10^\circ) = \sigma\upsilon\nu 10^\circ$.
- $\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{12} = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{12}$.
- $\epsilon\varphi 50^\circ = \epsilon\varphi(90^\circ - 40^\circ) = \sigma\varphi 40^\circ$.
- $\sigma\varphi \frac{3\pi}{10} = \sigma\varphi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) = \epsilon\varphi \frac{\pi}{5}$.

Παράδειγμα

Με τη βοήθεια της γωνίας ω να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\eta\mu(90^\circ + \omega), \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right), \quad \epsilon\varphi(270^\circ - \omega), \quad \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right).$$

Λύση

Έχουμε

- $\eta\mu(90^\circ + \omega) = \eta\mu[90^\circ - (-\omega)] = \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right) = \eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
- $\epsilon\varphi(270^\circ - \omega) = \epsilon\varphi[180^\circ + (90^\circ - \omega)] = \epsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$
- $\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = \sigma\varphi\left(2\pi + \left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sigma\varphi\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = -\epsilon\varphi\omega$.

Λυμένες Ασκήσεις

18. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

i) -45°

ii) 150° .

Λύση

i) Έχουμε

$$\eta\mu(-45^\circ) = -\eta\mu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu(-45^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\epsilon\varphi(-45^\circ) = -\epsilon\varphi 45^\circ = -1$$

και

$$\sigma\varphi(-45^\circ) = -\sigma\varphi 45^\circ = -1.$$

Σημείωση

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το **ίδιο συνημίτονο** και **αντίθετους** τους **άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς**. Δηλαδή,

$$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$$

$$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$

ii) Παρατηρούμε ότι

$$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ.$$

Επομένως,

$$\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\epsilon\varphi 150^\circ = \epsilon\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

και

$$\sigma\varphi 150^\circ = \sigma\varphi(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

Σημείωση

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το **ίδιο ημίτονο** και **αντίθετους** τους **άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς**.

Δηλαδή,

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

19. Δίνεται ότι

$$\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu 195^\circ$

ii) $\sigma\upsilon\nu 195^\circ$

iii) $\eta\mu 75^\circ$

iv) $\sigma\upsilon\nu 75^\circ$.

Λύση

i) Παρατηρούμε ότι
 $195^\circ = 180^\circ + 15^\circ$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} \eta\mu 195^\circ &= \eta\mu(180^\circ + 15^\circ) \\ &= -\eta\mu 15^\circ = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 195^\circ &= \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 15^\circ) \\ &= -\sigma\upsilon\nu 15^\circ = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

iii) Παρατηρούμε ότι
 $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$.

Επομένως,

$$\begin{aligned} \eta\mu 75^\circ &= \eta\mu(90^\circ - 15^\circ) \\ &= \sigma\upsilon\nu 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

iv) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 75^\circ &= \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 15^\circ) \\ &= \eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Σημείωση

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν **αντίθετο ημίτονο** και **συνημίτονο**, ενώ έχουν την **ίδια εφαπτομένη** και **συνεφαπτομένη**. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \eta\mu(180^\circ + \omega) &= -\eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) &= -\sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi(180^\circ + \omega) &= \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi(180^\circ + \omega) &= \sigma\phi\omega \end{aligned}$$

Σημείωση

Στις γωνίες με άθροισμα 90° το **ημίτονο καθεμιάς** ισούται με το **συνημίτονο της άλλης** και **η εφαπτομένη καθεμιάς** με τη **συνεφαπτομένη** της άλλης. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \eta\mu(90^\circ - \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) &= \eta\mu\omega \\ \epsilon\phi(90^\circ - \omega) &= \sigma\phi\omega \\ \sigma\phi(90^\circ - \omega) &= \epsilon\phi\omega \end{aligned}$$

20. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i) } A = \frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)}{\eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta)}$$

$$\text{ii) } B = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) \cdot \varepsilon\varphi(11\pi + \theta) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(17\pi + \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2} + \theta\right)}.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu(-\theta) &= -\eta\mu\theta, & \eta\mu(180^\circ - \theta) &= \eta\mu\theta, \\ \eta\mu(180^\circ + \theta) &= -\eta\mu\theta & \text{και } \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) &= \eta\mu\theta. \end{aligned}$$

Άρα,

$$A = \frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta)}{\eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta)} = \frac{-\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta}{-\eta\mu\theta \cdot \eta\mu\theta} = 1.$$

ii) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\varepsilon\varphi(11\pi + \theta) = \varepsilon\varphi(10\pi + \pi + \theta) = \varepsilon\varphi(\pi + \theta) = \varepsilon\varphi\theta,$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(6\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\sigma\upsilon\nu(17\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu(16\pi + \pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta,$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\varphi\left(10\pi - \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\varepsilon\varphi\theta.$$

Επομένως,

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) \cdot \varepsilon\varphi(11\pi + \theta) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{13\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(17\pi + \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{19\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{(-\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \varepsilon\varphi\theta \cdot (-\sigma\upsilon\nu\theta)}{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (-\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot (-\varepsilon\varphi\theta)} = 1.$$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i) } A = \frac{\sigma\varphi(-\theta) \cdot \eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta)}{\sigma\varphi(270^\circ - \theta)}$$

$$\text{ii) } B = \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \varepsilon\varphi(11\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\theta)}.$$

Λύση

i) Έχουμε

- $\sigma\varphi(-\theta) = -\sigma\varphi\theta$
- $\eta\mu(180^\circ + \theta) = -\eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) = \eta\mu\theta$
- $\sigma\varphi(270^\circ - \theta) = \varepsilon\varphi\theta$.

Επομένως,

$$A = \frac{(-\sigma\varphi\theta) \cdot (-\eta\mu\theta) \eta\mu\theta}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{\sigma\varphi\theta \cdot \eta\mu^2\theta}{\varepsilon\varphi\theta} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} \cdot \eta\mu^2\theta}{\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} = \sigma\upsilon\nu^2\theta.$$

ii) Έχουμε

- $\sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\varepsilon\varphi(11\pi - \theta) = \varepsilon\varphi(10\pi + \pi - \theta) = \varepsilon\varphi(\pi - \theta) = -\varepsilon\varphi\theta$
- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\eta\mu\theta$
- $\eta\mu(\pi - \theta) = \eta\mu\theta$
- $\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$.

Επομένως,

$$A = \frac{(-\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot (-\varepsilon\varphi\theta) \cdot (-\eta\mu\theta)}{\eta\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = -\frac{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta \cdot \eta\mu\theta}{\eta\mu\theta \cdot \varepsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = -1.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

44. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

i) -30° ii) 120° iii) $\frac{5\pi}{4}^{\text{rad}}$.

45. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

i) $\frac{11\pi}{4}^{\text{rad}}$ ii) $\frac{7\pi}{3}^{\text{rad}}$ iii) $\frac{-23\pi}{6}^{\text{rad}}$.

46. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 120^\circ \cdot \eta\mu 135^\circ \cdot \eta\mu 150^\circ = \frac{\sqrt{6}}{8}$ ii) $\epsilon\phi 210^\circ \cdot \epsilon\phi 225^\circ \cdot \epsilon\phi 240^\circ = 1$.

47. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^2 \frac{\pi}{5} + \eta\mu^2 \frac{3\pi}{10} = 1$ ii) $1 + \epsilon\phi \frac{\pi}{7} \epsilon\phi \frac{9\pi}{14} = 0$.

48. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 450^\circ + \epsilon\phi 190^\circ + \sigma\phi 80^\circ = 1 + 2\epsilon\phi 10^\circ$
 ii) $\eta\mu 220^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 50^\circ + \epsilon\phi 240^\circ = \sqrt{3} + \eta\mu 40^\circ$.

49. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 150^\circ$ ii) $\epsilon\phi 120^\circ \cdot \epsilon\phi 135^\circ \cdot \epsilon\phi 150^\circ$.

50. Δίνεται ότι

$$\epsilon\phi 75^\circ = 2 + \sqrt{3}.$$

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\sigma\phi 75^\circ$ ii) $\sigma\phi 15^\circ$ iii) $\epsilon\phi 15^\circ$.

51. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu\omega + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) + \eta\mu(\pi + \omega) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = 0$

ii) $\frac{\eta\mu(\pi + \omega) - 1}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \omega)} + \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)} = 0$.

52. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad \eta\mu(\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = 1$$

$$\text{ii)} \quad 1 - \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \varepsilon\varphi(\pi + x) = \frac{1}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(18\pi + x)}.$$

53. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^2 \frac{3\pi}{8} = 1$$

$$\text{ii)} \quad \varepsilon\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = 1.$$

54. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\theta) \cdot \eta\mu(\pi + \theta)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\theta - 2\pi) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = 1$$

55. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{i)} \quad \eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu A$$

$$\text{ii)} \quad \varepsilon\varphi \frac{B + \Gamma}{2} = \sigma\varphi \frac{A}{2}$$

$$\text{iii)} \quad \sigma\upsilon\nu(2A + B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu A = 0.$$

56. Αν ισχύει η σχέση $\alpha - \beta = \pi$, να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu(\alpha + \gamma) \cdot \eta\mu(\alpha + \delta) = \eta\mu(\beta + \gamma) \cdot \eta\mu(\beta + \delta).$$

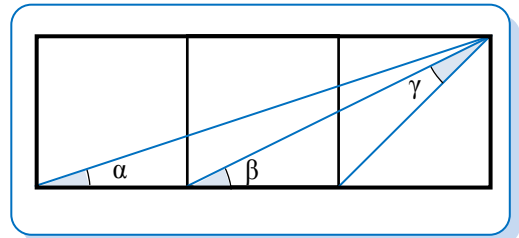
57. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τρία τετράγωνα πλευράς 1 και τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$.

i) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\varepsilon\varphi\alpha, \varepsilon\varphi\beta \text{ και } \varepsilon\varphi\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right).$$

ii) Να αποδείξετε ότι $\hat{\beta} + \hat{\gamma} = \frac{\pi}{4}$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 2\beta = \sigma\upsilon\nu 2\gamma$.



Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ορισμός

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική** αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει

$$x + T \in A, \quad x - T \in A$$

και

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Ο θετικός πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μία μόνο τιμή του $\eta\mu(x^{\text{rad}}) = \eta\mu x$, με $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$. Έτσι ορίζουμε μια συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται στο $\eta\mu(x^{\text{rad}}) = \eta\mu x$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **συνάρτηση ημίτονο**, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$ και τύπο

$$f(x) = \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Επειδή ισχύει

$$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή

$$f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

η συνάρτηση ημίτονο είναι **περιοδική** με περίοδο $T = 2\pi$. Για τον λόγο αυτό αρκεί να μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτή σε ένα διάστημα πλάτους 2π . Για παράδειγμα στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

- Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι:

- γνησίως **αύξουσα** στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- γνησίως **φθίνουσα** στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- γνησίως **φθίνουσα** στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

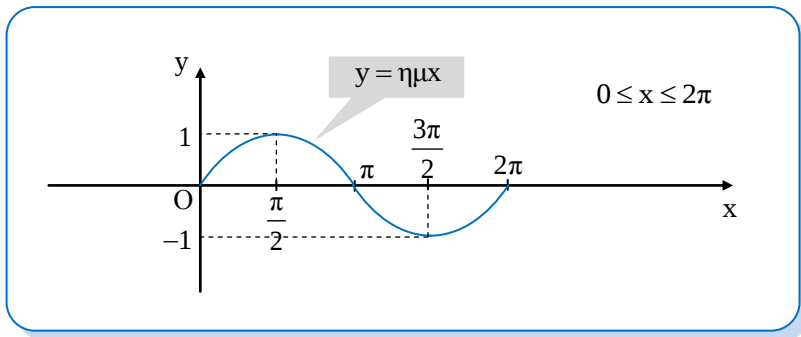
Πίνακας Μονοτονίας
της $f(x) = \eta\mu x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$					

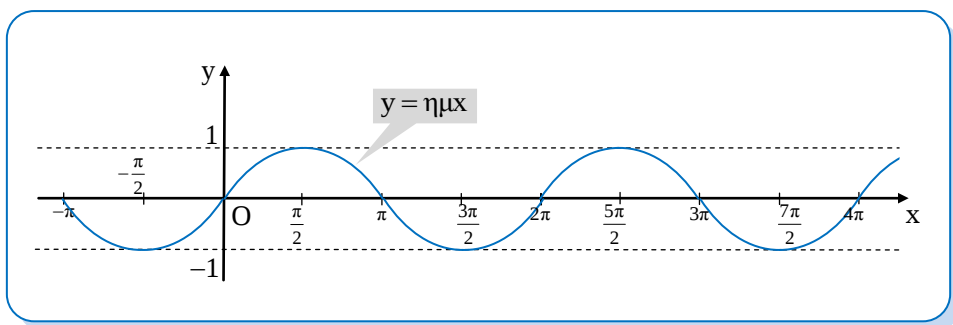
- γνησίως **αύξουσα** στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
- Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παρουσιάζει:
 - **μέγιστο** για $x = \frac{\pi}{2}$, το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$
 - **ελάχιστο** για $x = \frac{3\pi}{2}$, το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{3\pi}{2} = -1$.
- Τα παραπάνω συνοψίζονται στον παρακάτω **πίνακα μεταβολών**:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	1 max	0	-1 min	0

- Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ κ.τ.λ. καθώς και στα διαστήματα $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ κ.τ.λ. Έτσι έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης ημίτονο η οποία λέγεται **ημιτονοειδής καμπύλη**.



Παρατηρούμε ότι:

$$f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι **περιττή** και συνεπώς η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μία μόνο τιμή του $\sigma\upsilon\nu(x^{\text{rad}}) = \sigma\upsilon\nu x$, με $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$.

Έτσι ορίζουμε μια συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζεται στο $\sigma\upsilon\nu(x^{\text{rad}}) = \sigma\upsilon\nu x$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **συνάρτηση συνημίτονο**, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$, σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$ και τύπο

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Επειδή ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu(x + 2\pi) = \sigma\upsilon\nu(x - 2\pi) = \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή

$$f(x + 2\pi) = f(x - 2\pi) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

η συνάρτηση συνημίτονο είναι **περιοδική** με περίοδο $T = 2\pi$. Για τον λόγο αυτό αρκεί να μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτή σε ένα διάστημα πλάτους 2π . Για παράδειγμα στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Πίνακας Μονοτονίας της $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$

- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι:

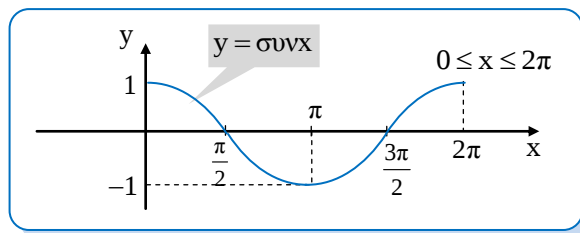
- γνησίως **φθίνουσα** στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- γνησίως **φθίνουσα** στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx					

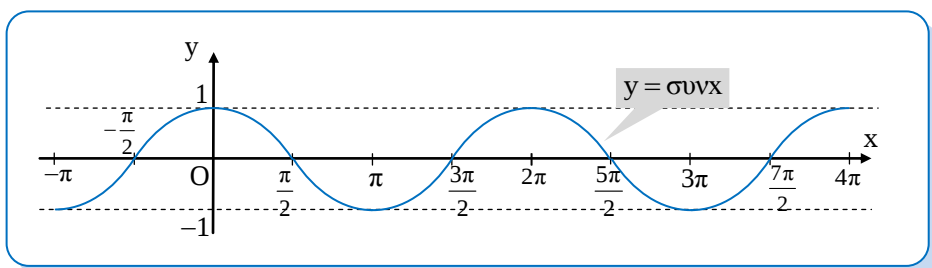
- γνησίως **αύξουσα** στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$
- γνησίως **αύξουσα** στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
- Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ παρουσιάζει:
 - **μέγιστο** για $x = 0$ και για $x = 2\pi$, το $f(0) = \sin 0 = 1 = f(2\pi)$
 - **ελάχιστο** για $x = \pi$, το $f(\pi) = \sin \pi = -1$.
- Τα παραπάνω συνοψίζονται στον παρακάτω **πίνακα μεταβολών**:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	1 max	0	min -1	0	1 max

- Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης **συνήμιτονο** στο διάστημα $[0, 2\pi]$:



Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ η γραφική της παράσταση έχει την ίδια μορφή στα διαστήματα $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$ κ.τ.λ. καθώς και στα διαστήματα $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ κ.τ.λ. Έτσι έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης **συνήμιτονοειδής καμπύλη**.



Παρατηρούμε ότι:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ είναι **άρτια** και συνεπώς η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$.

Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ υπάρχει μία μόνο τιμή της $\tan(x^{\text{rad}}) = \tan x$. Έτσι ορίζουμε μια συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ αντιστοιχίζεται στην $\tan(x^{\text{rad}}) = \tan x$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **συνάρτηση εφαπτομένη**, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$, σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και τύπο

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \cos x = 0\}.$$

- Επειδή ισχύει

$$\tan(x + \pi) = \tan(x - \pi) = \tan x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \cos x = 0\},$$

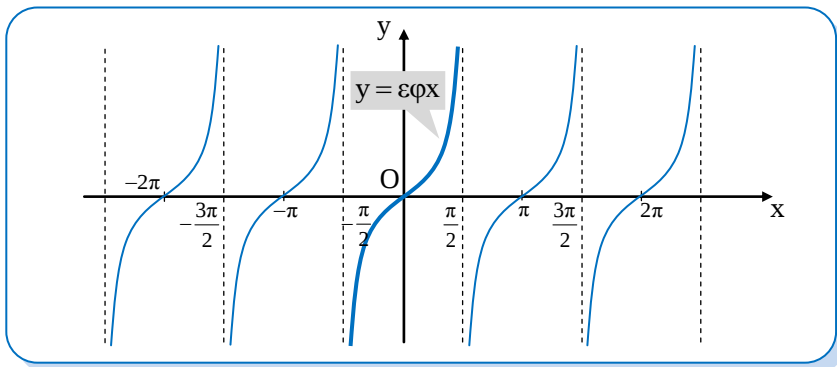
δηλαδή

$$\tan(x + \pi) = \tan(x - \pi) = \tan x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \cos x = 0\},$$

η συνάρτηση εφαπτομένη είναι **περιοδική** με περίοδο $T = \pi$. Για τον λόγο αυτό αρκεί να μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτή σε ένα διάστημα πλάτους π . Για παράδειγμα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Η συνάρτηση $f(x) = \tan x$ είναι γνησίως **αύξουσα** στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Οι

ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφες ασύμπτωτες** της γραφικής παράστασης της f , η οποία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι:

$$f(-x) = \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x = -f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}.$$

Άρα, η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι **περιττή** και συνεπώς η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$

- Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ υπάρχει μία μόνο τιμή της $\sigma\varphi(x^{\text{rad}}) = \sigma\varphi x$. Έτσι ορίζουμε μια συνάρτηση με την οποία κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ αντιστοιχίζεται στην $\sigma\varphi(x^{\text{rad}}) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **συνάρτηση συνεφαπτομένη**, έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$, σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, και τύπο

$$f(x) = \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}.$$

- Επειδή ισχύει

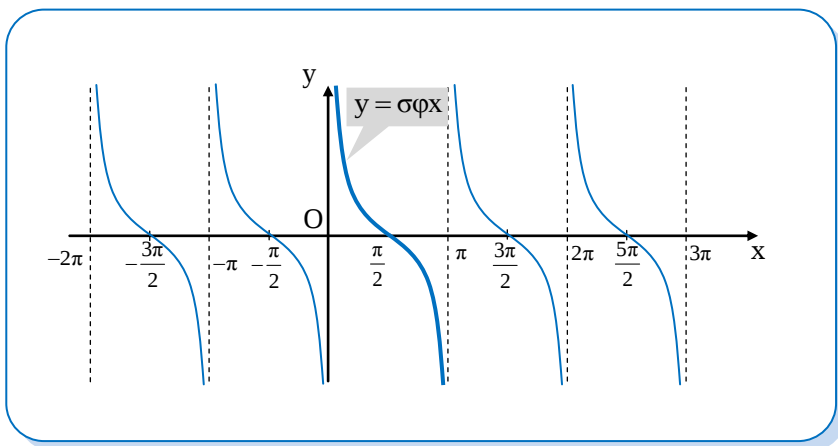
$$\sigma\varphi(x + \pi) = \sigma\varphi(x - \pi) = \sigma\varphi x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\},$$

δηλαδή

$$f(x + \pi) = f(x - \pi) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\},$$

η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι **περιοδική** με περίοδο $T = \pi$. Για τον λόγο αυτό αρκεί να μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτή σε ένα διάστημα πλάτους π . Για παράδειγμα στο διάστημα $(0, \pi)$.

- Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι γνησίως **φθίνουσα** στο διάστημα $(0, \pi)$. Οι ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$ είναι **κατακόρυφες ασύμπτωτες** της γραφικής παράστασης της f , η οποία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε ότι:

$$f(-x) = \sigma\phi(-x) = -\sigma\phi x = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}.$$

Άρα, η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι **περιττή** και συνεπώς η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$

Η συνάρτηση **$f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$** όπου ρ, ω σταθεροί θετικοί αριθμοί:

- έχει **μέγιστη** τιμή ίση με ρ και **ελάχιστη** τιμή ίση με $-\rho$.
- είναι **περιοδική** με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
- έχει διαστήματα μονοτονίας τα διαστήματα που προκύπτουν αν διαιρέσουμε καθένα από τα άκρα $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης $\eta\mu x$ με τον αριθμό ω .

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση

$$f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu(\omega x), \text{ όπου } \rho, \omega > 0.$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu 2x$, έχει μέγιστη τιμή το 3, ελάχιστη τιμή το -3 και περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Διαιρώντας καθένα από τα άκρα

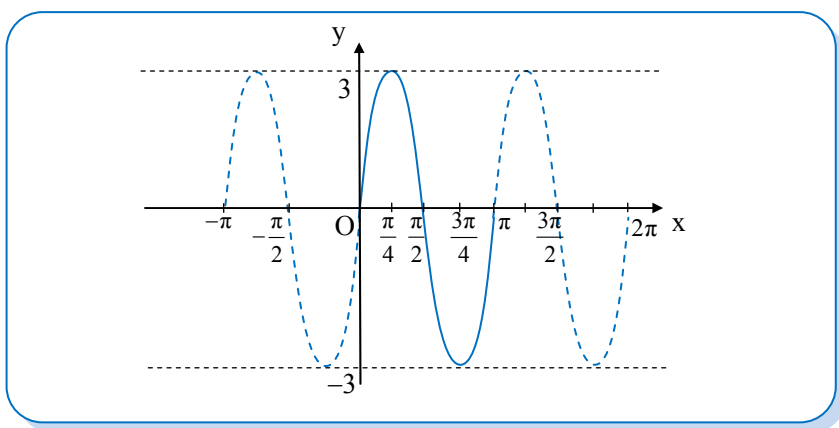
$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης $\eta\mu x$ με τον αριθμό $\omega = 2$, προκύπτουν τα άκρα

$$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$$

των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης f , στο διάστημα $[0, \pi]$. Έχουμε λοιπόν τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και τη γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, \pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
f(x)	0	3 max	0	-3 min	0



Παράδειγμα

Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 6\sin(4x + 8), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Η συνάρτηση $\varphi(x) = 6\sin 4x$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, μέγιστη τιμή 6 και ελάχιστη τιμή -6. Παρατηρούμε ότι

$$\varphi(x+2) = 6\sin[4(x+2)] = 6\sin(4x+8) = f(x)$$

και συνεπώς η C_f προκύπτει από τη C_φ με μια οριζόντια μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Άρα, και η συνάρτηση f έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{2}$, μέγιστη τιμή 6 και ελάχιστη τιμή -6.

Λυμένες Ασκήσεις

22. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε την περίοδο T της συνάρτησης f .
- iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Λύση

- i) Η συνάρτηση

$$g(x) = \eta\mu 4x, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη τιμή το -1. Άρα, η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2}\eta\mu 4x, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μέγιστη τιμή το $\frac{1}{2}$ και ελάχιστη τιμή το $-\frac{1}{2}$.

- ii) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\eta\mu x$, άρα και η συνάρτηση

$$\frac{1}{2}\eta\mu x,$$

είναι περιοδική με περίοδο 2π . Δηλαδή, κάθε τιμή της συνάρτησης

$$\frac{1}{2}\eta\mu x$$

επαναλαμβάνεται αν το x αυξηθεί κατά 2π .

Σημείωση

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική** αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει

$$x + T \in A, \quad x - T \in A$$

και

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$

Ο θετικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Σημείωση

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \rho\eta\mu\omega x, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου ρ, ω σταθεροί θετικοί αριθμοί.

- Η συνάρτηση f έχει **μέγιστη** τιμή ίση με ρ και **ελάχιστη** τιμή ίση με $-\rho$.

- Η συνάρτηση f είναι **περιοδική** με περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Τα παραπάνω συμπεράσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση

$$f(x) = \rho\sigma\upsilon\nu\omega x, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου ρ, ω σταθεροί θετικοί αριθμοί.

Επομένως, κάθε τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{2} \eta \mu 4x$$

επαναλαμβάνεται αν το $4x$ αυξηθεί κατά 2π ή ισοδύναμα όταν το x αυξηθεί κατά

$$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Άρα, η συνάρτηση f έχει περίοδο

$$T = \frac{\pi}{2}.$$

- iii) Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης f στο διάστημα

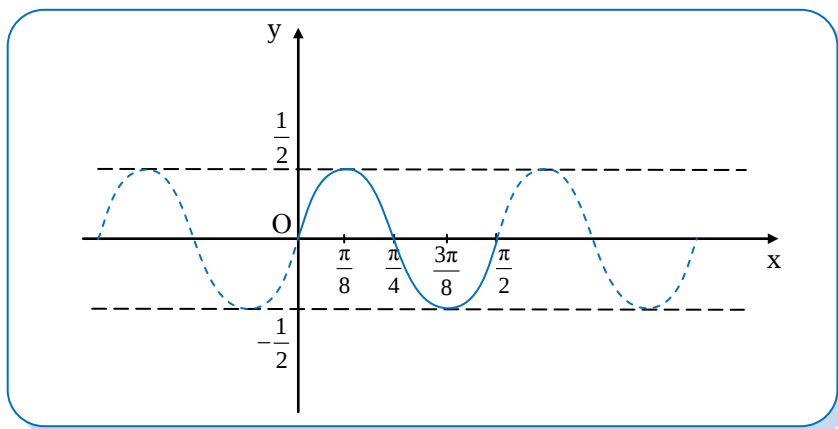
$$\left[0, T\right] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

Παρατήρηση

Η μελέτη και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι περιοδική με περίοδο T αρκεί να γίνει σε ένα διάστημα, υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, πλάτους T .

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



23. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha}{4} \eta \mu \alpha x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$$

η οποία έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{4}$. Να βρείτε:

- i) τον αριθμό α
- ii) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f
- iii) τα διαστήματα μονοτονίας της f στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Λύση

i) Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha}{4} \eta \mu \alpha x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$$

έχει περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Επομένως,

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \pi\alpha = 8\pi \Leftrightarrow \alpha = 8.$$

ii) Για $\alpha = 8$ η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha}{4} \eta \mu \alpha x = 2 \eta \mu 8x, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μέγιστη τιμή 2 και ελάχιστη -2.

iii) Διαιρώντας τα άκρα $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης $\eta \mu x$ με τον αριθμό $\alpha = 8$, προκύπτουν τα άκρα $0, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}$ των διαστημάτων μονοτονίας της f . Έτσι, έχουμε τον πίνακα:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{\pi}{4}$
f(x)					

Άρα, $f \uparrow \left[0, \frac{\pi}{16}\right]$, $f \downarrow \left[\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}\right]$, $f \downarrow \left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{16}\right]$ και $f \uparrow \left[\frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{4}\right]$.

24. Έστω δύο γωνίες x_1 και x_2 τέτοιες, ώστε

$$\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}.$$

Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu\left(x_1 + \frac{\pi}{6}\right)$ και $\eta\mu\left(x_2 + \frac{\pi}{6}\right)$

ii) $\sigma\upsilon\nu(3x_1)$ και $\sigma\upsilon\nu(3x_2)$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} < x_1 + \frac{\pi}{6} < x_2 + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x_1 + \frac{\pi}{6} < x_2 + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}.$$

Όμως, η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x$$

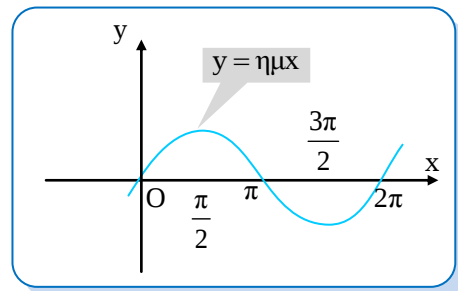
είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \text{ Επομένως,}$$

$$f\left(x_1 + \frac{\pi}{6}\right) < f\left(x_2 + \frac{\pi}{6}\right)$$

δηλαδή

$$\eta\mu\left(x_1 + \frac{\pi}{6}\right) < \eta\mu\left(x_2 + \frac{\pi}{6}\right).$$



Σημείωση

Η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x$$

είναι

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left[\frac{3\pi}{2}, \pi\right].$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{6} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{\pi}{6} < 3x_1 < 3x_2 < 3 \cdot \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 3x_1 < 3x_2 < \pi.\end{aligned}$$

Όμως, η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

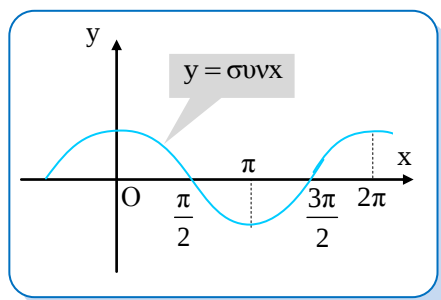
$$\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Επομένως,

$$f(3x_1) > f(3x_2)$$

δηλαδή

$$\sin(3x_1) > \sin(3x_2).$$



Σημείωση

Η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x$$

είναι

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\pi, 2\pi]$.

25. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a \sin bx, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου a, b σταθεροί θετικοί αριθμοί. Αν η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή 5 και περίοδο

$$T = \frac{4\pi}{5},$$

τότε:

i) να βρείτε τους αριθμούς a και b

ii) να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

i) Η συνάρτηση

$$f(x) = a \sin bx, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μέγιστη τιμή a και περίοδο

$$T = \frac{2\pi}{b},$$

αφού $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Επομένως,

$$\alpha = 5 \quad \text{και} \quad \frac{2\pi}{\beta} = \frac{4\pi}{5}.$$

Τελικά

$$\alpha = 5 \quad \text{και} \quad \beta = \frac{5}{2}.$$

ii) Αξιοποιώντας το ερώτημα i) έχουμε

$$f(x) = 5\eta\mu \frac{5x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο $\frac{4\pi}{5}$, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους $\frac{4\pi}{5}$, π.χ. στο διάστημα $\left[0, \frac{4\pi}{5}\right]$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τον πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης $\eta\mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$					

Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης

$$f(x) = 5\eta\mu \frac{5x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

στο διάστημα $\left[0, \frac{4\pi}{5}\right]$ προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα διαιρώντας καθένα από τα άκρα

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης

$\eta\mu x$

με τον αριθμό $\frac{5}{2}$. Έτσι έχουμε τον πίνακα

Σημείωση

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \rho\eta\mu\omega x, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου ρ, ω σταθεροί θετικοί αριθμοί. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f προκύπτουν διαιρώντας τα άκρα των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης $\eta\mu x$ με τον αριθμό ω . Το είδος της μονοτονίας δεν αλλάζει.

x	0	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$
f(x)					

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right]$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\right]$.

26. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sin x - 1, x \in [0, 2\pi]$ ii) $g(x) = \varepsilon\phi x + 2, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

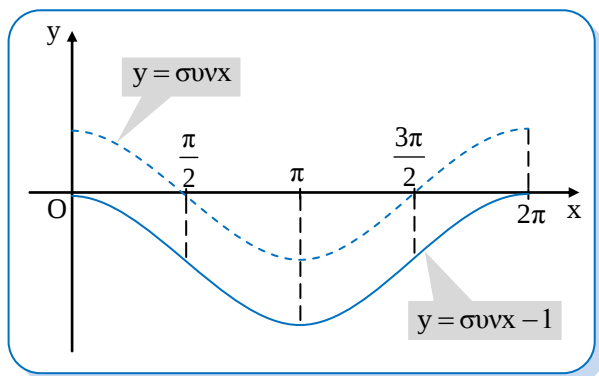
i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \sin x - 1, x \in [0, 2\pi]$$

προκύπτει μετατοπίζοντας κατακόρυφα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$\sin x$

1 μονάδα προς τα κάτω.



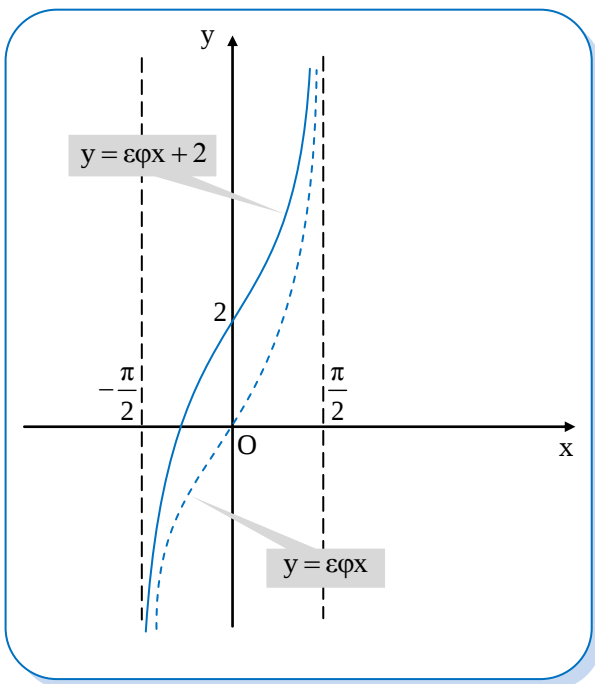
- ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \varepsilon\varphi x + 2, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

προκύπτει μετατοπίζοντας κατακόρυφα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\varepsilon\varphi x$$

2 μονάδες προς τα πάνω.



Προτεινόμενες Ασκήσεις

58. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 3\eta\mu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

και

$$g(x) = 3\eta\mu(-x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

59. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, 2\pi]$$

και

$$g(x) = 2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

στο ίδιο σύστημα αξόνων.

60. Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu \frac{\pi}{8}$ και $\eta\mu \frac{\pi}{7}$

ii) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{10}$ και $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{9}$

iii) $\epsilon\phi \frac{2\pi}{5}$ και $\epsilon\phi \frac{3\pi}{10}$.

61. Έστω δύο γωνίες x_1, x_2 τέτοιες, ώστε

$$\frac{\pi}{12} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{4}.$$

Να συγκρίνετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu 2x_1$ και $\eta\mu 2x_2$

ii) $\sigma\upsilon\nu\left(3x_1 - \frac{\pi}{4}\right)$ και $\sigma\upsilon\nu\left(3x_2 - \frac{\pi}{4}\right)$

iii) $\epsilon\phi\left(x_1 - \frac{\pi}{3}\right)$ και $\epsilon\phi\left(x_2 - \frac{\pi}{3}\right)$.

62. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\eta\mu 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

ii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

63. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -2\eta\mu \frac{x}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

ii) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

iii) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε διάστημα πλάτους μίας περιόδου.

64. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\eta\mu x - 1, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $-5 \leq f(x) \leq 3$ για κάθε $[0, 2\pi]$
- ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

65. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |\eta\mu x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x + \pi) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

66. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε την τιμή $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή το 0.

67. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = |\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- ii) $0 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- iii) ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

- iv) ο αριθμός 2 δεν είναι μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .

68. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a\sigma\upsilon\nu 2x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η γραφική παράσταση της συνάρ-

τησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$, τότε:

- i) να βρείτε τους α και β
- ii) να αποδείξετε ότι $1 \leq f(x) \leq 7$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

69. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu x + 5, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

- i) Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 6$.

70. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \sin x + \beta, \quad x \in [0, \pi]$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 1)$ και $B\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$, τότε:

- i) να βρείτε τους αριθμούς α και β
- ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- iii) να λύσετε την ανίσωση $f(2x) < 0$.

71. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A < B$ τέτοιο, ώστε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\epsilon\phi A$ και $\epsilon\phi B$ να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και να αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

- i) Να βρείτε την $\epsilon\phi A$ και την $\epsilon\phi B$.
- ii) Να αποδείξετε ότι $A > \frac{\pi}{4}$.
- iii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι οξυγώνιο.

72. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\epsilon\phi A$ και $\epsilon\phi B$ να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και να αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - x - 11 = 0.$$

- i) Να βρείτε το άθροισμα $\epsilon\phi A + \epsilon\phi B$ και το γινόμενο $\epsilon\phi A \epsilon\phi B$.
- ii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.
- iii) Αν επιπλέον η γωνία A είναι αμβλεία, να αποδείξετε ότι $B > \frac{\pi}{4}$.

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

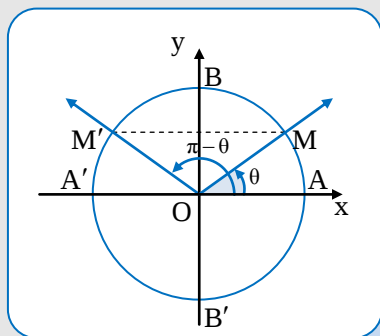
Βασικές Εξισώσεις

Οι ρίζες της εξίσωσης

$$\eta\mu x = \eta\mu\theta$$

δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

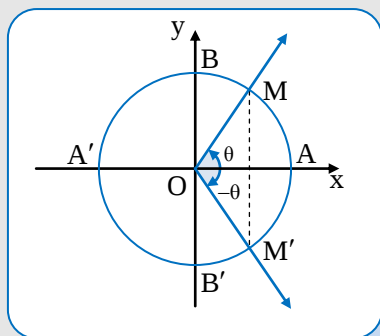


Οι ρίζες της εξίσωσης

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$$

δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Οι ρίζες της εξίσωσης

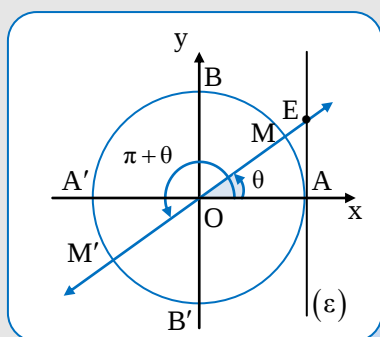
$$\epsilon\varphi x = \epsilon\varphi\theta$$

δίνονται από τον τύπο

$$x = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Από τον ίδιο τύπο δίνονται και οι ρίζες της εξίσωσης

$$\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta.$$



Παράδειγμα

- Οι ρίζες της εξίσωσης $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{5}$ δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{5} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{5}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή,

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{5} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{5}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- Οι ρίζες της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{10}$ προκύπτουν από τους τύπους

$$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{10} \quad \text{ή} \quad 2x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{10}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{20} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi - \frac{\pi}{20}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- Οι ρίζες της εξίσωσης $\epsilon\varphi\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \epsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ προκύπτουν από τον τύπο

$$5x - \frac{\pi}{3} = \kappa\pi + x + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Οπότε, έχουμε

$$5x - \frac{\pi}{3} = \kappa\pi + x + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x - x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

- Για να λύσουμε εξισώσεις των μορφών

$$\eta\mu x = \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu x = \beta, \quad \epsilon\varphi x = \gamma \quad \text{με} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

βρίσκουμε γωνία θ , τέτοια, ώστε $\eta\mu\theta = \alpha$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \beta$ ή $\epsilon\varphi\theta = \gamma$ και καταλήγουμε σε βασικές εξισώσεις.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ισοδύναμα γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα

Η εξίσωση $\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ισοδύναμα γράφεται

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \kappa\pi \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- Η επίλυση των εξισώσεων

$$\eta\mu x = 0, \quad \eta\mu x = \pm 1, \quad \sigma\upsilon\nu x = 0, \quad \sigma\upsilon\nu x = \pm 1$$

γίνεται εύκολα με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου. Πράγματι:

$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

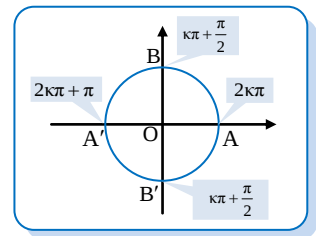
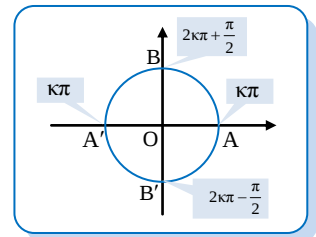
$$\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$



- Για να λύσουμε εξισώσεις των μορφών

$$\eta\mu x = -\eta\mu\theta, \quad \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\theta, \quad \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\theta$$

αξιοποιούμε τους τύπους

$$\eta\mu(-\theta) = -\eta\mu\theta, \quad \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta, \quad \varepsilon\varphi(-\theta) = -\varepsilon\varphi\theta$$

και καταλήγουμε σε βασικές εξισώσεις.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ ισοδύναμα γράφεται

$$\eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Άρα, οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right), \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Δηλαδή,

$$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα

Η εξίσωση $2\sin 4x = -\sqrt{3}$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\sin 4x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 4x = -\sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sin 4x = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \\ \Leftrightarrow \sin 4x &= \sin \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 4x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{5\pi}{24}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- Για να λύσουμε εξισώσεις των μορφών

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\theta, \quad \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\theta, \quad \epsilon\varphi x = \sigma\varphi\theta$$

αξιοποιούμε τους τύπους

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta, \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\theta, \quad \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\theta$$

και καταλήγουμε σε βασικές εξισώσεις.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $\epsilon\varphi\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sigma\varphi x$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\epsilon\varphi\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) &= \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} - x, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 4x &= k\pi + \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- Για να λύσουμε πιο πολύπλοκες τριγωνομετρικές εξισώσεις ακολουθούμε συνήθως τις παρακάτω μεθόδους:
 - Μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε ισοδύναμή της, στην οποία το πρώτο μέλος είναι **γινόμενο** και το δεύτερο μέλος είναι **μηδέν**.
 - Εκτελούμε κατάλληλη **αντικατάσταση** για να οδηγηθούμε σε μία απλούστερη εξίσωση (συνήθως πολυωνυμική).

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$\epsilon\varphi x \cdot \eta\mu x = \epsilon\varphi x.$$

Λύση

Επειδή, $\varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ η δοθείσα εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \quad (1)$$

Για αυτές τις τιμές του x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται.

$$\varepsilon\phi x \cdot \eta\mu x - \varepsilon\phi x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\phi x(\eta\mu x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\phi x = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι από τις παραπάνω τιμές, μόνο οι τιμές $x = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ικανοποιούν τη σχέση (1) και συνεπώς μόνο αυτές οι τιμές είναι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x + 3 = \eta\mu^2 x$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x.$$

Επομένως η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x + 3 = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 5\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0.$$

Αν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu x = \omega$ η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0.$$

Πρόκειται για εξίσωση β' βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 9$. Άρα, έχουμε

$$\omega = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow \omega = 2 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{1}{2}.$$

- Για $\omega = 2$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x = 2 \quad \text{που είναι αδύνατο, αφού } 2 > 1.$$

- Για $\omega = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Λυμένες Ασκήσεις

27. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu x, \quad x \in [0, \pi].$$

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = \frac{1}{2}.$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$(f(x))^2 = 2f(x).$$

Λύση

i) Οι τιμές της συνάρτησης

$$f(x) = 2\eta\mu x, \quad x \in [0, \pi]$$

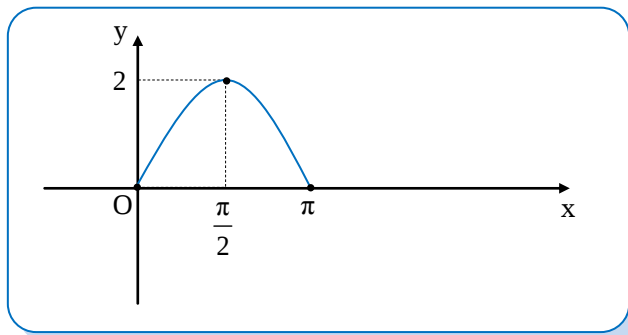
είναι προφανώς διπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης

$$\varphi(x) = \eta\mu x, \quad x \in [0, \pi].$$

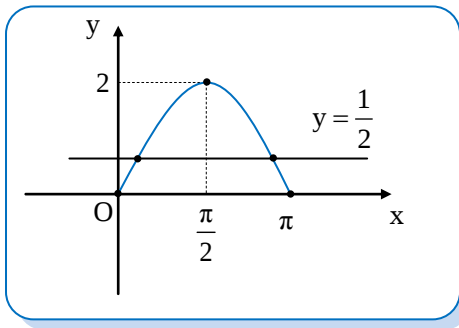
Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$2\eta\mu x$	0	2	0

Με τη βοήθεια αυτού του πίνακα σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



ii)

**Παρατήρηση**

Αντιμετωπίζοντας το πρόβλημα γεωμετρικά είναι φανερό ότι ζητάμε να βρούμε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία

$$y = \frac{1}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία

$$y = \frac{1}{2}$$

έχει ακριβώς δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f . Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (f(x))^2 - 2f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x) \cdot [f(x) - 2] &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ή } f(x) - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ ή } f(x) &= 2. \end{aligned}$$

- Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) δηλαδή, οι αριθμοί 0 και π .
- Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 2$ δηλαδή, ο αριθμός $\frac{\pi}{2}$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς τρεις ρίζες, τους αριθμούς

$$0, \frac{\pi}{2} \text{ και } \pi.$$

28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

iii) $\epsilon\phi x = 1$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

iv) $\sigma\phi x = \sqrt{3}$

Λύση

i) Έχουμε $\frac{1}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6}$. Άρα, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6}.$$

Επομένως, οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ii) Παρατηρούμε ότι $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$. Άρα, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}$$

Επομένως, οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iii) Παρατηρούμε ότι $1 = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$. Άρα, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}.$$

Επομένως, οι ρίζες της δίνονται από τον τύπο

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iv) Παρατηρούμε ότι $\sqrt{3} = \sigma\phi \frac{\pi}{6}$. Οπότε, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\sigma\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{6}.$$

Επομένως, οι ρίζες της δίνονται από τον τύπο

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Σημείωση

Οι ρίζες της εξίσωσης

$$\eta\mu x = \eta\mu \theta$$

δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Σημείωση

Οι ρίζες της εξίσωσης

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta$$

δίνονται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Σημείωση

Οι ρίζες της εξίσωσης

$$\epsilon\phi x = \epsilon\phi \theta$$

δίνονται από τον τύπο

$$x = \kappa\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Από τον ίδιο τύπο δίνονται και οι ρίζες της εξίσωσης

$$\sigma\phi x = \sigma\phi \theta.$$

29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ii)} \quad \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{iii)} \quad \epsilon\phi x = -\sqrt{3}$$

$$\text{iv)} \quad \sigma\phi x = -1.$$

Λύση

i) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\eta\mu x = -\eta\mu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{4} \right).$$

Οπότε, οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Σημείωση

Γνωρίζουμε ότι

$$-\eta\mu\theta = \eta\mu(-\theta)$$

$$-\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)$$

$$-\epsilon\phi\theta = \epsilon\phi(-\theta)$$

$$-\sigma\phi\theta = \sigma\phi(-\theta).$$

ii) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}.$$

Επομένως, οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iii) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\epsilon\phi = -\epsilon\phi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \left(-\frac{\pi}{3} \right).$$

Οπότε, οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iv) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\sigma\phi x = -\sigma\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi \left(-\frac{\pi}{4} \right).$$

Οπότε οι ρίζες της δίνονται από τους τύπους

$$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

30. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

ii) $3\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \sqrt{3}.$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} 3\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) &= \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) &= \epsilon\varphi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow -2x &= \kappa\pi - \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{24}, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7}$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

iii) $\epsilon\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{5}$

iv) $\epsilon\phi \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\phi x.$

Λύση

i) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} \right)$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{5\pi}{14}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{14} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{5\pi}{14}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right]$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{3} - x \right), \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad (\text{αδύνατον}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iii) $\epsilon\phi x = \sigma\phi \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{3\pi}{10}$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{3\pi}{10}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

iv) $\epsilon\phi \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sigma\phi x \Leftrightarrow \epsilon\phi \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \epsilon\phi \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Σημείωση

Γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\sigma\phi\theta = \epsilon\phi \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\epsilon\phi\theta = \sigma\phi \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right).$$

32. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{3}\epsilon\phi x = 1, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Λύση

Έχουμε

$$\sqrt{3}\epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως,

$$x \in (0, 2\pi).$$

Δηλαδή,

$$0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \kappa\pi + \frac{\pi}{6} < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} < \kappa\pi < \frac{11\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} < \kappa < \frac{11}{6}.$$

Και επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\kappa = 0 \quad \text{ή} \quad \kappa = 1.$$

Άρα, οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης είναι

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$$

Μεθοδολογία

Αρχικά, λύνουμε την εξίσωση αδιαφορώντας για τον περιορισμό $x \in (0, 2\pi)$.

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Στη συνέχεια, απαιτώντας να ισχύει η συνθήκη

$$x \in (0, 2\pi)$$

δηλαδή

$$0 < x < 2\pi$$

εγκλωβίζουμε τον ακέραιο κ ανάμεσα σε δύο ρητούς αριθμούς.

33. Να λύσετε στο διάστημα $(0, \pi)$ την εξίσωση

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin 2x = 0.$$

Λύση

• Έχουμε

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = -\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin(\pi - 2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi + \pi - 2x \\ \text{ή} \\ 2x + \frac{\pi}{5} = 2k\pi - \pi + 2x, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ή} \\ \frac{\pi}{5} = (2k\pi - 1)\pi, \text{ που είναι αδύνατο} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x = 2k\pi + \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

• Όμως

$$\begin{aligned} x \in (0, \pi) &\Leftrightarrow 0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{5} < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{5} < \frac{k\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{5} < \frac{k}{2} < \frac{4}{5} \Leftrightarrow -\frac{2}{5} < k < \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Και επειδή $k \in \mathbb{Z}$ συμπεραίνουμε ότι

$$k = 0 \quad \text{ή} \quad k = 1.$$

Από τον τύπο (1) για $k = 0$ και $k = 1$ παίρνουμε

$$x = \frac{\pi}{5} \quad \text{και} \quad x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} = \frac{7\pi}{10}.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση έχει στο διάστημα $(0, \pi)$ δύο ρίζες, τις

$$x_1 = \frac{\pi}{5} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{7\pi}{10}.$$

Σημείωση

Γνωρίζουμε ότι:

$$-\eta\mu\theta = \eta\mu(-\theta)$$

$$-\epsilon\varphi\theta = \epsilon\varphi(-\theta)$$

$$-\sigma\varphi\theta = \sigma\varphi(-\theta).$$

Όμως

$$-\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$$

34. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu^2x + \eta\mu^2x = 2\sigma\upsilon\nu x$

ii) $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\eta\mu x.$

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu^2x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$2\sigma\upsilon\nu^2x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2x = 2\sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατήρηση

Η παράσταση $2\sigma\upsilon\nu x$ στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης μας παρακινεί να αντικαταστήσουμε στο πρώτο μέλος το $\eta\mu^2x$ με $1 - \sigma\upsilon\nu^2x$ επικαλούμενοι τη βασική ταυτότητα

$$\eta\mu^2x + \sigma\upsilon\nu^2x = 1.$$

ii) Έχουμε

$$2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}\eta\mu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x (2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

35. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu x = \epsilon\phi x$

ii) $\epsilon\phi x \cdot \epsilon\phi 2x = -1$.

Λύση

i) Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\sin x \neq 0 \quad (1)$$

Για αυτές τις τιμές του x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$2\eta\mu x = \frac{\eta\mu x}{\sin x} \Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sin x = \eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu x \cdot \sin x - \eta\mu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \cdot (2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \quad \text{ή} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \quad \text{ή} \quad \sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

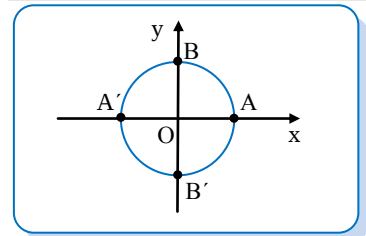
Παρατηρούμε ότι όλες οι παραπάνω τιμές του x ικανοποιούν τη συνθήκη (1) και συνεπώς είναι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Παρατήρηση

Γνωρίζουμε ότι

$$\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x}.$$

Άρα, το σύνολο στο οποίο ορίζεται η δοθείσα εξίσωση καθορίζεται από τη συνθήκη $\sin x \neq 0$.



Σημείωση

Η επίλυση των εξισώσεων

$$\eta\mu x = -1, \quad \sin x = -1,$$

$$\eta\mu x = 0, \quad \sin x = 0,$$

$$\eta\mu x = 1, \quad \sin x = 1$$

γίνεται εύκολα με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου.

ii) Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\sin x \neq 0 \quad \text{και} \quad \sin 2x \neq 0 \quad (1)$$

Για αυτές τις τιμές του x , η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\epsilon\phi 2x = \frac{-1}{\epsilon\phi x} \Leftrightarrow \epsilon\phi 2x = -\sigma\phi x \Leftrightarrow \epsilon\phi 2x = \epsilon\phi \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} + x, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Παρατηρούμε ότι καμία από τις παραπάνω τιμές του x δεν ικανοποιεί την πρώτη από τις συνθήκες (1). Άρα, η δοθείσα εξίσωση είναι αδύνατη.

36. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sin(\sin x) = 1.$$

Λύση

Έχουμε

$$\sin(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \sin x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

Όμως

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq 2k\pi \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2\pi} \leq k \leq \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow k = 0, \quad \text{αφού } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Άρα, η εξίσωση (1) γράφεται

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

37. Να λύσετε την εξίσωση

$$3\eta\mu^2 x - 8\eta\mu x + 4 = \sigma\upsilon\nu^2 x.$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$3\eta\mu^2 x - 8\eta\mu x + 4 = 1 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow 4\eta\mu^2 x - 8\eta\mu x + 3 = 0.$$

Αν θέσουμε $\eta\mu x = \omega$ η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$4\omega^2 - 8\omega + 3 = 0.$$

Πρόκειται για εξίσωση β' βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16.$$

Άρα,

$$\omega = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{8}$$

δηλαδή

$$\omega = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{3}{2}.$$

- Για $\omega = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

- Για $\omega = \frac{3}{2}$ έχουμε

$$\eta\mu x = \frac{3}{2}, \quad \text{αδύνατον αφού } \frac{3}{2} > 1.$$

Άρα, οι λύσεις της δοθείσας εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

38. Να λύσετε την εξίσωση

$$3\epsilon\phi^2 x - 4\sqrt{3}\epsilon\phi x + 3 = 0.$$

Λύση

Θέτουμε

$$\epsilon\phi x = \omega.$$

Οπότε η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$3\omega^2 - 4\sqrt{3}\omega + 3 = 0.$$

Πρόκειται για εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 48 - 36 = 12 > 0$$

και ρίζες

$$\omega = \frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{4\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6}.$$

Δηλαδή

$$\omega = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Για $\omega = \sqrt{3}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- Για $\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Άρα, οι λύσεις της δοθείσας εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

39. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\varepsilon\varphi x + 1}{1 - \varepsilon\varphi x} + \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{1 + \varepsilon\varphi x} = 4\varepsilon\varphi x.$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\sin x \neq 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi x \neq 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi x \neq -1. \quad (1)$$

Για αυτές τις τιμές του x έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon\varphi x + 1}{1 - \varepsilon\varphi x} + \frac{\varepsilon\varphi x - 1}{1 + \varepsilon\varphi x} &= 4\varepsilon\varphi x \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \varepsilon\varphi x)^2 - (1 - \varepsilon\varphi x)^2}{(1 - \varepsilon\varphi x)(1 + \varepsilon\varphi x)} &= 4\varepsilon\varphi x \\ \Leftrightarrow \frac{4\varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi^2 x} &= 4\varepsilon\varphi x\end{aligned}$$

Παρατήρηση

Ο τριγωνομετρικός αριθμός $\varepsilon\varphi x$ είναι ο μόνος που εμφανίζεται στη δοθείσα εξίσωση. Βρίσκουμε λοιπόν πρώτα την $\varepsilon\varphi x$ και στη συνέχεια βρίσκουμε το x .

$$\Leftrightarrow 4\epsilon\phi x = 4\epsilon\phi x \cdot (1 - \epsilon\phi^2 x)$$

$$\Leftrightarrow 4\epsilon\phi x = 4\epsilon\phi x - 4\epsilon\phi^3 x$$

$$\Leftrightarrow 4\epsilon\phi^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi 0$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι παραπάνω τιμές του x ικανοποιούν τις συνθήκες **(1)** και επομένως είναι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

40. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{7\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu(\pi + x)}{2\eta\mu x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = 2.$$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ισότητες

$$\eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$$

και

$$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x.$$

Οπότε, η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\frac{7\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} = 2$$

και προφανώς ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \quad (1)$$

Σχόλιο

Η εμφάνιση των τριγωνομετρικών αριθμών

$$\eta\mu(\pi + x) \text{ και } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

μας προκαλεί να αξιοποιήσουμε γνώσεις από την παράγραφο “Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο”.

Γι' αυτά τα x η παραπάνω εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 7\sin x - \eta\mu x &= 2(2\eta\mu x + \sin x) \\ \Leftrightarrow 7\sin x - \eta\mu x &= 4\eta\mu x + 2\sin x \\ \Leftrightarrow 5\sin x &= 5\eta\mu x \\ \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sin x} &= 1 \\ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x &= \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Αυτές οι τιμές του x επαληθεύουν τη συνθήκη **(1)** και συνεπώς είναι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Παρατήρηση

Η ισοδυναμία

$$\eta\mu x = \sin x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sin x} = 1$$

είναι έγκυρη διότι αν υπήρχε τιμή του x τέτοια, ώστε

$$\sin x = 0,$$

τότε θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$

πράγμα άτοπο.

41. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\varepsilon\varphi x = 3\sigma\varphi x$

ii) $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = 2.$

Λύση

- i) Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις $\sin x \neq 0$ και $\eta\mu x \neq 0$ **(1)**

Γι' αυτές τις τιμές του x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi x &= 3 \frac{1}{\varepsilon\varphi x} \\ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x &= 3 \\ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x &= \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x &= \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{3} \right) \\ \Leftrightarrow x &= \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι όλες οι τιμές του x που βρήκαμε ικανοποιούν τις συνθήκες **(1)** και συνεπώς αποτελούν τις ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Σημείωση

Γνωρίζουμε ότι

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sin x}, \sin x \neq 0$$

και

$$\sigma\varphi x = \frac{\sin x}{\eta\mu x}, \eta\mu x \neq 0.$$

Επομένως,

$$\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x}.$$

- ii) Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\sin x \neq 0$ και $\eta \mu x \neq 0$.
Γι' αυτά τα x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \operatorname{εφ} x + \frac{1}{\operatorname{εφ} x} &= 2 \\ \Leftrightarrow \operatorname{εφ}^2 x + 1 &= 2 \operatorname{εφ} x \\ \Leftrightarrow \operatorname{εφ}^2 x - 2 \operatorname{εφ} x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\operatorname{εφ} x - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{εφ} x &= 1 \\ \Leftrightarrow \operatorname{εφ} x &= \operatorname{εφ} \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \kappa \pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι όλες οι παραπάνω τιμές του x ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες και συνεπώς είναι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

42. Να λύσετε την εξίσωση

$$\operatorname{εφ}^4 x + \frac{1}{\sin^2 x} = 3.$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\sin x \neq 0.$$

Επίσης, γι' αυτά τα x από την ταυτότητα

$$\eta \mu^2 x + \sin^2 x = 1$$

διαιρώντας και τα δύο μέλη με $\sin^2 x$ προκύπτει η ταυτότητα

$$\operatorname{εφ}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Οπότε, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\operatorname{εφ}^4 x + \operatorname{εφ}^2 x + 1 = 3 \Leftrightarrow \operatorname{εφ}^4 x + \operatorname{εφ}^2 x - 2 = 0.$$

Σχόλιο

Εκφράζουμε την παράσταση

$$\frac{1}{\sin^2 x}$$

συναρτήσει της $\operatorname{εφ} x$ αξιοποιώντας την ταυτότητα

$$\operatorname{εφ}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Θέτοντας

$$\varepsilon\varphi^2 x = \omega$$

έχουμε

$$\omega^2 + \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega = -2.$$

Επομένως,

$$\bullet \quad \varepsilon\varphi^2 x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = -1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ή

$$\bullet \quad \varepsilon\varphi^2 x = -2, \text{ αδύνατη.}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης είναι οι αριθμοί

$$\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{και} \quad \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

43. Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = 0,$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\text{ii) } \varepsilon\varphi 2\alpha + \varepsilon\varphi 2\beta = 0.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \kappa\pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως,

$$\alpha + 2\beta = \alpha + 2(\kappa\pi - \alpha) = 2\kappa\pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

και συνεπώς

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + 2\beta) = \sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi - \alpha) = \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Σχόλιο

Από τη δοθείσα σχέση βρίσκουμε τις τιμές του $\alpha + \beta$ και στη συνέχεια εκφράζουμε το β συναρτήσει του α .

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\beta = \kappa\pi - \alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Οπότε,

$$2\beta = 2\kappa\pi - 2\alpha, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Άρα,

$$\varepsilon\phi 2\beta = \varepsilon\phi(2\kappa\pi - 2\alpha) = \varepsilon\phi(-2\alpha) = -\varepsilon\phi 2\alpha$$

και τελικά

$$\varepsilon\phi 2\alpha + \varepsilon\phi 2\beta = 0.$$

44. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε

$$\eta\mu(A - B) = \eta\mu(A - B) \cdot \eta\mu(A + B).$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.

Λύση

Έχουμε

$$\eta\mu(A - B) = \eta\mu(A + B)\eta\mu(A - B)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(A - B) - \eta\mu(A + B)\eta\mu(A - B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(A - B)[1 - \eta\mu(A + B)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(A - B) = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu(A + B) = 1.$$

- Αν $\eta\mu(A - B) = 0$, τότε

$$A - B = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή A, B γωνίες τριγώνου συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 0$.

Επομένως, $A = B$.

- Αν $\eta\mu(A + B) = 1$, τότε

$$A + B = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή A, B γωνίες τριγώνου συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 0$.

Επομένως, $A + B = \frac{\pi}{2}$ ή ισοδύναμα $\pi - \Gamma = \frac{\pi}{2}$ και τελικά

$$\Gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.

Σχόλιο

Αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο γωνίες του είναι ίσες ή μία γωνία του είναι ορθή.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

73. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = 1$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = 1$

iii) $\epsilon\varphi x = 0$

iv) $\sigma\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

74. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = -1$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $\epsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

iv) $\sigma\varphi x = -1$.

75. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(\eta\mu x + 1)(2\eta\mu x - 1) = 0$

ii) $(2\eta\mu x - \sqrt{2})(\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

iii) $(\epsilon\varphi x - 1)(\epsilon\varphi x - \sqrt{3}) = 0$

iv) $(4\eta\mu^2 x - 1)(\epsilon\varphi^2 x - 1) = 0$.

76. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

ii) $\epsilon\varphi\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

iii) $\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

iv) $\epsilon\varphi\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \epsilon\varphi\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

77. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \eta\mu x = 0$

78. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

ii) $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$.

79. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$

ii) $\epsilon\varphi 3x - \epsilon\varphi x = 0$

80. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x - 3 = 0$

ii) $\epsilon\varphi^2 x = \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)\epsilon\varphi x.$

81. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\eta\mu x - 4 = 0$

ii) $(2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x) = \eta\mu^2 x.$

82. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2 = 4\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$

ii) $2\eta\mu^2 \frac{x}{2} - 3\eta\mu \frac{x}{2} + 1 = 0.$

83. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - 2 = 0$$

είναι αδύνατη.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = 2(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x).$$

84. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 2 = 0$

ii) $2\epsilon\varphi^3 x - 2\epsilon\varphi^2 x + 3\epsilon\varphi x - 3 = 0.$

85. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $(2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$

ii) $\sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - \eta\mu^4 x.$

86. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x = 1 + \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) $\pi\epsilon\varphi x = 3\eta\mu x.$

87. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu x + \epsilon\phi x = 0$

ii) $2\eta\mu^2 x + \epsilon\phi^2 x = 2.$

88. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2\eta\mu x \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu x$

ii) $4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 3\epsilon\phi x.$

89. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x = \epsilon\phi x$

ii) $\epsilon\phi x \cdot \epsilon\phi 3x = 1.$

90. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 2 - \sigma\phi x$

ii) $\frac{1 + \epsilon\phi x}{1 - \epsilon\phi x} = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2.$

91. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu(\pi + x) + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1.$

ii) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = 2 - \sigma\phi x.$

92. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x + \epsilon\phi \frac{\pi}{5} \sigma\upsilon\nu x = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu x - \epsilon\phi \frac{\pi}{7} \eta\mu x = 0.$

93. Να λύσετε την εξίσωση

$$\epsilon\phi x = -1 \quad \text{στο διάστημα } (\pi, 4\pi).$$

94. Να λύσετε την εξίσωση

$$\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sigma\phi x \quad \text{στο διάστημα } (0, \pi).$$

95. Να λύσετε την εξίσωση

$$2\epsilon\phi x = \eta\mu x \quad \text{στο διάστημα} \quad [0, 3\pi).$$

96. Να λύσετε την εξίσωση

$$3\epsilon\phi^2 x - \epsilon\phi x - 4 = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

97. i) Να αποδείξετε ότι

$$(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$1 + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^3 x.$$

98. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu x = x^2 + 1.$$

99. Να λύσετε την εξίσωση

$$4^x \cdot \eta\mu \frac{\pi x}{2} = 2^{x^2+1}.$$

100. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (a_n) τέτοια, ώστε

$$a_5 = 1, \quad a_6 = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$a_7 = 1 + \sigma\upsilon\nu x,$$

$$\text{όπου } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

i) Να υπολογίσετε την τιμή του x .

ii) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

iii) Να βρείτε τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

- 101.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD .

i) Να αποδείξετε ότι

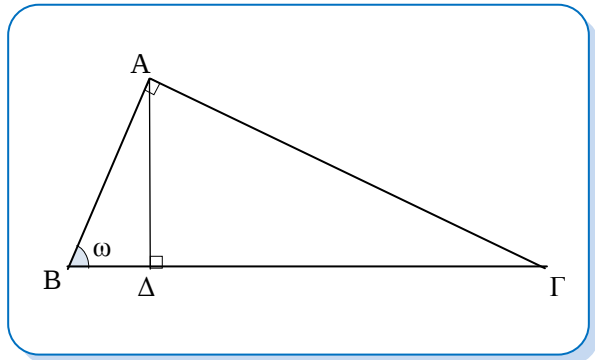
$$\sin^2 \omega = \frac{BD}{B\Gamma},$$

όπου $\omega = \angle AB\Gamma$.

ii) Αν ισχύει η σχέση

$$B\Gamma = 4BD,$$

να βρείτε τη γωνία ω .



- 102.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a^3 \cdot \eta\mu(\pi x), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου a ένας σταθερός θετικός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε την περίοδο T της συνάρτησης f .

ii) Αν επιπλέον η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι $m = -8$, να βρείτε:

α) την τιμή του a

β) τη μέγιστη τιμή M της συνάρτησης f .

iii) Για $a = 2$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 4.$$

- 103.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (a^2 + 2) \cdot \sigma\upsilon\nu(\beta x), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 2 και η περίοδος της είναι $\frac{\pi}{2}$, να βρείτε τους

a και β .

ii) Για $a = 0$ και $\beta = 4$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = -1.$$

104. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή το $\sqrt{2}$ και ελάχιστη τιμή το 0.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \eta \mu x$$

στο διάστημα $(\pi, 3\pi)$.

105. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{2} \sin x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

- i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f :
 - α) με τον άξονα $x'x$
 - β) με την ευθεία $y = 1$.

106. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2 \sin^2 x + \sin x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

- i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 3.$$

- iii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \leq 3 \quad \text{για κάθε } x \in [0, \pi).$$

- iv) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή.

107. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = 4\eta\mu x \quad \text{και} \quad f(x) = 4\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{5}\right) \quad \text{με} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- ii) την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
- iii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο και ελάχιστο.

108. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x \sin x - 2\eta\mu x - \sin x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

- i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία

$$y = -2.$$

- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο

$$x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

109. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2\eta\mu x \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \varepsilon\varphi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g
 - ii) το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με την ευθεία
- $$y = 1$$
- iii) τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται κάτω από την ευθεία

$$y = 1.$$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
- $\sec(\alpha + \beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta + \tan\alpha\tan\beta}{\sec\alpha\sec\beta}$
- $\sec(\alpha - \beta) = \frac{\sec\alpha\sec\beta - \tan\alpha\tan\beta}{\sec\alpha\sec\beta}$

Παράδειγμα

Αν $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\sin\beta = \frac{3}{5}$, με $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin(\alpha + \beta)$ και $\sin(\alpha - \beta)$.

Λύση

Επειδή

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

και

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

αρκεί να υπολογίσουμε το $\cos\alpha$ και το $\cos\beta$.

Έχουμε λοιπόν:

$$\blacksquare \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \text{και} \quad \cos\alpha > 0, \quad \text{αφού} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Άρα,} \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\blacksquare \quad \sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad \text{και} \quad \cos\beta < 0, \quad \text{αφού} \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

$$\text{Άρα,} \quad \cos\beta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Επομένως

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4 - 6\sqrt{2}}{15}$$

και

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4 + 6\sqrt{2}}{15}.$$

Παράδειγμα

Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) &= (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta) \\ &= \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta \\ &= (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta) \\ &= \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta \\ &= \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha.\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -(2 + \varepsilon\varphi x)$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu x \neq 0 \quad (1)$$

Γι' αυτά τα x η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= -(2 + \varepsilon\varphi x) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi x} = -2 - \varepsilon\varphi x \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + \varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi x} = -2 - \varepsilon\varphi x, \quad \text{αφού} \quad \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + \varepsilon\varphi x = (1 - \varepsilon\varphi x)(-2 - \varepsilon\varphi x) \\ &\Leftrightarrow 1 + \varepsilon\varphi x = -2 - \varepsilon\varphi x + 2\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi^2 x \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x = 3 \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Αυτές οι τιμές του x επαληθεύουν τις συνθήκες (1) και συνεπώς είναι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης.

Λυμένες Ασκήσεις

45. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $\sin \frac{8\pi}{9} \sin \frac{5\pi}{9} + \eta\mu \frac{8\pi}{9} \eta\mu \frac{5\pi}{9}$

ii) $\sin 25^\circ \sin 5^\circ - \eta\mu 25^\circ \eta\mu 5^\circ$

iii) $\eta\mu 70^\circ \sin 80^\circ + \sin 70^\circ \eta\mu 80^\circ$

iv) $\eta\mu 55^\circ \sin 10^\circ - \sin 55^\circ \eta\mu 10^\circ$

Λύση

i) $\sin \frac{8\pi}{9} \sin \frac{5\pi}{9} + \eta\mu \frac{8\pi}{9} \eta\mu \frac{5\pi}{9}$

$$= \sin \left(\frac{8\pi}{9} - \frac{5\pi}{9} \right) = \sin \frac{3\pi}{9}$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \eta\mu\alpha \eta\mu\beta$
- $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cos\beta + \sin\alpha \eta\mu\beta$
- $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cos\beta - \sin\alpha \eta\mu\beta$

ii) $\sin 25^\circ \sin 5^\circ - \eta\mu 25^\circ \eta\mu 5^\circ = \sin(25^\circ + 5^\circ)$

$$= \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

iii) $\eta\mu 70^\circ \sin 80^\circ + \sin 70^\circ \eta\mu 80^\circ = \eta\mu(70^\circ + 80^\circ) = \eta\mu 150^\circ$

$$= \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

iv) $\eta\mu 55^\circ \sin 10^\circ - \sin 55^\circ \eta\mu 10^\circ = \eta\mu(55^\circ - 10^\circ)$

$$= \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

46. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) $\sin^2 \frac{7\pi}{24} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ iii) $\sin \frac{7\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} = -\frac{1}{4}$.

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \eta\mu \alpha \eta\mu \beta$$

και

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta - \eta\mu \alpha \eta\mu \beta) \cdot (\sin \alpha \cos \beta + \eta\mu \alpha \eta\mu \beta) \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \eta\mu^2 \alpha \eta\mu^2 \beta. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\cos^2 \beta = 1 - \eta\mu^2 \beta \quad \text{και} \quad \eta\mu^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= \sin^2 \alpha \cdot (1 - \eta\mu^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \cdot \eta\mu^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \eta\mu^2 \beta - \eta\mu^2 \beta + \sin^2 \alpha \eta\mu^2 \beta \\ &= \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, θέτοντας όπου α το $\frac{7\pi}{24}$ και όπου β το $\frac{\pi}{24}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{7\pi}{24} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{24} &= \sin\left(\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{24}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{24} - \frac{\pi}{24}\right) \\ &= \sin \frac{8\pi}{24} \cdot \sin \frac{6\pi}{24} = \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Και επειδή

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sin^2 \frac{7\pi}{24} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

iii) Αποδείξαμε ότι

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \eta\mu^2 \beta \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{7\pi}{12} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση $\alpha = \frac{\pi}{3}$ και $\beta = \frac{\pi}{4}$. Θέτοντας λοιπόν στην αρχική

ταυτότητα όπου α το $\frac{\pi}{3}$ και όπου β το $\frac{\pi}{4}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12} &= \sin^2 \frac{\pi}{3} - \eta\mu^2 \frac{\pi}{4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

47. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 15° .

Λύση

Έχουμε

- $\eta\mu 15^\circ = \eta\mu(45^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 45^\circ \sin 30^\circ - \sin 45^\circ \eta\mu 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$
- $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \sin 30^\circ + \eta\mu 45^\circ \eta\mu 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$
- $\epsilon\phi 15^\circ = \frac{\eta\mu 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}.$
- $\sigma\phi 15^\circ = \frac{1}{\epsilon\phi 15^\circ} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}.$

48. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\text{i)} \quad \frac{\varepsilon\varphi 35^\circ + \varepsilon\varphi 10^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 35^\circ \varepsilon\varphi 10^\circ}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\varepsilon\varphi 100^\circ - \varepsilon\varphi 70^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 100^\circ \varepsilon\varphi 70^\circ}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\sigma\varphi 130^\circ \sigma\varphi 20^\circ - 1}{\sigma\varphi 130^\circ + \sigma\varphi 20^\circ}$$

$$\text{iv)} \quad \frac{\sigma\varphi 80^\circ \sigma\varphi 35^\circ + 1}{\sigma\varphi 80^\circ - \sigma\varphi 35^\circ}.$$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \frac{\varepsilon\varphi 35^\circ + \varepsilon\varphi 10^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 35^\circ \varepsilon\varphi 10^\circ} &= \varepsilon\varphi (35^\circ + 10^\circ) \\ &= \varepsilon\varphi 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \frac{\varepsilon\varphi 100^\circ - \varepsilon\varphi 70^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 100^\circ \varepsilon\varphi 70^\circ} &= \varepsilon\varphi (100^\circ - 70^\circ) \\ &= \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \frac{\sigma\varphi 130^\circ \sigma\varphi 20^\circ - 1}{\sigma\varphi 130^\circ + \sigma\varphi 20^\circ} &= \sigma\varphi 130^\circ + 20^\circ \\ &= \sigma\varphi 150^\circ \\ &= \sigma\varphi 180^\circ - 30^\circ \\ &= -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad \frac{\sigma\varphi 80^\circ \sigma\varphi 35^\circ + 1}{\sigma\varphi 80^\circ - \sigma\varphi 35^\circ} &= \sigma\varphi (80^\circ - 35^\circ) \\ &= \sigma\varphi 45^\circ = 1. \end{aligned}$$

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

$$\bullet \quad \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}.$$

$$\bullet \quad \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}.$$

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

$$\bullet \quad \sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha}.$$

$$\bullet \quad \sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}.$$

49. Αν ισχύει η σχέση

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{με} \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu\alpha$

ii) $\epsilon\phi\alpha$

iii) $\epsilon\phi\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

iv) $\sigma\phi\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1.$$

Όμως,

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5}.$$

Επομένως,

$$\eta\mu^2\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{16}{25}.$$

Και επειδή $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\eta\mu\alpha > 0$ και τελικά

$$\eta\mu\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

ii) Έχουμε

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

iii) Έχουμε

$$\epsilon\phi\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\frac{\pi}{4}}{1 - \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\frac{\pi}{4}}.$$

Όμως,

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1.$$

Άρα,

$$\varepsilon\varphi\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{4}{3} + 1}{1 - \frac{4}{3}} = -7.$$

iv) Έχουμε

$$\sigma\varphi\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\frac{\pi}{6} + 1}{\sigma\varphi\frac{\pi}{6} - \sigma\varphi\alpha}.$$

Όμως,

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

και

$$\sigma\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}}{\eta\mu\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Επομένως,

$$\sigma\varphi\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - \frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3} + 4}{4\sqrt{3} - 3}.$$

50. Αν για δύο γωνίες α και β ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta\mu\alpha = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{2}{3}$$

με

$$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\sigma\upsilon\nu\alpha$ και $\eta\mu\beta$

ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)$

iii) $\eta\mu(\alpha + \beta)$

iv) $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\bullet \quad \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \text{αφού } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

και επομένως $\sigma\upsilon\nu\alpha > 0$.

$$\bullet \quad \eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\beta = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \text{αφού } \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

και συνεπώς $\eta\mu\beta > 0$.ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{5}}{9}$$

iii) $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{-2 + 2\sqrt{10}}{9}.$$

iv) Έχουμε

$$\varepsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

και

$$\varepsilon\phi\beta = \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Επομένως

$$\varepsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}{4}}{\frac{8 + \sqrt{10}}{8}} = \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{5}}{8 + \sqrt{10}}.$$

51. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} & \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow & \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \eta\mu x \eta\mu \frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + \eta\mu x \eta\mu \frac{\pi}{3} = 1 \\ \Leftrightarrow & 2\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = 1 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot \frac{1}{2} \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ \Leftrightarrow & \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ \Leftrightarrow & x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

52. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} + \eta\mu x \eta\mu \frac{\pi}{7} = \frac{1}{2}$

ii) $\eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 5x \eta\mu 2x = \eta\mu x.$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} & \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} + \eta\mu x \eta\mu \frac{\pi}{7} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{7}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x - \frac{\pi}{7} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{7} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{10\pi}{21} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{4\pi}{21}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \eta\mu 5x \sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu 5x \eta\mu 2x &= \eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu(5x - 2x) = \eta\mu x \\
 &\Leftrightarrow \eta\mu 3x = \eta\mu x \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + x \\ \text{ή} \\ 3x = 2\kappa\pi + \pi - x, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi \\ \text{ή} \\ 4x = 2\kappa\pi + \pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\pi \\ \text{ή} \\ x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

53. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x - \epsilon\phi \frac{\pi}{12} \eta\mu x = 0$ ii) $\eta\mu x + \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu x = 1.$

Λύση

i) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
 \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu \frac{\pi}{12}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}} \eta\mu x &= 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12} \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu \frac{\pi}{12} \eta\mu x = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{12} + x \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} + x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\
 &\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

ii) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \eta\mu x + \varepsilon\phi \frac{\pi}{3} \sigma\upsilon\nu x &= 1 \Leftrightarrow \eta\mu x + \frac{\eta\mu \frac{\pi}{3}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}} \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ \Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu x \eta\mu \frac{\pi}{3} &= \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \eta\mu \left(x + \frac{\pi}{3} \right) &= \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

54. Να λύσετε την εξίσωση

$$2\eta\mu x = \eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta.$$

Θέτοντας στην παραπάνω ταυτότητα όπου α το x και όπου β το $\frac{\pi}{3}$ έχουμε

$$\eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} - \sigma\upsilon\nu x \eta\mu \frac{\pi}{3}.$$

Όμως

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

και συνεπώς

$$\eta\mu \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \eta\mu x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma\upsilon\nu x.$$

Με βάση τα παραπάνω, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned}
2\eta\mu x &= \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2\eta\mu x = \frac{1}{2}\eta\mu x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\upsilon\nu x \\
&\Leftrightarrow 4\eta\mu x = \eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x \\
&\Leftrightarrow 3\eta\mu x = -\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x \\
&\Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{αφού } \sigma\upsilon\nu x \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \epsilon\varphi x = -\epsilon\varphi \frac{\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow \epsilon\varphi x = \epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

55. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\eta\mu x \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu x \eta\mu \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\eta\mu x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \\
&= \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

ii) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

56. Έστω α, β δύο γωνίες για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 = 3$

ii) $\epsilon\varphi^2\alpha + \epsilon\varphi^2\beta = 3\epsilon\varphi^2\alpha \cdot \epsilon\varphi^2\beta + 8\epsilon\varphi\alpha\epsilon\varphi\beta + 3.$

Λύση

i) Έχουμε

$$(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 = \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

και

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta.$$

Οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} & (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 \\ &= (\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) + (\eta\mu^2\beta + \sigma\upsilon\nu^2\beta) + 2(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta) \\ &= 1 + 1 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) \\ &= 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

ii) Γνωρίζουμε ότι

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3} \quad \text{και} \quad \sigmaυνασυν\beta \neq 0.$$

Επομένως,

$$\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = \sqrt{3}$$

δηλαδή

$$\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta = \sqrt{3} \cdot 1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta.$$

Οπότε,

$$(\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta)^2 = 3(1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta)^2$$

ή ισοδύναμα

$$\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\beta - 2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta = 3(1 + \varepsilon\varphi^2\alpha\varepsilon\varphi^2\beta + 2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta)$$

και τελικά

$$\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\beta = 3\varepsilon\varphi^2\alpha\varepsilon\varphi^2\beta + 8\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta + 3.$$

57. Αν ισχύει η σχέση

$$\sigmaυν(\alpha + \beta) = \sigmaυνασυν\beta$$

να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu^2(\alpha + \beta) = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2.$$

Λύση

Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} \sigmaυνασυν\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta &= \sigmaυνασυν\beta \Leftrightarrow -\eta\mu\alpha\eta\mu\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \eta\mu\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\beta = 0 \end{aligned}$$

- Αν $\eta\mu\alpha = 0$, τότε $\sigmaυν^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = 1 - 0 = 1$

Οπότε

$$\begin{aligned} \eta\mu^2(\alpha + \beta) &= (\eta\mu\alpha\sigmaυν\beta + \sigmaυνα\eta\mu\beta)^2 \\ &= (0 \cdot \sigmaυν\beta + \sigmaυνα\eta\mu\beta)^2 \\ &= \sigmaυν^2\alpha\eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\beta = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 \end{aligned}$$

- Αν $\eta\mu\beta = 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \eta\mu^2\beta = 1 - 0 = 1$.

Οπότε

$$\begin{aligned}\eta\mu^2(\alpha + \beta) &= (\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta)^2 \\ &= (\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot 0)^2 \\ &= \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta = \eta\mu^2\alpha = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2\end{aligned}$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει η ζητούμενη σχέση.

58. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ το οποίο δεν είναι ορθογώνιο.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \cdot \epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma.$$

ii) Αν επιπλέον ισχύουν οι σχέσεις

$$\epsilon\phi B = 2 \quad \text{και} \quad \epsilon\phi \Gamma = 3,$$

να βρείτε τη γωνία A .

Λύση

i) Έχουμε

$$A + B + \Gamma = \pi$$

ή ισοδύναμα

$$A + B = \pi - \Gamma \tag{1}$$

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ορθογώνιο, είναι

$$A \neq \frac{\pi}{2}, \quad B \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \Gamma \neq \frac{\pi}{2}.$$

Δηλαδή,

$$A \neq \frac{\pi}{2}, \quad B \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad A + B \neq \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως, ορίζονται οι

$$\epsilon\phi A, \quad \epsilon\phi B \quad \text{και} \quad \epsilon\phi(A + B).$$

Οπότε, από τη σχέση (1) έχουμε

$$\begin{aligned}\epsilon\phi(A + B) &= \epsilon\phi(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow \frac{\epsilon\phi A + \epsilon\phi B}{1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B} = -\epsilon\phi \Gamma \\ &\Leftrightarrow \epsilon\phi A + \epsilon\phi B = -\epsilon\phi \Gamma \cdot (1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B) \\ &\Leftrightarrow \epsilon\phi A + \epsilon\phi B = -\epsilon\phi \Gamma + \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma \\ &\Leftrightarrow \epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma.\end{aligned}$$

- ii) Αν ισχύουν οι σχέσεις $\varepsilon\phi B = 2$ και $\varepsilon\phi \Gamma = 3$, τότε η σχέση που αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα γράφεται

$$\varepsilon\phi A + 2 + 3 = \varepsilon\phi A \cdot 2 \cdot 3.$$

Δηλαδή,

$$5\varepsilon\phi A = 5 \Leftrightarrow \varepsilon\phi A = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi A = \varepsilon\phi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow A = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή η γωνία A είναι γωνία τριγώνου, συμπεραίνουμε ότι $0 < A < \pi$ και τελικά

$$A = \frac{\pi}{4}.$$

- 59. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα**

$$\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta.$$

- ii) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε**

$$\eta\mu(A - B) = \eta\mu^2 A - \eta\mu^2 B.$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.

Λύση

- i) Έχουμε

$$\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

και

$$\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\eta\mu^2\beta \quad (1)$$

Όμως,

$$\sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \eta\mu^2\beta \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha.$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta)\eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) - (1 - \eta\mu^2\alpha)\eta\mu^2\beta \\ &= \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta \\ &= \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\eta\mu(A - B) = \eta\mu^2 A - \eta\mu^2 B \quad (1)$$

Όμως, σύμφωνα με το ερώτημα i) ισχύει η σχέση

$$\eta\mu(A + B)\eta\mu(A - B) = \eta\mu^2 A - \eta\mu^2 B \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \eta\mu(A - B) &= \eta\mu(A + B)\eta\mu(A - B) \\ \Leftrightarrow \eta\mu(A - B) - \eta\mu(A + B)\eta\mu(A - B) &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta\mu(A - B)[1 - \eta\mu(A + B)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta\mu(A - B) = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu(A + B) &= 1. \end{aligned}$$

- Αν $\eta\mu(A - B) = 0$, τότε

$$A - B = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή A, B γωνίες τριγώνου συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 0$.

Επομένως,

$$A = B.$$

- Αν $\eta\mu(A + B) = 1$, τότε

$$A + B = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή A, B γωνίες τριγώνου συμπεραίνουμε ότι $\kappa = 0$.

Επομένως,

$$A + B = \frac{\pi}{2}$$

ή ισοδύναμα

$$\pi - \Gamma = \frac{\pi}{2}$$

και τελικά

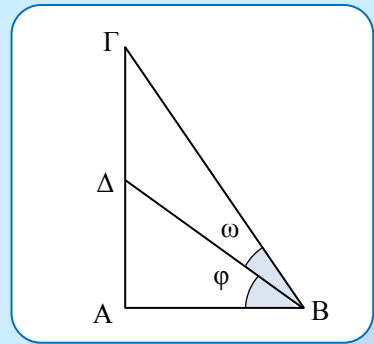
$$\Gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.

60. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα ορθογώνιο και μη ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμεσος του BL . Να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi B}{2 + \varepsilon\varphi^2 B}$, όπου $B = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$

ii) αν $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{3}$, τότε $A\Gamma = 2AB$.



Λύση

i) Παρατηρούμε ότι

$$\omega = B - \varphi, \quad \text{όπου} \quad \varphi = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}.$$

Επομένως,

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(B - \varphi) = \frac{\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi\varphi}{1 + \varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi\varphi}.$$

Όμως,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{1}{2} \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{2} \varepsilon\varphi B.$$

Άρα,

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\varepsilon\varphi B - \frac{1}{2} \varepsilon\varphi B}{1 + \frac{1}{2} \varepsilon\varphi^2 B} = \frac{\varepsilon\varphi B}{2 + \varepsilon\varphi^2 B}.$$

ii) Αν $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{3}$, τότε η σχέση που αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα γράφεται

$$\frac{1}{3} = \frac{\varepsilon\varphi B}{2 + \varepsilon\varphi^2 B}.$$

Δηλαδή,

$$2 + \varepsilon\varphi^2 B = 3\varepsilon\varphi B \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 B - 3\varepsilon\varphi B + 2 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B = 1 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi B = 2.$$

Όμως, το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ισοσκελές και επομένως $\varepsilon\varphi B \neq 1$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\varepsilon\varphi B = 2 \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = 2 \Leftrightarrow A\Gamma = 2AB.$$

Παρατήρηση

Η οξεία γωνία ω δεν είναι γωνία κάποιου από τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος. Έτσι, δεν μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον τύπο

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετος}}{\text{προσκείμενη κάθετος}}.$$

Γράφουμε λοιπόν τη γωνία ω ως διαφορά των γωνιών B και φ οι οποίες είναι οξείες γωνίες των ορθογωνίων τριγώνων $AB\Gamma$ και $AB\Delta$ αντίστοιχα.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

110. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \sin 70^\circ \sin 10^\circ + \eta\mu 70^\circ \eta\mu 10^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{ii)} \quad \frac{\sin 70^\circ \sin 10^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ \sin 10^\circ - \sin 80^\circ \sin 40^\circ} = 1.$$

111. Να υπολογίσετε την τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\text{i)} \quad \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{15} - \eta\mu \frac{\pi}{5} \eta\mu \frac{2\pi}{15} \qquad \text{ii)} \quad \eta\mu \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} \eta\mu \frac{\pi}{8}.$$

112. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \eta\mu 12^\circ \sin 33^\circ + \sin 12^\circ \eta\mu 33^\circ & \text{ii)} \quad & \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{20} - \eta\mu \frac{\pi}{5} \eta\mu \frac{\pi}{20} \\ \text{iii)} \quad & \frac{\epsilon\phi 22^\circ + \epsilon\phi 23^\circ}{1 - \epsilon\phi 22^\circ \epsilon\phi 23^\circ} & \text{iv)} \quad & \frac{\epsilon\phi 70^\circ - \epsilon\phi 10^\circ}{1 + \epsilon\phi 70^\circ \epsilon\phi 10^\circ}. \end{aligned}$$

113. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \eta\mu 75^\circ & \text{ii)} \quad & \epsilon\phi 75^\circ \\ \text{iii)} \quad & \sin 105^\circ. \end{aligned}$$

114. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sin x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \\ \text{ii)} \quad & \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = -\sqrt{3} \eta\mu x \sin x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

115. Να αποδείξετε ότι:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \eta\mu \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) \sin \alpha + \eta\mu \alpha \sin \left(\frac{\pi}{6} - \alpha \right) = \frac{1}{2} \\ \text{ii)} \quad & \frac{\eta\mu \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\eta\mu \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \epsilon\phi \alpha \end{aligned}$$

121. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad \frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta - \gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha} = 0.$$

122. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad \epsilon\varphi^2\alpha - \epsilon\varphi^2\beta = \frac{\eta\mu(\alpha - \beta) \cdot \eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta} \quad \text{ii)} \quad \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{\epsilon\varphi(\alpha + \beta)} + \frac{\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi\beta}{\epsilon\varphi(\alpha - \beta)} = 2.$$

123. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\eta\mu\alpha = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{12}{13} \quad \mu\epsilon \quad \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\text{i)} \quad \sigma\upsilon\nu\alpha \quad \text{ii)} \quad \eta\mu\beta \quad \text{iii)} \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta).$$

124. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = \frac{8}{5},$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \frac{3}{5} \quad \text{ii)} \quad \eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}\eta\mu\alpha - \frac{8}{5}\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

125. Αν $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι:

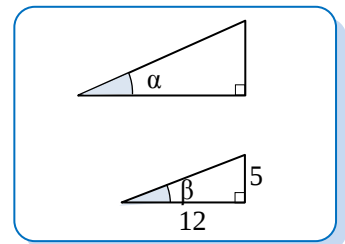
$$\eta\mu(\alpha + \beta) < \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$$

126. Για τη γωνία α του διπλανού σχήματος ισχύει η σχέση

$$12\sigma\upsilon\nu\alpha + 5\eta\mu\alpha = 13.$$

i) Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\beta$ και το $\eta\mu\beta$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.



127. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$, να αποδείξετε ότι

$$(\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\alpha + \sigma\upsilon\beta)^2 = 3.$$

128. Αν $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ και $\sigma\upsilon\alpha \cdot \sigma\upsilon\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι

$$(1 + \epsilon\phi\alpha) \cdot (1 + \epsilon\phi\beta) = 2\epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta.$$

129. Αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\epsilon\phi(\alpha - \beta)}{\epsilon\phi\alpha} + \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = 1 \quad \text{και} \quad \beta \in (0, \pi),$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi(\alpha - \beta) = -1 \quad \text{ii)} \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

130. Αν ισχύει η σχέση

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{και} \quad \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha\eta\mu\beta\sigma\upsilon\beta\eta\mu\gamma\sigma\upsilon\gamma \neq 0,$$

να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta + \epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma + \epsilon\phi\gamma\epsilon\phi\alpha = 1$$

$$\text{ii)} \quad \sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta + \sigma\phi\gamma = \sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma.$$

131. i) Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{2}\sigma\upsilon\alpha\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\alpha 2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\alpha 2x = \sqrt{2}\eta\mu x.$$

132. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \eta\mu x + \epsilon\phi \frac{\pi}{5} \sigma\upsilon\alpha x = 0$$

$$\text{ii)} \quad \sigma\upsilon\alpha x + \epsilon\phi \frac{\pi}{7} \eta\mu x = 1.$$

133. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{8} + \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ii)} \quad \eta\mu 3x \cdot \sin x - \sin 3x \cdot \eta\mu x = \eta\mu \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$$

134. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{\eta\mu \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = 3$$

$$\text{ii)} \quad \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sqrt{3} - \varepsilon\varphi x$$

135. Αν $\varepsilon\varphi \alpha = \frac{2}{3}$, να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu(x - \alpha) = 5\eta\mu(x + \alpha).$$

136. Αν $\varepsilon\varphi \alpha = 3$, να λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$ την εξίσωση

$$\sin(x + \alpha) = -2\sin(x - \alpha).$$

137. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{i)} \quad \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \varepsilon\varphi \frac{B}{2} + \varepsilon\varphi \frac{B}{2} \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} + \varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} \varepsilon\varphi \frac{A}{2} = 1$$

$$\text{ii)} \quad \sigma\varphi A \sigma\varphi B + \sigma\varphi B \sigma\varphi \Gamma + \sigma\varphi \Gamma \sigma\varphi A = 1.$$

138. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} > 90^\circ$ και το ύψος του $ΑΔ$. Αν ισχύουν οι σχέσεις $AB = 5$, $B\Delta = 4$ και $\Gamma\Delta = 21$,

να βρείτε:

$$\text{i)} \quad \text{την } \varepsilon\varphi(B + \Gamma)$$

$$\text{ii)} \quad \text{τη γωνία } A \text{ του τριγώνου } AB\Gamma.$$

- 139.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\varepsilon\phi A$ και $\varepsilon\phi B$ να είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και να αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Να βρείτε:

- i) την $\varepsilon\phi(A + B)$
- ii) τη γωνία Γ του τριγώνου $AB\Gamma$.

- 140.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{\eta\mu(A + B)}{\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B} = 2\varepsilon\phi A.$$

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

- 141.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε

$$\eta\mu(B - \Gamma) = 1 - 2\sigma\upsilon\nu B \eta\mu \Gamma.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$\sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \Gamma\right) = \frac{1}{2},$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

- 142.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\sigma\upsilon\nu(A - B) = 2\eta\mu A \eta\mu B.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 90^\circ$.
- ii) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$, αν είναι γνωστό ότι

$$\hat{A} > \hat{B} \quad \text{και} \quad \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B.$$

- 143.** Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{7} \right)^2 + \left(\eta\mu x + \eta\mu \frac{\pi}{7} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \leq 4 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή.

144. Στο διπλανό σχήμα έχουμε

$$AE = EB \quad \text{και} \quad A\Delta = \frac{2}{3} AG.$$

Να αποδείξετε ότι:

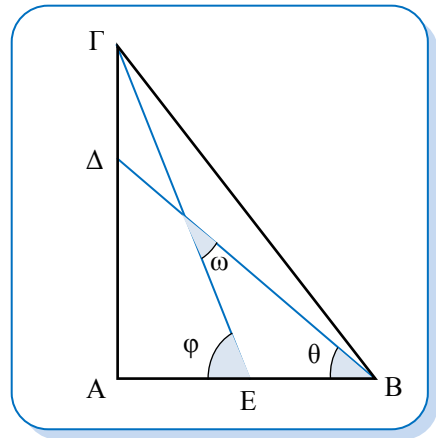
i) $\varepsilon\varphi\varphi = 2\varepsilon\varphi B$

ii) $\varepsilon\varphi\theta = \frac{2}{3}\varepsilon\varphi B$

iii) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{4\varepsilon\varphi B}{3 + 4\varepsilon\varphi^2 B}$

iv) $\varepsilon\varphi\omega \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

v) η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η γωνία ω είναι 30° .



145. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = 1 - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta.$$

ii) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = 1 - \eta\mu^2 x - \eta\mu^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

146. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x - \sqrt{3}\sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta\mu 4x - \sqrt{3}\sin 4x = \sqrt{3}.$$

147. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu x + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x + \sin 2x + \sqrt{2} = 0$.

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α

Πρόταση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$
 $= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$
 $= 1 - 2\eta\mu^2\alpha$
- $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$
- $\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$

Παράδειγμα

Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} &= \frac{1 + (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - (1 - 2\eta\mu^2\alpha) + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)}{2\eta\mu\alpha(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\varphi\alpha. \end{aligned}$$

Πρόταση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
- $\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

Παράδειγμα

Για να υπολογίσουμε το $\eta\mu 15^\circ$ αξιοποιούμε τον τύπο

$$\eta\mu^2 \alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

Έχουμε

$$\eta\mu^2 15^\circ = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

και επειδή

$$\eta\mu 15^\circ > 0$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\eta\mu 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}$$

Λύση

Από τον τύπο

$$\sigma\upsilon\nu^2 \alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

για $\alpha = \frac{x}{2}$ παίρνουμε

$$\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{2}$$

Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2} &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x = 1 + \sigma\upsilon\nu x \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Λυμένες Ασκήσεις

61. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $2\eta\mu\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$

ii) $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}-1$

iii) $\sigma\upsilon\nu^2 75^\circ - \eta\mu^2 75^\circ$

iv) $\frac{2\varepsilon\varphi 210^\circ}{1-\varepsilon\varphi^2 210^\circ}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} 2\eta\mu\frac{\pi}{8}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} &= \eta\mu\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}-1 &= \sigma\upsilon\nu\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu^2 75^\circ - \eta\mu^2 75^\circ &= \sigma\upsilon\nu(2\cdot 75^\circ) = \sigma\upsilon\nu 150^\circ \\ &= \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) \\ &= -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

iv) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon\varphi 210^\circ}{1-\varepsilon\varphi^2 210^\circ} &= \varepsilon\varphi(2\cdot 210^\circ) \\ &= \varepsilon\varphi 420^\circ = \varepsilon\varphi(360^\circ + 60^\circ) \\ &= \varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$
- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$
 $= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$
 $= 1 - 2\eta\mu^2\alpha$.

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$
- $\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$.

62. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad 1 + \eta\mu 2\alpha = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 \quad \text{ii)} \quad \varepsilon\varphi 2\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Όμως,

$$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

και

$$2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu 2\alpha.$$

Επομένως,

$$(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 1 + \eta\mu 2\alpha.$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi 2\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} &= \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \\ &= \frac{\eta\mu 2\alpha + 1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$$

και σύμφωνα με το ερώτημα **i)** ισχύει

$$\eta\mu 2\alpha + 1 = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi 2\alpha + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} &= \frac{(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \\ &= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2}{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}. \end{aligned}$$

- 63.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ τέτοιο, ώστε το ύψος του $A\Delta$ να ισούται με τη βάση του $B\Gamma$. Να βρείτε το ημίτονο κάθε γωνίας του.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι και διάμεσος και διχοτόμος. Οπότε, θέτοντας, για λόγους απλότητας, $B\Delta = x$ έχουμε

$$A\Delta = B\Gamma = 2x.$$

Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Delta$ προκύπτει

$$\begin{aligned} AB^2 &= A\Delta^2 + B\Delta^2 = (2x)^2 + x^2 \\ &= 4x^2 + x^2 = 5x^2. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$AB = \sqrt{5}x$$

και συνεπώς

$$\eta\mu B = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Επίσης,

$$\eta\mu\Gamma = \eta\mu B = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Για τον υπολογισμό του $\eta\mu A$ παρατηρούμε ότι

$$A + B + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow A + 2B = 180^\circ \Leftrightarrow A = 180^\circ - 2B.$$

Οπότε,

$$\eta\mu A = \eta\mu(180^\circ - 2B) = \eta\mu 2B = 2\eta\mu B \sin B.$$

Όμως,

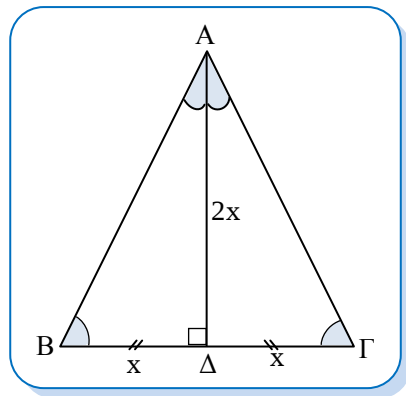
$$\eta\mu B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

και

$$\sin B = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{x}{\sqrt{5}x} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Άρα,

$$\eta\mu A = 2\eta\mu B \sin B = 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}.$$



Σχόλιο

Αξιοποιώντας στοιχειώδεις γνώσεις από την Ευκλείδειο γεωμετρία βρίσκουμε αρχικά το ημίτονο της γωνίας B , αφού αυτή είναι οξεία γωνία του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Delta$.

64. Έστω γωνία α τέτοια, ώστε

$$5\eta\mu 2\alpha = 6\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \text{και} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$.

ii) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\eta\mu 2\alpha$ και $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

Λύση

i) Έχουμε

$$5\eta\mu 2\alpha = 6\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Δηλαδή,

$$5 \cdot 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - 6\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$$

ή ισοδύναμα

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha(5\eta\mu\alpha - 3) = 0.$$

Και επειδή $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\alpha > 0$ και τελικά

$$5\eta\mu\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \frac{3}{5}.$$

ii) • Από τον τύπο

$$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$$

έχουμε

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}, \quad \text{αφού } \sigma\upsilon\nu\alpha > 0.$$

• Έχουμε

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

• Επίσης,

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

65. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad \frac{\sigma\phi\alpha - \epsilon\phi\alpha}{\sigma\phi\alpha + \epsilon\phi\alpha} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\sigma\phi\alpha - \epsilon\phi\alpha}{\sigma\phi\alpha + \epsilon\phi\alpha} &= \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} &= \frac{\eta\mu\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1} \\ &= \frac{\eta\mu\alpha(1 + 2\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha(1 + 2\sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\phi\alpha. \end{aligned}$$

66. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i)} \quad \frac{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi 2\alpha}{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon\phi 2\alpha$$

$$\text{ii)} \quad \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\epsilon\phi 2\alpha.$$

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι

$$\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$$

και

$$\sigma\phi\alpha = \frac{1}{\epsilon\phi\alpha}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi 2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} &= \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha + \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}} \\
 &= \frac{\frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha + 2\varepsilon\varphi^2\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha + 1}{\varepsilon\varphi\alpha}} \\
 &= \frac{(1 + \varepsilon\varphi^2\alpha)\varepsilon\varphi\alpha}{(1 - \varepsilon\varphi^2\alpha)(\varepsilon\varphi^2\alpha + 1)} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{1}{2} \varepsilon\varphi 2\alpha.
 \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}$$

και

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha} - \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha} \\
 &= \frac{(1 + \varepsilon\varphi\alpha)^2 - (1 - \varepsilon\varphi\alpha)^2}{(1 - \varepsilon\varphi\alpha)(1 + \varepsilon\varphi\alpha)} \\
 &= \frac{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha + 2\varepsilon\varphi\alpha - 1 - \varepsilon\varphi^2\alpha + 2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \\
 &= \frac{4\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} = 2\varepsilon\varphi 2\alpha.
 \end{aligned}$$

67. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\text{i) } (1 + \varepsilon\varphi\alpha)(1 + \sigma\varphi\alpha) = \frac{2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\alpha)^2}{\eta\mu 2\alpha} \quad \text{ii) } \frac{\varepsilon\varphi 2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} = 1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha}.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon\varphi\alpha)(1 + \sigma\varphi\alpha) &= \left(1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon\alpha}\right) \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha}\right) \\ &= \frac{\sigma\upsilon\upsilon\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon\alpha} \cdot \frac{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha} \\ &= \frac{(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\alpha)^2}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\upsilon\alpha} \\ &= \frac{2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\alpha)^2}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\upsilon\alpha} \\ &= \frac{2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\alpha)^2}{\eta\mu 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{\varepsilon\varphi 2\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} &= \frac{\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{2}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \\ &= \frac{2}{1 - \left(\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon\alpha}\right)^2} = \frac{2}{1 - \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}} \\ &= \frac{2}{\frac{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}} = \frac{2\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha - 1 + 1}{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha + 1}{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha} + \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha} = 1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha}. \end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Η παρουσία των τριγωνομετρικών αριθμών $\eta\mu\alpha$ και $\sigma\upsilon\upsilon\alpha$ στο δεύτερο μέλος, μας οδηγεί στο να εκφράσουμε την $\varepsilon\varphi\alpha$ και την $\sigma\varphi\alpha$ συναρτήσει των $\eta\mu\alpha$ και $\sigma\upsilon\upsilon\alpha$.

Παρατηρήσεις

- Αρχικά, εκφράζουμε την $\varepsilon\varphi 2\alpha$ συναρτήσει της $\varepsilon\varphi\alpha$.
- Στη συνέχεια γράφουμε

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon\alpha}$$

αφού η παράσταση στο δεύτερο μέλος απαιτεί την εμφάνιση του $\sigma\upsilon\upsilon 2\alpha$.

68. Να αποδείξετε ότι:

i) αν $\eta\mu\alpha \neq 0$, τότε $\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha}$

ii) $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Και επειδή $\eta\mu\alpha \neq 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha$$

που είναι ζητούμενη σχέση.

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα i) έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{9}}{2\eta\mu\frac{\pi}{9}},$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} = \frac{\eta\mu\frac{4\pi}{9}}{2\eta\mu\frac{2\pi}{9}}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9} = \frac{\eta\mu\frac{8\pi}{9}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{9}}.$$

Επομένως,

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9} = \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{9}}{2\eta\mu\frac{\pi}{9}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{4\pi}{9}}{2\eta\mu\frac{2\pi}{9}} \cdot \frac{\eta\mu\frac{8\pi}{9}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{9}} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta\mu\frac{8\pi}{9}}{\eta\mu\frac{\pi}{9}}.$$

Σχόλιο

Χρησιμοποιούμε τρεις φορές την ταυτότητα που αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα για να γράψουμε σε μορφή πηλίκου κάθε έναν από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9}, \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9}.$$

Οι αναμενόμενες απλοποιήσεις στη συνέχεια θα διευκολύνουν τον υπολογισμό του γινομένου

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{9}.$$

Όμως, παρατηρούμε ότι

$$\frac{8\pi}{9} = \pi - \frac{\pi}{9}$$

και συνεπώς

$$\eta\mu \frac{8\pi}{9} = \eta\mu \left(\pi - \frac{\pi}{9} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{9}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{9} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\eta\mu \frac{\pi}{9}}{\eta\mu \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}.$$

69. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\sigma\phi\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \sigma\phi\beta = 7 \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right),$$

τότε:

i) να υπολογίσετε την $\epsilon\phi 2\alpha$ ii) να αποδείξετε ότι $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{1}{\sigma\phi\alpha} = \frac{1}{3}$$

Άρα,

$$\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\epsilon\phi 2\alpha = \frac{3}{4}.$$

Επίσης,

$$\epsilon\phi\beta = \frac{1}{\sigma\phi\beta} = \frac{1}{7}.$$

Επομένως,

$$\epsilon\phi(2\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi 2\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = 1.$$

Δηλαδή, $\varepsilon\varphi(2\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}$
ή ισοδύναμα

$$2\alpha + \beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Όμως $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. Άρα, $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ και $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$. Επομένως,

$$0 < 2\alpha + \beta < \frac{3\pi}{4} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}.$$

70. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu \frac{\pi}{8}$

ii) $\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}$.

Λύση

i) Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4}}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Και επειδή

$$\eta\mu \frac{\pi}{8} > 0,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\eta\mu \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Σημείωση

Ισχύουν οι ταυτότητες:

- $\eta\mu^2 \alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu^2 \alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
- $\varepsilon\varphi^2 \alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}.$

Μεθοδολογία

Αξιοποιώντας τις παραπάνω ταυτότητες μπορούμε να υπολογίσουμε του τριγωνομετρικούς αριθμούς του μισού μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε το συνημίτονο της γωνίας αυτής.

ii) Έχουμε

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\pi}{6}}{2}.$$

Οπότε,

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}.$$

Και επειδή

$$\sin \frac{\pi}{12} > 0,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

71. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu 2x = 2\eta\mu x$

ii) $\eta\mu 2x + 2 = 2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu 2x = 2\eta\mu x &\Leftrightarrow 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \kappa\pi \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu 2x + 2 = 2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x &\Leftrightarrow 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2 = 2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1 - \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = 0 \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\eta\mu x - 1)(\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

72. Να λύσετε την εξίσωση

$$1 + \sin x + \sin 2x = \eta \mu x + \eta \mu 2x.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + \sin x + \sin 2x &= \eta \mu x + \eta \mu 2x \\ \Leftrightarrow 1 + \sin x + 2\sin^2 x - 1 &= \eta \mu x + 2\eta \mu x \sin x \\ \Leftrightarrow \sin x (1 + 2\sin x) &= \eta \mu x (1 + 2\sin x) \\ \Leftrightarrow (\sin x - \eta \mu x)(1 + 2\sin x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x - \eta \mu x = 0 &\quad \text{ή} \quad 1 + 2\sin x = 0 \\ \Leftrightarrow \eta \mu x = \sin x &\quad \text{ή} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\eta \mu x}{\sin x} = 1 &\quad \text{ή} \quad \sin x = -\sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \epsilon \phi x = 1 &\quad \text{ή} \quad \sin x = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ \Leftrightarrow \epsilon \phi x = \epsilon \phi \frac{\pi}{4} &\quad \text{ή} \quad \sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \\ \Leftrightarrow x = \kappa \pi + \frac{\pi}{4} &\quad \text{ή} \quad x = 2\kappa \pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

73. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\sin 2x + 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1$

ii) $\eta \mu 2x - 2\eta \mu^2 \frac{x}{2} = 2\eta \mu x.$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sin 2x + 2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 + 2 \cdot \frac{1 + \sin x}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 + 1 + \sin x = 1 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$\sin x = \omega,$$

η παραπάνω εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$2\omega^2 + \omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{1}{2}.$$

Σημείωση

Αποτετραγωνίζοντας το $\sin^2 \frac{x}{2}$ και επιλέγοντας για το $\sin 2x$ τον τύπο $\sin 2x = 2\sin^2 x - 1$ εμφανίζονται στην εξίσωση δυνάμεις μόνο του $\sin x$.

Επομένως,

$$\sin x = -1 \quad \text{ή} \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

δηλαδή

$$\sin x = -1 \quad \text{ή} \quad \sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

και τελικά

$$x = (2\kappa + 1)\pi \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} &= 2\eta\mu x \Leftrightarrow 2\eta\mu x \sin x - 2 \frac{1 - \sin x}{2} = 2\eta\mu x \\ \Leftrightarrow 2\eta\mu x \sin x - (1 - \sin x) &= 2\eta\mu x \Leftrightarrow 2\eta\mu x \sin x - 2\eta\mu x - (1 - \sin x) = 0 \\ \Leftrightarrow 2\eta\mu x (\sin x - 1) + (\sin x - 1) &= 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\eta\mu x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu x &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = 1 \quad \text{ή} \quad \eta\mu x = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{6} \right) \\ \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x &= 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \quad \text{ή} \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x &= 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

74. Αν ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right),$$

τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi \alpha = 3$$

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$\varepsilon\varphi(\alpha - x) = \frac{1}{2}.$$

Λύση

i) Από τον τύπο

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

έχουμε

$$-\frac{3}{4} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow -3 + 3\varepsilon\varphi^2\alpha = 8\varepsilon\varphi\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\varepsilon\varphi^2\alpha - 8\varepsilon\varphi\alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = 3 \quad \text{ή} \quad \varepsilon\varphi\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Και επειδή $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $\varepsilon\varphi\alpha > 0$ και τελικά $\varepsilon\varphi\alpha = 3$.

ii) • Αν $\sin x \neq 0$, τότε η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3 - \varepsilon\varphi x}{1 + 3\varepsilon\varphi x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2\varepsilon\varphi x = 1 + 3\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow 5\varepsilon\varphi x = 5$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

• Αν $\sin x = 0$, τότε

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως,

$$\varepsilon\varphi(\alpha - x) = \varepsilon\varphi\left(\alpha - \kappa\pi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \kappa\pi\right) = -\sigma\varphi(\alpha - \kappa\pi)$$

$$= \sigma\varphi(\kappa\pi - \alpha) = -\sigma\varphi\alpha = -\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}.$$

Άρα, οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Σχόλιο

Εκφράζουμε την $\varepsilon\varphi 2\alpha$ συναρτήσει της $\varepsilon\varphi\alpha$ χρησιμοποιώντας τον σχετικό τύπο. Οπότε, η δοθείσα σχέση μας οδηγεί στην επίλυση εξίσωσης με άγνωστο την $\varepsilon\varphi\alpha$.

Παρατήρηση

Ο τύπος

$$\varepsilon\varphi(\alpha - x) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi x}{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi x}$$

είναι έγκυρος αν και μόνο αν τα σύμβολα $\varepsilon\varphi(\alpha - x)$, $\varepsilon\varphi\alpha$ και $\varepsilon\varphi x$ έχουν νόημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε

$$\varepsilon\varphi(\alpha - x) = \frac{1}{2}$$

και

$$\varepsilon\varphi\alpha = 3.$$

Άρα, η χρησιμοποίηση του παραπάνω τύπου μπορεί να γίνει αν και μόνο αν ορίζεται η $\varepsilon\varphi x$. Δηλαδή, ακριβώς τότε όταν $\sin x \neq 0$.

75. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι σταθερή ii) $\frac{1}{\eta\mu \frac{\pi}{12}} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}.$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{\eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 3x \eta\mu x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{\eta\mu (3x - x)}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} \\ &= \frac{\eta\mu 2x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Όμως,

$$\eta\mu 2x = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) = \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} = 2 \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι σταθερή.

ii) Αποδείξαμε ότι

$$f(x) = 2 \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Επομένως,

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\eta\mu 3 \frac{\pi}{12}}{\eta\mu \frac{\pi}{12}} - \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{12}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}} = 2 \quad (1)$$

Όμως,

$$\eta\mu\frac{3\pi}{12} = \eta\mu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{12} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Άρα, η σχέση (1) γράφεται

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\eta\mu\frac{\pi}{12}} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}} = 2$$

και τελικά

$$\frac{1}{\eta\mu\frac{\pi}{12}} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2}.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

148. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $2\eta\mu\frac{\pi}{12}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{8} - \eta\mu^2\frac{3\pi}{8}$

iii) $2\sigma\upsilon\nu^2 75^\circ - 1$

iv) $\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}}{1 - \varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{8}}.$

149. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\eta\mu^2\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12}} = 16.$$

150. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu 20^\circ = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu 10^\circ$

ii) $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^\circ} = 4.$

151. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sin \frac{3\pi}{8} = \eta\mu \frac{\pi}{8}$

ii) $\eta\mu \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

iii) $\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{8}$.

152. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και τέτοιο, ώστε

$$AB = \sqrt{6} - \sqrt{2} \quad \text{και} \quad A\Gamma = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

i) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\eta\mu\Gamma, \quad \sin\Gamma \quad \text{και} \quad \eta\mu 2\Gamma.$$

ii) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 15^\circ$.

153. Στο διπλανό σχήμα είναι

$$AB = \Gamma\Delta = 3 \text{ cm}$$

και

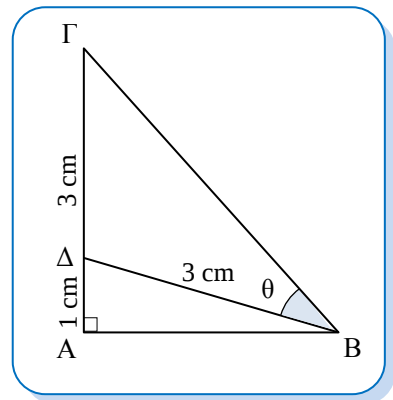
$$A\Delta = 1 \text{ cm}$$

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\varepsilon\phi\theta$

ii) $\sin\theta$

iii) $\sin 2\theta$.



154. Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\alpha = \frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right),$$

να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu 2\alpha$

ii) $\varepsilon\phi 2\alpha$.

155. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ με $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ και $\sin\beta = -\frac{5}{13}$ με $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ να υπολογίσετε τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\eta\mu(\alpha + \beta)$

ii) $\sin(2\alpha + \beta)$.

- 156.** Έστω γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$5\sin 2\theta - 3\sin \theta + 1 = 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\sin \theta = \frac{4}{5}.$$

- ii) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\eta\mu 2\theta, \sin 2\theta \text{ και } \eta\mu 4\theta.$$

- 157.** Δίνεται γωνία α για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$5\sin 2\alpha + \sin \alpha + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}.$$

- ii) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\eta\mu \alpha, \eta\mu 2\alpha, \sin 2\alpha \text{ και } \epsilon\phi 2\alpha.$$

- 158.** Έστω γωνία α για την οποία ισχύει η σχέση

$$\eta\mu \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{5}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{24}{25}.$$

- ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\epsilon\phi \alpha + \sigma\phi \alpha.$$

- 159.** Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$2\alpha - \beta = \frac{3\pi}{4} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi \alpha = 2,$$

να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

- i) $\epsilon\phi 2\alpha$

- ii) $\epsilon\phi \beta$

- iii) $\epsilon\phi(2\alpha + \beta).$

- 160.** Έστω γωνίες α και β για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\beta + 2\varepsilon\varphi\alpha - 4\varepsilon\varphi\beta + 5 = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi\alpha = -1 \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\beta = 2.$$

ii) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς
 $\varepsilon\varphi 2\beta$ και $\varepsilon\varphi(\alpha + 2\beta).$

- 161.** Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

i) $\sin \frac{\pi}{8}$

ii) $\varepsilon\varphi \frac{\pi}{12}.$

- 162.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{1 - \sin 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

ii) $\frac{\sin 2\alpha}{2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$

- 163.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\sin^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = \sin 2\alpha$

ii) $\frac{\eta\mu^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin^2\alpha}{2(1 - \sin\alpha)} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$

- 164.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{1 - 2\eta\mu^2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}$

ii) $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \eta\mu 2\alpha}{\sin 2\alpha}.$

- 165.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \sin\alpha} = \frac{2 - 2\sin\alpha}{\eta\mu 2\alpha}$

ii) $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} - \frac{2}{\varepsilon\varphi 2\alpha}.$

- 166.** Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{\eta\mu 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta} = \varepsilon\varphi \frac{\theta}{2}$

ii) $\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha}{2 + \varepsilon\varphi^2 2\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi^2 \alpha}{1 + \varepsilon\varphi^4 \alpha}.$

167. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\eta\mu\alpha = \eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha \eta\mu\alpha$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$.

168. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\epsilon\varphi^2\alpha \cdot \epsilon\varphi 2\alpha = \epsilon\varphi 2\alpha - 2\epsilon\varphi\alpha$

ii) $\epsilon\varphi 3\alpha - \epsilon\varphi 2\alpha - \epsilon\varphi\alpha = \epsilon\varphi 3\alpha \cdot \epsilon\varphi 2\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha$.

169. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\sigma\upsilon\nu 4\alpha - 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 3 = 8\eta\mu^4\alpha$

ii) $\frac{1}{\eta\mu 2\alpha} + \sigma\varphi 2\alpha = \sigma\varphi\alpha$.

170. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $1 - \epsilon\varphi^2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

ii) $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi 2\alpha - \epsilon\varphi\alpha$.

171. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\frac{2\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}$

ii) $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha} = \frac{2}{(1 + \epsilon\varphi\alpha) \cdot (1 + \sigma\varphi\alpha)}$.

172. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}$

ii) $\epsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \eta\mu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}$.

173. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

ii) $\sigma\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$.

174. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $\sigma\upsilon\nu^6 \frac{\alpha}{2} - \eta\mu^6 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{4} (4 - \eta\mu^2\alpha)$

ii) $\left(\frac{\sqrt{\epsilon\varphi\alpha} + \sqrt{\sigma\varphi\alpha}}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} \right)^2 = \frac{2}{\eta\mu 2\alpha}$.

175. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & x \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{ii)} & \eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu x \\ \text{iii)} & \sqrt{1 + \eta\mu 2x} - \sqrt{1 - \eta\mu 2x} = 2\eta\mu x. \end{array}$$

176. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\frac{1 + \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}.$$

ii) Να υπολογίσετε την $\epsilon\varphi \frac{\pi}{8}$.

177. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha} = \epsilon\varphi\alpha.$$

ii) Να υπολογίσετε την $\epsilon\varphi 15^\circ$.

178. i) Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & \eta\mu\alpha = \frac{2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \beta) & \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}} \end{array}$$

ii) Αν ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha = 1 \quad \text{και} \quad \alpha \in (0, \pi),$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

179. Αν ισχύει η σχέση

$$\epsilon\varphi^2\alpha = 1 + 2\epsilon\varphi^2\beta$$

να αποδείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \sigma\upsilon\nu^2\beta = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ \text{ii)} & \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu^2\beta = 0. \end{array}$$

180. Αν για τις γωνίες α και β ισχύει η σχέση

$$\eta\mu\alpha = \eta\mu^2\beta,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\sin 4\beta = 1 - 8\eta\mu\alpha + 8\eta\mu^2\alpha$

ii) $4(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) = 1 - \sin 4\beta.$

181. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sin 2x - 2\eta\mu^2 x = 0$

ii) $2\sin 2x + \sin x = 3.$

182. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu 2x = \epsilon\phi x$

ii) $\sin x + \sin \frac{x}{2} = 2.$

183. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sin x + \sin \frac{x}{2} + 1 = 0$

ii) $\sin x + 3\eta\mu \frac{x}{2} - 2 = 0.$

184. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sin 4x + 2\sin^2 x = 0$

ii) $\sin 4x = 3\sin 2x + 4\sin^2 x.$

185. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu^2 2x = 2\sin^2 x$

ii) $\sin 2x + \sin^2 x = 5\eta\mu^2 x.$

186. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1 - \sin 2x}{\eta\mu x} = 2$

ii) $\eta\mu x - \eta\mu^2 x = \sin^2 x - \sin x.$

187. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sin 2x = \sqrt{2}(\sin x - \eta\mu x)$

ii) $5(1 + \sin x) = 2 + \eta\mu^4 x - \sin^4 x.$

188. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2(1 - \sin 2x) = \sqrt{3} \epsilon \phi x$

ii) $\frac{1}{1 - \epsilon \phi^2 x} = 1 + \sin 2x.$

189. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sin 2x - 5 \eta \mu x - 3 = 0$

ii) $\sin 2x = 1 - \eta \mu 2x.$

190. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $1 - \eta \mu 2x = \sin x - \eta \mu x$

ii) $\eta \mu^2 3x = 3 \sin^2 3x.$

191. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2 + \eta \mu \sin x + \sin^2 x = 0$$

είναι αδύνατη.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$2(\epsilon \phi x - 1) = \sin 2x.$$

192. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta \mu 2x = \sin^4 \frac{x}{2} - \eta \mu^4 \frac{x}{2}$

ii) $(1 + \sin 2x) \eta \mu x = \sin^2 x.$

193. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$4(\eta \mu^4 x + \sin^4 x) = 3 + \sin 4x.$$

ii) Να λύετε την εξίσωση

$$\eta \mu^4 x + \sin^4 x = \frac{5}{8}.$$

194. i) Να αποδείξετε ότι

$$(\eta \mu x + \sin x)^2 = 1 + \eta \mu 2x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\eta \mu 2x - 2 \eta \mu x = 2 \sin x - 1.$$

195. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^4\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha - 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 3}{8}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

ii) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha + 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 3}{8}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

iii) η εξίσωση

$$\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = \frac{41}{40}$$

είναι αδύνατη.

196. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\epsilon\phi\alpha = -7 \quad \mu\epsilon \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

και

$$\epsilon\phi\beta = 2 \quad \mu\epsilon \quad \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\epsilon\phi 2\beta = -\frac{4}{3}$

ii) $\alpha + 2\beta = \frac{5\pi}{4}$.

197. Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha_1 = \eta\mu 2\alpha, \quad \alpha_2 = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \alpha_3 = \epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha$$

όπου $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

ii) Να βρείτε την τιμή του α έτσι, ώστε ο λόγος της παραπάνω προόδου να είναι

$$\lambda = \sqrt{2}.$$

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο;
2. Ποιος άξονας λέγεται άξονας των συνημιτόνων και ποιος άξονας των ημιτόνων;
3. Πότε ένα τόξο AB ενός κύκλου (O, ρ) λέγεται τόξο ενός ακτινίου;
4. Τι ονομάζουμε ακτίνιο;
5. Να αποδείξετε την ταυτότητα
$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1.$$
6. Να αποδείξετε τις ταυτότητες
$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\phi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1.$$
7. Να περιγράψετε τη σχέση που έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δύο αντίθετων γωνιών.
8. Να περιγράψετε τη σχέση που έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δύο γωνιών που έχουν άθροισμα 180° .
9. Να περιγράψετε τη σχέση που έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δύο γωνιών που διαφέρουν κατά 180° .
10. Να περιγράψετε τη σχέση που έχουν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δύο γωνιών που έχουν άθροισμα 90° .
11. Να δώσετε τον ορισμό της περιοδικής συνάρτησης.
12. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \eta\mu\theta$;
13. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$;
14. Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta$;

15. Να αναφέρετε τους τύπους που εκφράζουν το συνημίτονο των γωνιών $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$ ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών α και β .
16. Να αναφέρετε τους τύπους που εκφράζουν το ημίτονο των γωνιών $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$ ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών α και β .
17. Να αναφέρετε τους τύπους που εκφράζουν την εφαπτομένη των γωνιών $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$ ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών α και β .
18. Να αναφέρετε τους τύπους που εκφράζουν το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη της γωνίας 2α ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α .

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Αν η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο $M(x, y)$, τότε ισχύει

$$\eta\mu\omega = x \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = y \quad \Sigma \quad \Lambda$$
2. Ο άξονας $x'x$ λέγεται άξονας των ημιτόνων και ο άξονας $y'y$ λέγεται άξονας των συνημιτόνων. $\Sigma \quad \Lambda$
3. Ακτίνιο είναι η γωνία η οποία όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο, βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου. $\Sigma \quad \Lambda$
4. Ισχύει η ταυτότητα

$$\epsilon\phi\omega \cdot \sigma\phi\omega = 1 \quad \Sigma \quad \Lambda$$
5. Οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετους όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς. $\Sigma \quad \Lambda$
6. Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς. $\Sigma \quad \Lambda$

7. Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο. Σ Λ
8. Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90° , τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης. Σ Λ
9. Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο π . Σ Λ
10. Η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο π . Σ Λ
11. Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π . Σ Λ
12. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Σ Λ
13. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Σ Λ
14. Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Σ Λ
15. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη τιμή το -1. Σ Λ
16. Οι ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \epsilon\phi x$. Σ Λ
17. Η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x)$, όπου $\rho, \omega > 0$ έχει μέγιστη τιμή ίση με ρ και ελάχιστη τιμή ίση με $-\rho$. Σ Λ

18. Η συνάρτηση

$$f(x) = \rho \eta \mu(\omega x), \quad \text{όπου } \rho, \omega > 0$$

είναι περιοδική με περίοδο ίση με $\frac{2\pi}{\omega}$.

Σ Λ

19. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\eta \mu x = \eta \mu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Σ Λ

20. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\sigma \upsilon \nu x = \sigma \upsilon \nu \theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Σ Λ

21. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\epsilon \phi x = \epsilon \phi \theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Σ Λ

22. Ισχύει η ταυτότητα

$$\eta \mu(\alpha + \beta) = \eta \mu \alpha \sigma \upsilon \nu \beta + \sigma \upsilon \nu \alpha \eta \mu \beta$$

Σ Λ

23. Ισχύει η ταυτότητα

$$\sigma \upsilon \nu(\alpha + \beta) = \sigma \upsilon \nu \alpha \sigma \upsilon \nu \beta + \eta \mu \alpha \eta \mu \beta.$$

Σ Λ

24. Ισχύει η ταυτότητα

$$\epsilon \phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon \phi \alpha + \epsilon \phi \beta}{1 + \epsilon \phi \alpha \epsilon \phi \beta}.$$

Σ Λ

25. Ισχύει η ταυτότητα

$$\eta \mu 2\alpha = 2\eta \mu \alpha.$$

Σ Λ

26. Ισχύει η ταυτότητα

$$\sigma \upsilon \nu 2\alpha = \sigma \upsilon \nu^2 \alpha - \eta \mu^2 \alpha.$$

Σ Λ

27. Ισχύει η ταυτότητα

$$\epsilon \phi 2\alpha = \frac{2\epsilon \phi \alpha}{1 - \epsilon \phi^2 \alpha}.$$

Σ Λ

Διαγώνισμα 1

Θέμα 1

- A1.** Να αποδείξετε την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.
- A2.** Να δώσετε τον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου.
- A3.** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)					

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε γωνία ω ισχύουν οι σχέσεις

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1 \quad \text{και} \quad -1 \leq \eta\mu\omega \leq 1.$$

β) Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το ίδιο ημίτονο.

γ) Ισχύει η ισοδυναμία $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$.

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$ είναι περιοδική με περίοδο π .

ε) Αν (ϵ) είναι η εφαπτομένη ευθεία του τριγωνομετρικού κύκλου στο σημείο $A(1,0)$ και η τελική πλευρά μιας γωνίας ω τέμνει την (ϵ) στο σημείο E, τότε το σημείο E έχει τετμημένη ίση με $\epsilon\phi\omega$.

Θέμα Β

Έστω γωνία $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$3\sigma\upsilon\nu 2\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega - 1 = 0.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{2}{3}$

B2. Να υπολογίσετε το $\eta\mu 2\omega$

B3. Να αποδείξετε ότι

$$4\eta\mu(\pi + \omega) \cdot \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = 5\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right).$$

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4\pi]$ και τύπο

$$f(x) = 8\alpha \sin x \quad \text{για κάθε } x \in [0, 4\pi]$$

όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

Αν η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή ίση με 4, τότε:

Γ1. να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$

Γ2. να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f

Γ3. να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = 2$

Γ4. να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 2.$$

Θέμα Δ

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τέσσερις γωνίες φ , x , y και ω των τριγώνων $AB\Delta$ και $A\Delta\Gamma$, τα οποία δεν είναι ορθογώνια.

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi(x + y) = -\varepsilon\varphi\omega.$$

Δ2. Αν ισχύουν οι σχέσεις

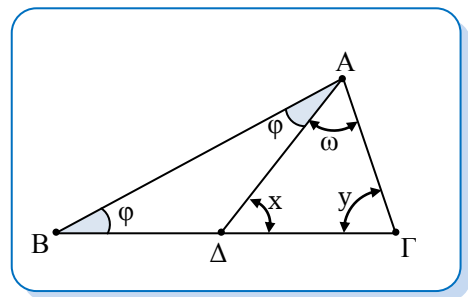
$$\varepsilon\varphi x = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi y = 7$$

να υπολογίσετε:

α) τη γωνία ω

β) το $\sin x$

γ) το $\eta\mu\varphi$.



Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1.$$

A2. Να δώσετε τον ορισμό του ακτινίου.

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται περιοδική;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Οι αντίθετες γωνίες έχουν αντίθετο συνημίτονο.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο π .

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Ισχύει η ταυτότητα

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

ε) Ισχύει η ταυτότητα

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu^2\alpha - 1.$$

Θέμα Β

Έστω γωνία $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\eta\mu(\pi - \alpha) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{8}{5}.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}$.

B2. Να βρείτε την $\varepsilon\varphi\alpha$.

B3. Να αποδείξετε ότι

$$\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} = \eta\mu\alpha.$$

B4. Να λύσετε την εξίσωση

$$3\varepsilon\varphi x = 4\sigma\varphi\alpha.$$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a\eta\mu(\beta x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ με } a, \beta \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει περίοδο $T = \pi$ και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{12}, \frac{3}{4}\right)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι

$$a = \frac{3}{2} \text{ και } \beta = 2.$$

Γ2. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, \pi]$.

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 1$ στο διάστημα $[0, \pi]$

Γ4. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ και } f\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 2, \quad x \in (0, 2\pi).$$

Δ1. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 1.$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

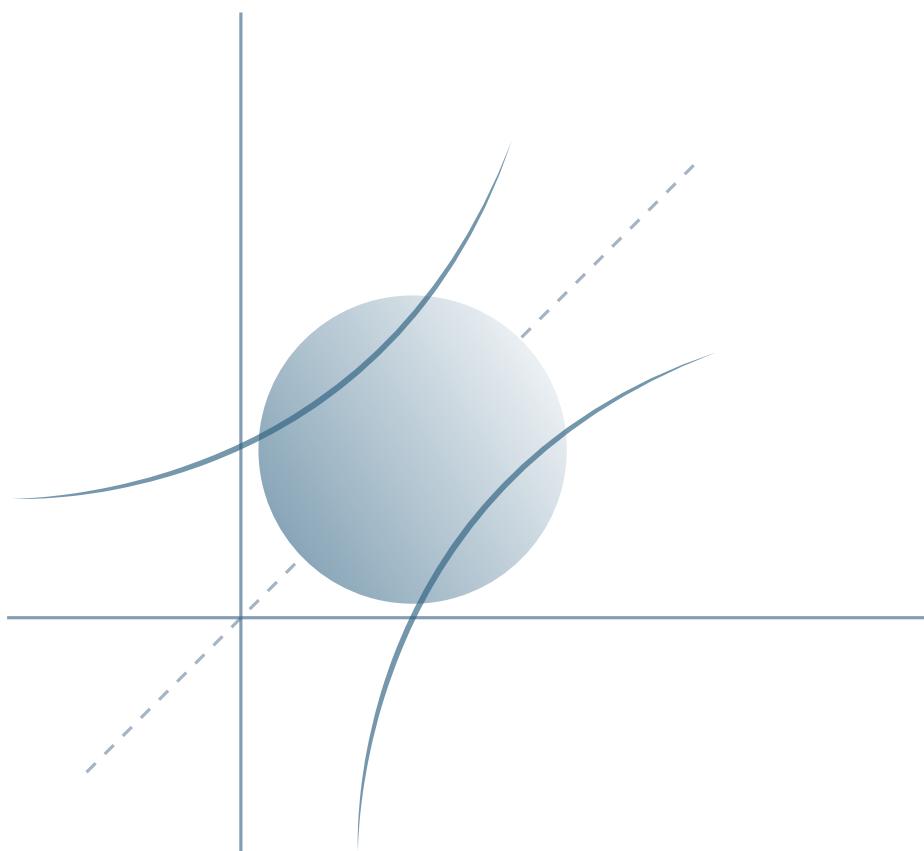
Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in (0, 2\pi).$$

Δ4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή.

Πολυώνυμα

Πολυωνυμικές Εξισώσεις





*«Η φυσιολογική ψυχολογική ανάπτυξη
ενός ανθρώπου διακόπτεται
ακριβώς την ώρα που υπεισέρχεται
το μαθηματικό ταλέντο.»*

Andrei Kolmogorov

Andrei Kolmogorov

(1903-1987)

Ο Andrei Kolmogorov ήταν Ρώσος μαθηματικός. Η συνεισφορά του στα μαθηματικά υπήρξε μεγάλη, και ειδικά στους τομείς της Πιθανοθεωρίας και της Τοπολογίας.

Γεννήθηκε στις 25 Μαρτίου 1903 στο Tambov της Ρωσίας και πέθανε στη Μόσχα το 1987.

Η μονογραφία του για τη θεωρία των πιθανοτήτων με τίτλο «Foundations of the Theory of Probability», η οποία τον έκανε γνωστό διεθνώς, δημοσιεύθηκε το 1933. Το 1954 ανέπτυξε τη θεωρία του σχετικά με την κίνηση των πλανητών, αποδεικνύοντας έτσι το ζωτικό ρόλο της θεωρίας των πιθανοτήτων στη Φυσική. Παράλληλα, ο Kolmogorov έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την παροχή ειδικής εκπαίδευσης σε χαρισματικά παιδιά.

Πολυώνυμα

Ορισμός

Έστω x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Ονομάζουμε **πολυώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί

- Τα μονώνυμα

$$\alpha_n x^n, \alpha_{n-1} x^{n-1}, \dots, \alpha_2 x^2, \alpha_1 x, \alpha_0$$

λέγονται **όροι** του πολωνύμου και οι αριθμοί

$$\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$$

συντελεστές αυτού. Ειδικότερα, ο αριθμός α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολωνύμου.

- Λέμε ότι δύο πολωνύμα είναι **ίσα**, αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι.

Παράδειγμα

Τα πολωνύμα

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \quad \text{και} \quad Q(x) = x^3 - 3x + 5$$

είναι ίσα, αν και μόνο αν

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -3 \quad \text{και} \quad \delta = 5.$$

- **Βαθμός** ενός πολωνύμου $P(x)$ λέγεται ο μεγαλύτερος εκθέτης μη μηδενικού μονωνύμου του $P(x)$.
- **Σταθερό πολωνύμο** λέγεται κάθε πολωνύμο της μορφής

$$P(x) = c \quad \text{με} \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Μηδενικού βαθμού** πολωνύμο λέγεται κάθε σταθερό πολωνύμο της μορφής

$$P(x) = c \quad \text{με} \quad c \in \mathbb{R}^*.$$

- **Μηδενικό πολωνύμο** λέγεται το πολωνύμο

$$P(x) = 0$$

για το οποίο **δεν ορίζεται** βαθμός.

Παράδειγμα

- Το πολυώνυμο $P(x) = -x^5 + 3x^2 - x$ είναι $5^{\text{ου}}$ βαθμού.
- Το πολυώνυμο $Q(x) = 7x + 2$ είναι $1^{\text{ου}}$ βαθμού.
- Το πολυώνυμο $H(x) = -6$ είναι μηδενικού βαθμού.
- Ονομάζουμε **αριθμητική τιμή** ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$, τον αριθμό **$P(\rho)$** που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή x με τον αριθμό ρ .
- Ένας αριθμός ρ ονομάζεται **ρίζα** ενός πολυωνύμου $P(x)$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$P(\rho) = 0.$$

Παράδειγμα

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 4.$$

- Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 0$ είναι $P(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4$.
- Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι $P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 = 2$.
- Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = 2$ είναι $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0$.
Δηλαδή ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Πρόσθεση – Αφαίρεση – Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

- Αξιοποιώντας γνωστές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών μπορούμε να προσθέτουμε, να αφαιρούμε ή να πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμα.

Παράδειγμα

- $(x^2 - 3x + 1) + (2x^2 - 6) = x^2 - 3x + 1 + 2x^2 - 6 = 3x^2 - 3x - 5.$ ($2^{\text{ου}}$ βαθμού)
- $(x^3 - 2x) + (-x^3 + 2x) = x^3 - 2x - x^3 + 2x = 0.$ (Μηδενικό πολυώνυμο)
- $(x^2 + 1) - (x^2 + 2x - 3) = x^2 + 1 - x^2 - 2x + 3 = -2x + 4.$ ($1^{\text{ου}}$ βαθμού)
- $(x^2 + 2)(x^3 - x) = x^2(x^3 - x) + 2(x^3 - x)$
 $= x^5 - x^3 + 2x^3 - 2x = x^5 + x^3 - 2x.$ ($5^{\text{ου}}$ βαθμού)
- Αν το **άθροισμα** δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε έχει βαθμό **ίσο ή μικρότερο** από το **μέγιστο** των βαθμών των δύο αυτών πολυωνύμων.
- Ο βαθμός του **γινομένου** δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι **ίσος** με το **άθροισμα** των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Λυμένες Ασκήσεις

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x .

i) $4x^3 - 7x + 11$

ii) $\sqrt{2}x^5 - \frac{1}{3}x^2 + 8$

iii) $5x^4 + 3x^{-2} + x - 2$

iv) $4x^2 - \frac{1}{x} + 1.$

Λύση

- i) Με βάση τον ορισμό, η παράσταση

$$4x^3 - 7x + 11$$

είναι πολυώνυμο του x .

- ii) Με βάση τον ορισμό, η παράσταση

$$\sqrt{2}x^5 - \frac{1}{3}x^2 + 8$$

είναι πολυώνυμο του x .

- iii) Η παράσταση

$$5x^4 + 3x^{-2} + x - 2$$

περιέχει τον όρο $3x^{-2}$ και ο εκθέτης του x , δηλαδή ο αριθμός -2 , δεν είναι φυσικός αριθμός. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, η δοθείσα παράσταση δεν είναι πολυώνυμο του x .

- iv) Η παράσταση

$$4x^2 + \frac{1}{x} + 1$$

περιέχει τον όρο $\frac{1}{x}$ που δεν είναι της μορφής $a_k x^k$ με k φυσικό αριθμό. Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό, η δοθείσα παράσταση δεν είναι πολυώνυμο του x .

Σημειώσεις

- Ονομάζουμε **πολυώνυμο** του x κάθε παράσταση της μορφής $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός και $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

- Τα μονώνυμα

$$a_n x^n, a_{n+1} x^{n+1}, \dots, a_1 x, a_0$$

λέγονται **όροι** του πολυωνύμου και οι αριθμοί

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$$

συντελεστές αυτού. Ειδικότερα, ο αριθμός a_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου.

2. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^2 + (\beta - 1)x + 2\beta$$

να είναι σταθερό πολυώνυμο. Είναι σ' αυτή την περίπτωση το $P(x)$ το μηδενικό πολυώνυμο;

Λύση

Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο αν και μόνο αν ισχύουν

$$\alpha = 0 \quad \text{και} \quad \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Για τις παραπάνω τιμές των α, β έχουμε

$$P(x) = 2 \neq 0.$$

Άρα, το $P(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Σημειώσεις

- **Σταθερό πολυώνυμο** λέγεται κάθε πολυώνυμο της μορφής

$$P(x) = c \quad \text{με} \quad c \in \mathbb{R}.$$

- **Μηδενικό πολυώνυμο** λέγεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 0$$

3. Να βρείτε τους όρους, τον σταθερό όρο και τον βαθμό του πολυωνύμου

$$P(x) = 4(x+1)^3 - 2x(x-1) + 5.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= 4(x+1)^3 - 2x(x-1) + 5 \\ &= 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 2x^2 + 2x + 5 \\ &= 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 - 2x^2 + 2x + 5 \\ &= 4x^3 + 10x^2 + 14x + 9. \end{aligned}$$

- Οι όροι του $P(x)$ είναι τα μονώνυμα $4x^3, 10x^2, 14x, 9$.
- Ο σταθερός όρος του $P(x)$ είναι το μονώνυμο 9.
- Ο βαθμός του $P(x)$ είναι $n = 3$.

Σημείωση

- Ο **βαθμός** ενός πολυώνυμου $P(x)$ είναι ο μεγαλύτερος εκθέτης μη μηδενικού μονωνύμου του $P(x)$.

4. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (a-1)x^3 + (\beta-2a)x^2 + 5ax - 1$$

και

$$Q(x) = (2-\beta)x^3 + 3(1-a)x^2 + (a^2+4)x - \beta^2.$$

Να βρείτε τους $a, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε:

- i) τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα
- ii) το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι πρώτου βαθμού.

Λύση

- i) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} a-1=2-\beta \\ \beta-2a=3(1-a) \\ 5a=a^2+4 \\ -1=-\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-\beta \\ \beta=3-a \\ a^2-5a+4=0 \\ \beta^2=1 \end{cases}$$

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος βρίσκουμε

$$a=4 \text{ και } \beta=-1.$$

- ii) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} a-1=0 \\ \beta-2a=0 \\ 5a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \beta=2 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$a=1 \text{ και } \beta=2.$$

Σημείωση

Δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχοι συντελεστές τους είναι ίσοι.

5. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^4 - 4\lambda^2)x^3 + (\lambda^2 + 2\lambda)x + (\lambda^3 + 8), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ είναι:

- i) σταθερό πολυώνυμο
- ii) πολυώνυμο μηδενικού βαθμού
- iii) το μηδενικό πολυώνυμο.

Λύση

- i) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι σταθερό αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2(\lambda^2 - 4) = 0 \\ \lambda(\lambda + 2) = 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2.$$

- ii) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι μηδενικού βαθμού αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda = 0 \\ \lambda^3 + 8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2(\lambda^2 - 4) = 0 \\ \lambda(\lambda + 2) = 0 \\ \lambda \neq -2 \end{cases}$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\lambda = 0.$$

- iii) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \lambda^4 - 4\lambda^2 = 0 \\ \lambda^2 + 2\lambda = 0 \\ \lambda^3 + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2(\lambda^2 - 4) = 0 \\ \lambda(\lambda + 2) = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\lambda = -2.$$

Σημείωση

Μηδενικού βαθμού πολυώνυμο λέγεται κάθε σταθερό πολυώνυμο

$$P(x) = c \quad \text{με} \quad c \neq 0.$$

Σημείωση

Μηδενικό πολυώνυμο λέγεται το σταθερό πολυώνυμο

$$P(x) = 0.$$

Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

6. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (a^2 - a - 2)x^3 + (11a - 22)x^2 + (a + 2)x + (a - 2) \quad \text{με } a \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.
- ii) Για $a = 3$, να υπολογίσετε τους $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)$ παίρνει τη μορφή

$$P(x) = \kappa x^2(x + 2) + \lambda x(x + 1) + 2x + 1.$$

Λύση

- i) Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $a^2 - a - 2 \neq 0$, δηλαδή αν $a \neq -1$ και $a \neq 2$, τότε το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού.

- Αν $a = -1$, τότε

$$P(x) = -33x^2 + x - 3.$$

Δηλαδή, το πολυώνυμο $P(x)$ είναι δευτέρου βαθμού.

- Αν $a = 2$, τότε

$$P(x) = 4x.$$

Δηλαδή, το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού.

- ii) Για $a = 3$, έχουμε

$$P(x) = 4x^3 + 11x^2 + 5x + 1.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} P(x) &= \kappa x^2(x + 2) + \lambda x(x + 1) + 2x + 1 \\ &= \kappa x^3 + (2\kappa + \lambda)x^2 + (\lambda + 2)x + 1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\kappa = 4, \quad 2\kappa + \lambda = 11 \quad \text{και} \quad \lambda + 2 = 5.$$

Δηλαδή,

$$\kappa = 4 \quad \text{και} \quad \lambda = 3.$$

Παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το πολύ τρίτου βαθμού. Είναι λοιπόν φανερό, ότι πρέπει να ξεκινήσουμε μία διερευνητική διαδικασία σχετικά με το αν ο συντελεστής

$$a^2 - a - 2$$

του μονωνύμου $(a^2 - a - 2)x^3$ είναι μηδέν ή όχι.

7. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πολυωνύμων για $x = \rho$. Ποιοι από τους αριθμούς ρ είναι ρίζες των πολυωνύμων;

i) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$ $\rho = 1, \quad \rho = 2$

ii) $Q(x) = x^4 - 7x^2 - 8x + 6$ $\rho = -2, \quad \rho = 3$

Λύση

i) Έχουμε

- $P(1) = 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 1 + 1 = 0$

- $P(2) = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 3.$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$, ενώ ο αριθμός 2 όχι.

ii) Έχουμε

- $Q(-2) = (-2)^4 - 7(-2)^2 - 8(-2) + 6 = 1$

- $Q(3) = 3^4 - 7 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 6 = 0.$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός -2 δεν είναι ρίζα του $Q(x)$, ενώ ο αριθμός 3 είναι.

Σημειώσεις

- Ονομάζουμε **αριθμητική τιμή** ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$, τον πραγματικό αριθμό που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το x με τον αριθμό ρ .

- Ένας αριθμός ρ λέγεται **ρίζα** ενός πολυωνύμου $P(x)$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$P(\rho) = 0.$$

8. Δίνεται το πολώνυμο

$$P(x) = x^3 + 5\eta\mu\theta \cdot x^2 - 5\sigma\upsilon\nu\theta \cdot x - 6, \quad \text{με } \theta \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

i) Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{7}{5}.$$

ii) Να βρείτε το γινόμενο $\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$.

iii) Αν η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x = 1$ είναι ίση με -4 , να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$.

Λύση

i) Έχουμε

$$P(-1) = 0.$$

Δηλαδή,

$$(-1)^3 + 5\eta\mu\theta(-1)^2 - 5\sigma\upsilon\nu\theta(-1) - 6 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$-1 + 5\eta\mu\theta + 5\sigma\upsilon\nu\theta - 6 = 0$$

και τελικά

$$\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{7}{5}.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{7}{5}$$

Επομένως,

$$(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{49}{25} \quad (1)$$

Όμως,

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1.$$

Άρα, η σχέση (1) γράφεται

$$1 + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{49}{25}$$

δηλαδή,

$$2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{49}{25} - 1 = \frac{24}{25}$$

και συνεπώς

$$\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{25}.$$

iii) Έχουμε

$$P(1) = -4.$$

Δηλαδή,

$$1^3 + 5\eta\mu\theta \cdot 1^2 - 5\sigma\upsilon\nu\theta \cdot 1 - 6 = -4$$

ή ισοδύναμα

$$5\eta\mu\theta - 5\sigma\upsilon\nu\theta = 1$$

και τελικά

$$\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{5}. \quad (1)$$

Όμως, στο ερώτημα i) αποδείξαμε

$$\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{7}{5}. \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$2\eta\mu\theta = \frac{8}{5} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{4}{5}$$

και

$$2\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{5}.$$

Επίσης,

$$\epsilon\phi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + (\alpha - \beta)x + 1 - \alpha$$

και

$$Q(x) = (\beta + 4)x^3 + (2 - \beta)x^2 + 4(x - 1).$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε:

i) το πολυώνυμο $P(x)$ να είναι σταθερό

ii) τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι $2^{\text{ου}}$ βαθμού

iii) τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

2. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε τα πολυώνυμα

$$P(x) = (\kappa - 1)x^3 + 4x^2 + \lambda$$

και

$$Q(x) = (\lambda + 1)x^2 + (\kappa^2 - \kappa)x + 3\kappa$$

να είναι ίσα.

3. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\mu^3 - \mu)x^4 + (\mu + 1)x^2 + \mu^2 - 1, \mu \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες το $P(x)$ είναι:

- i) το μηδενικό πολυώνυμο
- ii) πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού.

4. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x - 2 \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές των α και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει ρίζα τον αριθμό 2 και η αριθμητική τιμή του για $x = 1$ να είναι ίση με -2 .

5. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + \alpha x + \beta \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 3.

Να βρείτε:

- i) τις τιμές των α και β
- ii) την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = -2$.

6. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \lambda x^2 + \mu x - 2 \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1.

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\lambda + \mu = 1.$$

- ii) Αν η αριθμητική τιμή του πολυώνυμου $P(x)$ για

$$x = 2$$

είναι ίση με $-8P(0)$, να βρείτε τους αριθμούς λ και μ .

7. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\mu^3 - 4\mu)x^3 + (\mu^2 + 2\mu)x + \mu + 1, \quad \text{με } \mu \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε το βαθμό του πολυώνυμου $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

- ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού, να βρείτε:

- α) το πολυώνυμο

$$Q(x) = (x-1) \cdot P(x)$$

- β) τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους το πολυώνυμο $Q(x)$ παίρνει τη μορφή

$$Q(x) = \alpha x(x-1) + \beta x + \gamma.$$

8. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$(x+1) \cdot P(x) = \mu x^3 - x^2 + \mu + 1.$$

- i) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.

- ii) Για $\mu = 1$, να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

9. Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

i) $\frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, 2\}$

ii) $\frac{2x-5}{x^2-5x+6} = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x-3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

10. Έστω δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ τέτοια, ώστε:

$$Q(x) = P(P(x)).$$

Αν η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(4,4)$, να αποδείξετε ότι το ίδιο ισχύει και για τη γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $Q(x)$.

11. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^2 + bx,$$

όπου a, b σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(2) - P(1) = 1 \quad \text{και} \quad P(3) - P(2) = 2,$$

να αποδείξετε ότι:

i) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

ii) $P(x+1) - P(x) = x$

iii) $1 + 2 + 3 + \dots + v = P(v+1) - P(1)$ για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$.

12. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ δεύτερου βαθμού για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$P(0) = 0$$

και

$$P(x+1) - P(x) = 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2v+1) = P(v+1) \quad \text{για κάθε } v \in \mathbb{N}.$$

13. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε

$$P(0) = 0 \quad \text{και} \quad P(x+1) - P(x) = x^2.$$

i) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

συναρτήσει του v .

Διαίρεση Πολυωνύμων

Θεώρημα (Ταυτότητα της Διαίρεσης)

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$, με $\delta(x)$ μη μηδενικό πολυώνυμο, υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια, ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

- Το πολυώνυμο $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκιο** και το $\upsilon(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.
- Όταν σε μια διαίρεση είναι $\upsilon(x) = 0$, δηλαδή όταν το υπόλοιπο είναι το μηδενικό πολυώνυμο, τότε λέμε ότι η διαίρεση είναι **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x).$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\Delta(x)$ **διαιρείται** με το $\delta(x)$ ή ότι το $\delta(x)$ **διαιρεί** το $\Delta(x)$. Λέμε ακόμη ότι το $\delta(x)$ είναι **διαιρέτης** ή **παράγοντας** του $\Delta(x)$.

- Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται βήμα προς βήμα η διαδικασία εκτέλεσης της διαίρεσης πολυωνύμων.

Παράδειγμα

Να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$(x^3 - 3x^2 - 2) : (x^2 - x + 3)$$

και να γράψετε την ταυτότητα αυτής της διαίρεσης.

Λύση

- Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δύο πολυώνυμα. Στον διαιρετέο συμπληρώνουμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 0x - 2 & x^2 - x + 3 \\ \hline \end{array}$$

- Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο x^3 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x^2 του διαιρέτη.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 0x - 2 & x^2 - x + 3 \\ \hline & x \end{array}$$

- Πολλαπλασιάζουμε το x με τον διαιρέτη $x^2 - x + 3$ και το γινόμενο $x^3 - x^2 + 3x$ το αφαιρούμε από τον διαιρετέο. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο $-2x^2 - 3x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 0x - 2 & x^2 - x + 3 \\ -x^3 + x^2 - 3x & x \\ \hline -2x^2 - 3x - 2 & \end{array}$$

- Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω με νέο διαιρετέο το $-2x^2 - 3x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + 0x - 2 & x^2 - x + 3 \\ -x^3 + x^2 - 3x & x - 2 \\ \hline -2x^2 - 3x - 2 & \\ 2x^2 - 2x + 6 & \\ \hline -5x + 4 & \end{array}$$

- Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο $x - 2$ και το υπόλοιπο είναι το πολυώνυμο $-5x + 4$. Η ταυτότητα αυτής της διαίρεσης είναι:

$$x^3 - 3x^2 - 2 = (x^2 - x + 3)(x - 2) + (-5x + 4).$$

Διαίρεση Πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$

Θεώρημα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Δηλαδή

$$v = P(\rho).$$

Απόδειξη

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x - \rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι σταθερό πολώνυμο v . Έτσι έχουμε:

$$P(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$$

και αν θέσουμε $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + v = 0 + v = v.$$

Άρα,

$$v = P(\rho).$$

Παράδειγμα

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x) = (x + 2)^9 + 6x^8 + 9x^3$ με το $x + 1$ είναι

$$v = P(-1) = (-1 + 2)^9 + 6(-1)^8 + 9(-1)^3 = 1 + 6 - 9 = -2.$$

Θεώρημα

Ένα πολώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα** το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι **ρίζα** του $P(x)$. Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει

$$P(\rho) = 0.$$

Απόδειξη

- Έστω ότι το $x - \rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$. Δηλαδή,

$$P(x) = (x - \rho) \cdot Q(x).$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho - \rho) \cdot Q(\rho) = 0 \cdot Q(\rho) = 0.$$

Άρα, το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

- Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$. Δηλαδή,

$$P(\rho) = 0.$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι:

$$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x) + v.$$

Όμως,

$$v = P(\rho) = 0.$$

και συνεπώς

$$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x).$$

Άρα, το $x - \rho$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

Παράδειγμα

Στο πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$$

έχουμε:

- $P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 + 3(-1) + 5 = -1 - 1 - 3 + 5 = 0.$

Άρα, το $x - (-1)$, δηλαδή το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

- $P(2) = 2^3 - 2^2 + 3 \cdot 2 + 5 = 8 - 4 + 6 + 5 = 15 \neq 0.$

Άρα, το $x - 2$ δεν είναι παράγοντας του $P(x)$.

Σχήμα Horner (Χόρνερ)

Το **σχήμα Horner** είναι μια σύντομη μέθοδος διαίρεσης πολυωνύμου $P(x)$ με πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Συντελεστές	του	Πολυωνύμου	$P(x)$	ρ
Συντελεστές	Πηλίκου	$\pi(x)$	Υπόλοιπο v	

Για την κατασκευή του σχήματος Horner εργαζόμαστε ως εξής:

- Στην **πρώτη** γραμμή γράφουμε τους **συντελεστές του $P(x)$** και στην **πρώτη θέση** της **τρίτης** γραμμής γράφουμε τον **πρώτο συντελεστή** του $P(x)$.
- Κάθε στοιχείο της **δεύτερης** γραμμής προκύπτει με **πολλαπλασιασμό** του **αμέσως προηγούμενου** στοιχείου της **τρίτης** γραμμής επί τον αριθμό **ρ** .

- Κάθε **άλλο** στοιχείο της **τρίτης** γραμμής (εκτός του πρώτου) προκύπτει ως **άθροισμα** των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.
- Το **τελευταίο** στοιχείο της **τρίτης** γραμμής είναι το υπόλοιπο $v = P(\rho)$. Τα άλλα στοιχεία της **τρίτης** γραμμής είναι οι **συντελεστές του πηλίκου $\pi(x)$** .

Παράδειγμα

Σχετικά με τη διαίρεση

$$(2x^4 - x^3 + 5x - 10) : (x - 3)$$

έχουμε το παρακάτω σχήμα Horner:

2	-1	0	5	-10	$\rho = 3$
	6	15	45	150	
2	5	15	50	140	

Άρα το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο

$$\pi(x) = 2x^3 + 5x^2 + 15x + 50$$

και το υπόλοιπο είναι το σταθερό πολυώνυμο $v = 140$.

Λυμένες Ασκήσεις

9. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:

i) $(4x^3 + 5x^2 - 7x + 11) : (x + 2)$

ii) $(x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 7) : (x^2 + 3x - 1)$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{array}{r|l}
 4x^3 + 5x^2 - 7x + 11 & x + 2 \\
 -4x^3 - 8x^2 & 4x^2 - 3x - 1 \\
 \hline
 -3x^2 - 7x + 11 & \\
 3x^2 + 6x & \\
 \hline
 -x + 11 & \\
 x + 2 & \\
 \hline
 13 &
 \end{array}$$

Ισχύει η ταυτότητα

$$4x^3 + 5x^2 - 7x + 11 = (x + 2)(4x^2 - 3x - 1) + 13$$

ii) Έχουμε

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 & -2x^3 & +4x^2 & - & 7 & x^2 + 3x - 1 \\
 -x^5 - 3x^4 & +x^3 & & & & x^3 - 3x^2 + 8x - 23 \\
 \hline
 -3x^4 & -x^3 & +4x^2 & - & 7 & \\
 3x^4 & +9x^3 & -3x^2 & & & \\
 \hline
 & 8x^3 & +x^2 & - & 7 & \\
 & -8x^3 & -24x^2 & +8x & & \\
 \hline
 & & -23x^2 & +8x & - & 7 \\
 & & 23x^2 & +69x & -23 & \\
 \hline
 & & & 77x & -30 &
 \end{array}$$

Ισχύει η ταυτότητα

$$x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 7 = (x^2 + 3x - 1)(x^3 - 3x^2 + 8x - 23) + 77x - 30.$$

Σημείωση

- Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$ τέτοια, ώστε $\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \nu(x)$, **(1)** όπου το $\nu(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.
- Η σχέση **(1)** ονομάζεται **ταυτότητα της διαίρεσης**.

10. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = 2x^3 + ax^2 + ax + 6 \quad \text{και} \quad Q(x) = x^2 - ax + 2,$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$P(x) : Q(x)$$

και να γράψετε την ταυτότητα αυτής της διαίρεσης.

ii) Να βρείτε την τιμή του a έτσι, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

Λύση

- i) Κάνουμε το σχήμα και εκτελούμε τη διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $Q(x)$.

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + ax^2 + ax + 6 & x^2 - ax + 2 \\
 \underline{-2x^3 + 2ax^2 - 4x} & \\
 3ax^2 + (a-4)x + 6 & \\
 \underline{-3ax^2 + 3a^2x - 6a} & \\
 (3a^2 + a - 4)x + 6 - 6a &
 \end{array}$$

Επομένως, το πηλίκο της διαίρεσης είναι το πολυώνυμο

$$2x + 3a$$

και το υπόλοιπο είναι το πολυώνυμο

$$(3a^2 + a - 4)x + 6 - 6a$$

Η ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης είναι

$$2x^3 + ax^2 + ax + 6 = (x^2 - ax + 2)(2x + 3a) + (3a^2 + a - 4)x + 6 - 6a.$$

- ii) Η διαίρεση $P(x):Q(x)$ είναι τέλεια αν και μόνο αν το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης, δηλαδή το πολυώνυμο

$$(3a^2 + a - 4)x + 6 - 6a.$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Και αυτό συμβαίνει ακριβώς τότε, όταν ισχύουν οι σχέσεις

$$3a^2 + a - 4 = 0 \quad \text{και} \quad 6 - 6a = 0.$$

ή ισοδύναμα

$$3a^2 + a - 4 = 0 \quad \text{και} \quad a = 1.$$

και τελικά

$$a = 1.$$

Σημείωση

Σε μία διαίρεση πολυωνύμων το πηλίκο και το υπόλοιπο είναι επίσης πολυώνυμα. Έτσι, όταν λέμε ότι μία διαίρεση είναι τέλεια εννοούμε ότι το υπόλοιπο είναι το μηδενικό πολυώνυμο και όχι ο αριθμός 0.

11. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , έτσι ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + \alpha x + \beta$$

να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

Λύση

Εκτελούμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο

$$\begin{array}{r|l} (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1. & \\ \hline 2x^3 & + \alpha x & + \beta & | & x^2 - 2x + 1 \\ -2x^3 + 4x^2 - 2x & & & | & 2x + 4 \\ \hline & 4x^2 + (\alpha - 2)x + \beta & & | & \\ & -4x^2 + 8x & -4 & | & \\ \hline & (\alpha + 6)x + \beta - 4 & & | & \end{array}$$

Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$ αν και μόνο αν η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια. Δηλαδή, αν και μόνο αν το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης που είναι το πολυώνυμο $(\alpha+6)x + \beta - 4$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Και αυτό σημαίνει, ακριβώς τότε όταν

$$\alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6 \quad \text{και} \quad \beta - 4 = 0 \Leftrightarrow \beta = 4.$$

12. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης:

$$(31x^{70} - 26x^{40} + 5x^{10} - 8) : (x+1).$$

Λύση

Το ζητούμενο υπόλοιπο v είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου

$$31x^{70} - 26x^{40} + 5x^{10} - 8$$

για $x = -1$. Είναι δηλαδή

$$\begin{aligned} v &= 31(-1)^{70} - 26(-1)^{40} + 5(-1)^{10} - 8 \\ &= 31 - 26 + 5 - 8 = 2. \end{aligned}$$

Σχόλιο

Χωρίς αμφιβολία η εκτέλεση της δοθείσας διαίρεσης είναι ασύμφορη!

Αξιοποιούμε λοιπόν το σχετικό θεώρημα που εγγυάται ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι

$$v = P(\rho).$$

13. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + \alpha x + \beta$$

έχει παράγοντες το $x-1$ και το $x-\sqrt{2}$.

Λύση

Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντες το $x-1$ και το $x-\sqrt{2}$ αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} P(1) = 0 &\Leftrightarrow 1^4 - 3 \cdot 1^2 + \alpha \cdot 1 + \beta = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha + \beta = 2 \end{aligned} \quad (1)$$

και

$$P(\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^4 - 3 \cdot (\sqrt{2})^2 + \alpha \cdot \sqrt{2} + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\sqrt{2} + \beta = 2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\alpha(\sqrt{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (1) βρίσκουμε $\beta = 2$.

Σημείωση

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει **παράγοντα** το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι **ρίζα** του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$P(\rho) = 0.$$

14. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

i) $P(x) = x^4 + 5x^2 + 3$

ii) $Q(x) = x^{10} - 9x^5 + 25.$

Λύση

i) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$. Οπότε, υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$P(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho^4 + 5\rho^2 + 3 = 0$$

πράγμα άτοπο, αφού

$$\rho^4 + 5\rho^2 + 3 > 0 \quad \text{για κάθε } \rho \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

- ii) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$. Οπότε, υπάρχει ένας $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος, ώστε

$$Q(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho^{10} - 9\rho^5 + 25 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση, θέτοντας $\omega = \rho^5$, γράφεται

$$\omega^2 - 9\omega + 25 = 0$$

και προφανώς είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = 81 - 100 = -19 < 0$.

Επομένως, το πολυώνυμο $Q(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$.

15. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 + \lambda x + \mu$$

με το πολυώνυμο $x + 1$ είναι -6 .

i) Να αποδείξετε ότι $\lambda - \mu = 4$.

ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x - 2$, τότε:

α) να βρείτε τους λ και μ

β) να εξετάσετε αν το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 - 4$.

Λύση

i) Έχουμε

$$P(-1) = -6$$

$$\Leftrightarrow (-1)^4 + 4(-1)^3 + (-1)^2 + \lambda(-1) + \mu = -6$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4 + 1 - \lambda + \mu = -6$$

$$\Leftrightarrow \lambda - \mu = 4.$$

Σημείωση

Το **υπόλοιπο** της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$. Δηλαδή,

$$v = P(\rho).$$

ii) α) Έχουμε

$$P(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 2^2 + \lambda \cdot 2 + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda + \mu = -52 \quad (1)$$

Επίσης, στο ερώτημα i) αποδείξαμε ότι

$$\lambda - \mu = 4 \quad (2)$$

Σημείωση

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ **διαιρείται** με το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι **ρίζα** του $P(x)$. Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$P(\rho) = 0.$$

Απο τις σχέσεις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\lambda = -16 \quad \text{και} \quad \mu = -20.$$

β) Αποδείξαμε ότι

$$\lambda = -16 \quad \text{και} \quad \mu = -20.$$

Επομένως,

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x - 20.$$

α' τρόπος:

Εκτελούμε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - 4$.

$x^4 + 4x^3 + x^2 - 16x - 20$	$x^2 - 4$
$-x^4 \qquad + 4x^2$	$x^2 + 4x + 5$
$4x^3 + 5x^2 - 16x - 20$	
$-4x^3 \qquad 16x$	
$5x^2 \qquad - 20$	
$-5x^2 \qquad + 20$	
0	

Παρατηρούμε ότι η διαίρεση είναι τέλεια. Άρα, το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 - 4$.

β' τρόπος:

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Και επειδή το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $x - 2$, αρκεί να εξετάσουμε αν διαιρείται και με το $x + 2$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^4 + 4(-2)^3 + (-2)^2 - 16(-2) - 20 \\ &= 16 - 32 + 4 + 32 - 20 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $x + 2$ και συνεπώς και με το $x^2 - 4$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - \alpha x^2 + 2x - \alpha^2 + 3, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε το υπόλοιπο v της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \alpha$.
- ii) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια.
- iii) Να αποδείξετε ότι $v \leq 4$.
- iv) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του υπολοίπου v .

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} v = P(\alpha) &= \alpha^3 - \alpha \cdot \alpha^2 + 2\alpha - \alpha^2 + 3 \\ &= -\alpha^2 + 2\alpha + 3. \end{aligned}$$

ii) Η διαίρεση $P(x) : (x - \alpha)$ είναι τέλεια αν και μόνο αν ισχύει

$$v = 0.$$

Δηλαδή,

$$-\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha = -1 \quad \text{ή} \quad \alpha = 3.$$

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} v &= -\alpha^2 + 2\alpha + 3 \\ &= 4 - (\alpha^2 - 2\alpha + 1) \\ &= 4 - (\alpha - 1)^2 \leq 4. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Ένας άλλος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι η σχέση $v \leq 4$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$-\alpha^2 + 2\alpha + 3 \leq 4$$

και τελικά με τη σχέση

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 \geq 0,$$

η οποία είναι αληθής.

iv) Αποδείξαμε ότι

$$v = 4 - (\alpha - 1)^2 \leq 4.$$

Παρατηρούμε ότι η ισότητα ισχύει για

$$\alpha = 1.$$

Άρα, η μέγιστη τιμή του υπολοίπου v είναι ίση με 4. Η τιμή αυτή επιτυγχάνεται για

$$\alpha = 1.$$

17. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκια και τα υπόλοιπα των παρακάτω διαιρέσεων:

i) $(2x^3 + 90x^2 - 480x + 975) : (x + 50)$

ii) $(x^5 - 97x^3 - 2300) : (x - 10)$

Λύση

i) Έχουμε

2	90	-480	975	-50
	-100	500	-1000	
2	-10	20	-25	

Άρα, το πηλίκιο της διαίρεσης είναι

$$\pi(x) = 2x^2 - 10x + 20$$

και το υπόλοιπο $v = -25$.

Σημείωση

Το σχήμα Horner είναι μία μέθοδος διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$ και το χρησιμοποιούμε κυρίως όταν το ρ ή ο βαθμός του $P(x)$ είναι μεγάλος αριθμός.

ii) Έχουμε

1	0	-97	0	0	-2300	10
	10	100	30	300	3000	
1	10	3	30	300	700	

Άρα, το πηλίκιο της διαίρεσης είναι

$$\pi(x) = x^4 + 10x^3 + 3x^2 + 30x + 300$$

και το υπόλοιπο $v = 700$.

18. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + (\sigma\upsilon\nu^2\alpha) \cdot x^2 - (\eta\mu^2\alpha) \cdot x - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha,$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

ii) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x+1).$$

iii) Να υπολογίσετε τις τιμές του α για τις οποίες το πολυώνυμο $x+1$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(x)$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot 1^2 - \eta\mu^2\alpha \cdot 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ &= 1 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha \\ &= 1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 0. \end{aligned}$$

Άρα, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

ii) Εκτελούμε τη διαίρεση $P(x) : (x+1)$ χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner.

1	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	$-\eta\mu^2\alpha$	$-\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 1$	-1
	-1	$-\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$	0	
1	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$	0	$-\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 1$	

Επομένως, το ζητούμενο πηλίκο είναι

$$\pi(x) = x^2 + (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) \cdot x$$

και το υπόλοιπο

$$\upsilon = -\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 1 = -2\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

iii) Το πολυώνυμο $x+1$ διαιρεί το πολυώνυμο $P(x)$ αν και μόνο αν η διαίρεση $P(x) : (x+1)$ είναι τέλεια. Δηλαδή, αν και μόνο αν

$$\upsilon = 0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

19. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{2v} - (x-1)^{2v-1} - 1 \quad \text{όπου } v \in \mathbb{N}^*.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x^2 - x$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii) Για $v = 2$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x) : (x^2 - x).$$

Λύση

i) Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x = x(x-1) = (x-0)(x-1).$$

Αρκεί λοιπόν, να αποδείξουμε ότι τα πολυώνυμα $x-0$ και $x-1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)$. Έχουμε

$$P(0) = 0^{2v} - (0-1)^{2v-1} - 1 = -(-1)^{2v-1} - 1 = -(-1) - 1 = 1 - 1 = 0$$

και

$$P(1) = 1^{2v} - (1-1)^{2v-1} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Άρα, οι αριθμοί 0 και 1 είναι ρίζες του $P(x)$ ή ισοδύναμα τα πολυώνυμα $x-0$ και $x-1$ είναι παράγοντές του.

ii) Για $v = 2$ έχουμε

$$P(x) = x^4 - (x-1)^3 - 1 = x^4 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 1 = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x.$$

Εκτελούμε τη διαίρεση

$$P(x) : (x^2 - x).$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x & x^2 - x \\ -x^4 + x^3 & x^2 + 3 \\ \hline 3x^2 - 3x & \\ -3x^2 + 3x & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Άρα, το ζητούμενο πηλίκο είναι το πολυώνυμο

$$\pi(x) = x^2 + 3.$$

Σχόλιο

Ένας άλλος τρόπος είναι να παραγοντοποιήσουμε το $P(x)$.

Πράγματι

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x \\ &= x^3 \cdot (x-1) + 3x(x-1) \\ &= x(x-1)(x^2 + 3). \end{aligned}$$

20. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = (x-1)^{v+2} + x^{v+1} - x^v - x + 1, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)^{v+2} + x^{v+1} - x^v - x + 1 \\ &= (x-1)^{v+2} + x^v(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1) \left[(x-1)^{v+1} + x^v - 1 \right] \\ &= (x-1) \cdot Q(x) \end{aligned}$$

όπου

$$Q(x) = (x-1)^{v+1} + x^v - 1.$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$. Οπότε, για να αποδείξουμε ότι έχει παράγοντα και το $(x-1)^2$ αρκεί να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

Πράγματι

$$Q(1) = (1-1)^{v+1} + 1^v - 1 = 0.$$

Άρα, το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

21. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - ax + 3a.$$

- i) Χρησιμοποιώντας το σχήμα του Horner να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (x-2)$. Στη συνέχεια, να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
- ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x-2$, τότε:
 - α) να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται και με το πολυώνυμο $(x-2)^2$
 - β) να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)^2$.

Λύση

i) Έχουμε

1	-2	-1	-α	3α	2
	2	0	-2	-2α-4	
1	0	-1	-α-2	α-4	

Το πηλίκο της διαίρεσης είναι

$$\pi(x) = x^3 - x - \alpha - 2$$

και το υπόλοιπο

$$v = \alpha - 4.$$

Άρα, η ζητούμενη ταυτότητα είναι

$$P(x) = (x-2)(x^3 - x - \alpha - 2) + \alpha - 4.$$

ii) α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το $x-2$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$, που εκτελέσαμε στο προηγούμενο ερώτημα, είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Δηλαδή,

$$v = 0 \Leftrightarrow \alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

Επομένως,

$$P(x) = (x-2)(x^3 - x - 6).$$

Για να αποδείξουμε λοιπόν ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $(x-2)^2$, αρκεί να αποδείξουμε ότι το πολυώνυμο

$$\pi(x) = x^3 - x - 6$$

διαίρεται με το πολυώνυμο $x-2$. Όμως, κάτι τέτοιο είναι φανερό ότι ισχύει, αφού

$$\pi(2) = 2^3 - 2 - 6 = 0.$$

β) Αποδείξαμε παραπάνω ότι

$$P(x) = (x-2)(x^3 - x - 6) \quad (1)$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner εκτελούμε τη διαίρεση

$$(x^3 - x - 6):(x-2)$$

1	0	-1	-6	2
	2	4	6	
1	2	3	0	

Επομένως,

$$x^3 - x - 6 = (x - 2)(x^2 + 2x + 3) \quad (2)$$

Από τις ισότητες (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

$$P(x) = (x - 2)^2 (x^2 + 2x + 3).$$

Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x) : (x - 2)^2$$

είναι το πολυώνυμο

$$x^2 + 2x + 3.$$

22. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$P^2(0) + 25 \leq 10P(0)$$

και

$$P(1) - P(0) = 7.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$P(0) = 5 \quad \text{και} \quad P(1) = 12.$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x^2 - x).$$

Λύση

i) Έχουμε

$$P^2(0) + 25 \leq 10P(0) \Leftrightarrow P^2(0) + 25 - 10P(0) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (P(0) - 5)^2 \leq 0.$$

Και επειδή

$$(P(0) - 5)^2 \geq 0,$$

συμπεραίνουμε

$$(P(0) - 5)^2 = 0$$

και τελικά

$$P(0) = 5.$$

Επίσης, από τη σχέση

$$P(1) - P(0) = 7$$

βρίσκουμε

$$P(1) - 5 = 7$$

δηλαδή

$$P(1) = 12.$$

ii) Έστω $\pi(x)$ το πηλίκο και $v(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x^2 - x).$$

Επειδή ο διαιρέτης $x^2 - x$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $v(x)$ είναι πολυώνυμο της μορφής

$$v(x) = \alpha x + \beta, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε

$$P(x) = (x^2 - x) \cdot \pi(x) + v(x)$$

ή ισοδύναμα

$$P(x) = (x^2 - x) \cdot \pi(x) + \alpha x + \beta \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας διαδοχικά στην τελευταία σχέση όπου x το 0 και όπου x το 1 έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(0) = 0 \cdot \pi(0) + \alpha \cdot 0 + \beta \\ P(1) = 0 \cdot \pi(1) + \alpha \cdot 1 + \beta \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} P(0) = \beta \\ P(1) = \alpha + \beta \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \beta \\ 12 = \alpha + \beta. \end{cases} \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\beta = 5 \text{ και } \alpha = 7.$$

Επομένως,

$$v(x) = 7x + 5.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

14. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:

i) $(5x^3 + 3x^2 - 8x + 12) : (x^2 + 2)$

ii) $(x^4 - 20) : (x + 2)$

iii) $(x^4 - 32) : (x - 2)$

iv) $x^6 : (x^2 - 1)^2$.

15. Να εκτελέσετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση:

i) $(8x^3 - 11x^2 + 7x - 3) : (x - 2)$

ii) $(6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 2x + 7) : (3x^2 - 4x)$.

16. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x^4 + 1)(x^2 + x - 2) + 4x + 3.$$

Να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $P(x) : (x^2 + x - 2)$

ii) $P(x) : (5x^2 + 5x - 10)$

iii) $P(x) : (x^4 + 1)$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 7x^{33} - 5x^{22} + 3x^{11} - 2.$$

Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυώνυμου $P(x)$ με το πολυώνυμο:

i) $x + 1$

ii) $x - 1$

iii) x .

18. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x - \rho$.

i) $P(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

ii) $Q(x) = -2x^6 - 4x^2 - 1$

iii) $R(x) = x^4 + x^2 - 2x + 3$.

19. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{17} - 2x^{16} + x^3 - 7.$$

i) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x - 2).$$

ii) Να αποδείξετε το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$ με $\rho < 0$.

20. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(x^3 + 4x^2 - 7x + 11) : (x - 2)$

ii) $(x^4 - 5x + 8) : (x + 1)$

iii) $(x^5 - 3x^2) : (x - 3)$

iv) $(12x^3 + 5x^2 + 3x - 2) : \left(x + \frac{1}{3}\right).$

21. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x)$.

ii) Να υπολογίσετε τις τιμές

$$P(1 - \sqrt{2}) \text{ και } P(1 + \sqrt{2}).$$

22. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$(x^5 + 2x^3 + 5x^2 - 8x - 11) : (x - \sqrt{2}).$$

23. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

$$P(x) = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 12x + 8$$

για $x = 3 + \sqrt{7}$.

24. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ για την οποία ο αριθμός $x = 1 - \sqrt{2}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = 3x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + \kappa.$$

25. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 4x^5 - 5x^4 + 1.$$

- i) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$P(x) : (x - 1).$$

Στη συνέχεια να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

- ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο

$$x^2 - 2x + 1.$$

- iii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x) : (x^2 - 2x + 1).$$

26. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x + 1$.

- ii) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $(x + 1)(x - 3)$.

- iii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)(x - 3)$.

27. Το διπλανό σχήμα Horner αντιστοιχεί στη διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ το οποίο είναι τρίτου βαθμού με το πολυώνυμο $x - \rho$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha \neq 0$.

Συντελεστές του $P(x)$				
	2α			
α	β	10		

Συντελεστές Πηλίκου Υπόλοιπο

- ii) Να υπολογίσετε την τιμή του ρ .

- iii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, να βρείτε την τιμή $P(0)$.

- iv) Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(0) = -20, P(1) = -21 \text{ και } \alpha + 10 = 2\beta,$$

να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

28. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = x^3 + ax - 2 \quad \text{και} \quad Q(x) = x^3 + a^2x - 10$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν το 1 είναι ρίζα του πολωνύμου $P(x)$, να αποδείξετε ότι το 2 είναι ρίζα του πολωνύμου $Q(x)$. Ισχύει το αντίστροφο;

29. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολωνύμου

$$P(x) = x^4 + \lambda x^3 + 18x^2 + 2\lambda x + 32$$

με το πολυώνυμο $x - 2$ είναι ίσο με 24.

- i) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x - 4$. Ποιο είναι το πηλίκο αυτής της διαίρεσης;
- iii) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $(x - 4)^2$. Ποιο είναι το πηλίκο αυτό της διαίρεσης;

30. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x - 2$.

- i) Να αποδείξετε ότι

$$2a + b = -3.$$
- ii) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - 3$ είναι ίσο με 4, τότε:
 - α) να βρείτε τους $a, b \in \mathbb{R}$
 - β) να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

31. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + ax + b$$

όπου a, b σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν $\pi(x)$ είναι το πηλίκο και

$$v(x) = 7x + 11$$

είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - 4$, να βρείτε:

- i) τις τιμές $P(2)$ και $P(-2)$
- ii) τους αριθμούς a και b
- iii) το πηλίκο $\pi(x)$.

32. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$ και η αριθμητική τιμή του για

$$x=0$$

είναι ίση με -2 . Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - x$.

33. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P^2(2) + P^2(3) = 2P(3) - 1.$$

- i) Να υπολογίσετε τις τιμές $P(2)$ και $P(3)$.
- ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x-2)(x-3)$.

34. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^2 + \lambda x + 1,$$

όπου λ ένας σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι τριπλάσιο από το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$, τότε:

- i) να βρείτε την τιμή του λ
- ii) να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 5x - 3.$$

35. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 4x^2 - 8x + 5.$$

- i) Να βρείτε το υπόλοιπο u της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - \frac{a}{2}$, όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός.
- ii) Να αποδείξετε ότι

$$u \geq 1.$$

- iii) Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το υπόλοιπο u γίνεται ελάχιστο.

36. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha(2 + \eta\mu^2\alpha) \cdot x - \sigma\upsilon\nu^4\alpha,$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

ii) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x + 1)$$

είναι

$$v = -3 - 3\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

iii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του v .

37. Το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\beta = -\alpha - 1.$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x - 1)^2$.

iii) Να βρείτε τους α και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x - 1)^2$.

38. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + 1$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε:

i) το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο v της διαίρεσης

$$P(x) : (x - 1)$$

ii) τους α και β , ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο

$$(x - 1)^2.$$

39. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^4 - 2x^3 + \beta x^2 - 8x + \gamma.$$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x-2)$$

είναι ίσο με 8.

i) Να αποδείξετε ότι

$$16\alpha + 4\beta + \gamma = 40.$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x+2).$$

iii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $x-1$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \beta + \gamma = 10$

β) $P(x) = (x-1) \cdot [\alpha x^3 + (\alpha-2)x^2 + (\alpha+\beta-2)x + \alpha+\beta-10].$

iv) Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε το πολυώνυμο $(x-1)^2$ να είναι παράγοντας του πολυώνυμου $P(x)$.

40. i) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$\frac{5x-8}{x^2-5x+4} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1, 4\}.$$

ii) Να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$(x^3 - 4x^2 + 4x - 4) : (x^2 - 5x + 4)$$

και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

iii) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 4}{x^2 - 5x + 4} = x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{1, 4\}.$$

41. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο 3 και διαιρούμενο με το $x-3$ αφήνει υπόλοιπο 2. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$Q(x) = P(P(x)) - x$$

έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x-2$ και $x-3$.

42. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x-1) = x^2 - 3x + 2.$$

- i) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.
 ii) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$Q(x) = P(P(x)) + \alpha x - 1.$$

43. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x-3)^{2\mu} + (x-2)^\mu - 1,$$

όπου $\mu \in \mathbb{N}^*$.

- i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο

$$(x-2)(x-3).$$

- ii) Για $\mu = 2$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x) : (x-2)(x-3).$$

44. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = vx^{v+1} - (v+1)x^v + 1, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.
 ii) Για $v=3$, να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-1$.

45. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{v+2} + 2x^{v+1} + x^v - 2x - 2, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - 1$.

46. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{v+2} - x^{v+1} + x^2 - 3x + 2, \quad v \in \mathbb{N}^*$$

έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

Ορισμός

Ονομάζουμε **πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n** κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \quad \text{με } \alpha_n \neq 0.$$

- Ονομάζουμε **ρίζα** της πολυωνυμικής εξίσωσης

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Δηλαδή, κάθε αριθμό ρ τέτοιον, ώστε $P(\rho) = 0$.

Παράδειγμα

Η εξίσωση $x^4 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$ είναι πολυωνυμική εξίσωση 4^{ου} βαθμού και έχει ρίζα τον αριθμό 2, αφού $2^4 - 5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 16 - 20 + 6 - 2 = 0$.

- Για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = 0$ βαθμού μεγαλύτερου από 2, **παραγοντοποιούμε** το $P(x)$ και το μετατρέπουμε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων (πολυωνύμων).

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

Λύση

Έχουμε

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 5) - 2(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 5)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ή} \quad x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ή} \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Θεώρημα (Ακέραιων Ριζών)

Έστω η πολωνυμική εξίσωση

$$\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,$$

με **ακέραιους** συντελεστές. Αν ο **ακέραιος** αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι **διαιρέτης του σταθερού όρου** α_0 .

Απόδειξη

Αν ο ακέραιος αριθμός $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_v \rho^v + \alpha_{v-1} \rho^{v-1} + \dots + \alpha_2 \rho^2 + \alpha_1 \rho + \alpha_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha_0 &= -\alpha_v \rho^v - \alpha_{v-1} \rho^{v-1} - \dots - \alpha_2 \rho^2 - \alpha_1 \rho \\ \Leftrightarrow \alpha_0 &= \rho (-\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_2 \rho - \alpha_1) \\ \Leftrightarrow \alpha_0 &= \rho \cdot \kappa, \end{aligned}$$

όπου $\kappa = -\alpha_v \rho^{v-1} - \alpha_{v-1} \rho^{v-2} - \dots - \alpha_2 \rho - \alpha_1$. Όμως οι $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ είναι ακέραιοι και συνεπώς ο αριθμός κ είναι ακέραιος. Επομένως, από τη σχέση $\alpha_0 = \rho \cdot \kappa$ συμπεραίνουμε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0 .

Παράδειγμα

Η εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$ έχει ρίζες τους ακέραιους -2 και 3 . Παρατηρούμε ότι οι ρίζες αυτές είναι διαιρέτες του σταθερού όρου -6 .

- Το αντίστροφο του θεωρήματος των ακέραιων ριζών δεν ισχύει. Πράγματι, στο προηγούμενο παράδειγμα όλοι οι διαιρέτες

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

του σταθερού όρου -6 δεν είναι και ρίζες της εξίσωσης $x^2 - x - 6 = 0$.

Επομένως, οι **διαιρέτες του σταθερού όρου** α_0 της εξίσωσης

$$\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0,$$

αποτελούν τις **μόνες πιθανές ακέραιες ρίζες** της.

Εύρεση Παράγοντα της Μορφής $x - \rho$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε σε μία νέα μέθοδο για την **παραγοντοποίηση** ενός πολωνύμου $P(x)$ και κατ' επέκταση για τη **λύση** μιας πολωνυμικής εξίσωσης $P(x) = 0$, βαθμού μεγαλύτερου από 2.

Συγκεκριμένα:

- Βρίσκουμε τις **πιθανές ακέραιες ρίζες** του πολωνύμου $P(x)$.
- Με δοκιμές βρίσκουμε μία **ακέραια ρίζα ρ** ή ισοδύναμα έναν **παράγοντα της μορφής $x - \rho$** του πολωνύμου $P(x)$.
- Με το σχήμα Horner βρίσκουμε το **πηλίκο $\pi(x)$** της διαίρεσης $P(x):(x - \rho)$.
Οπότε,

$$P(x) = (x - \rho) \cdot \pi(x).$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Λύση

Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ έχει ακέραιους συντελεστές. Άρα, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ του σταθερού όρου. Έχουμε λοιπόν

$$P(1) = 3 \neq 0, \quad P(-1) = -3 \neq 0 \quad \text{και} \quad P(2) = 8 - 16 + 4 + 4 = 0.$$

Άρα, το 2 είναι ρίζα του πολωνύμου $P(x)$ και συνεπώς το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολωνύμου αυτού. Με το σχήμα Horner βρίσκουμε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης $P(x):(x - 2)$.

1	-4	2	4	$\rho = 2$
	2	-4	-4	
1	-2	-2	0	

Άρα

Επομένως,

$$\pi(x) = x^2 - 2x - 2 \quad \text{και} \quad P(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 2).$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0 &\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 2x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1 + \sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x = 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Πρόσημο Γινομένου – Ανισώσεις Γινόμενο

- Για να μελετήσουμε ως προς το **πρόσημο** ένα γινόμενο

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x),$$

όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι πολυώνυμα $1^{\text{ου}}$ ή $2^{\text{ου}}$ βαθμού βρίσκουμε χωριστά το πρόσημο κάθε παράγοντα και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$ χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες γινομένου προσήμων.

Παράδειγμα

Σχετικά με το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (x-4)(2-x)(-x^2+x+2)$ έχουμε:

- $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.
Άρα, ο παράγοντας $x-4$ είναι θετικός για $x > 4$, μηδέν για $x = 4$ και αρνητικός για $x < 4$.
- $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
Άρα, ο παράγοντας $2-x$ είναι θετικός για $x < 2$, μηδέν για $x = 2$ και αρνητικός για $x > 2$.
- $-x^2+x+2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.
Άρα, ο παράγοντας $-x^2+x+2$ είναι θετικός για $-1 < x < 2$, μηδέν για $x = -1$ ή για $x = 2$ και αρνητικός για $x < -1$ ή για $x > 2$.

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$ και συνεπώς οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$x-4$	-	-	-	0	+
$2-x$	+	+	0	-	-
$-x^2+x+2$	-	0	+	0	-
$P(x)$	+	0	-	0	+

Επομένως, το γινόμενο $P(x)$ είναι θετικό για $x < -1$ ή για $x > 4$, μηδέν για $x = -1$ ή για $x = 2$ ή για $x = 4$ και αρνητικό για $-1 < x < 2$ ή για $2 < x < 4$.

- Για να λύσουμε μια **ανίσωση γινόμενο** της μορφής

$$A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x) > 0 \text{ ή } < 0$$

όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$ είναι πολυώνυμα $1^{\text{ου}}$ ή $2^{\text{ου}}$ βαθμού, αρκεί να βρούμε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x).$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$(x+1)(x^2-3x+2)(-x^2+2x-3) < 0.$$

Λύση

Έστω

$$P(x) = (x+1)(x^2-3x+2)(-x^2+2x-3)$$

Έχουμε:

- $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$
- $x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 2.$
- $-x^2+2x-3 \geq 0$ αδύνατη, αφού το τριώνυμο $-x^2+2x-3$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0,$$

συντελεστή του x^2 το $-1 < 0$ και συνεπώς είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$ και συνεπώς οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$x+1$	-	0	+	+	+		
x^2-3x+2	+		+	0	-	0	+
$-x^2+2x-3$	-		-	-	-	-	-
P(x)	+	0	-	0	+	0	-

Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης

$$(x+1)(x^2-3x+2)(-x^2+2x-3) < 0.$$

είναι οι αριθμοί

$$x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty).$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 \geq 0.$$

Λύση

Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους διαιρέτες $\pm 1, \pm 3$ του σταθερού όρου. Παρατηρούμε ότι $P(-1) = 0$. Άρα, το -1 είναι ρίζα και συνεπώς το $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Με το σχήμα Horner βρίσκουμε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$.

1	-2	-2	-2	-3	$\rho = -1$
	-1	3	-1	3	
1	-3	1	-3	0	

Επομένως,

$$\pi(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \quad \text{και} \quad P(x) = (x+1)(x^3 - 3x^2 + x - 3).$$

Άρα, η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (x+1)(x^3 - 3x^2 + x - 3) &\geq 0 \Leftrightarrow (x+1)[x^2(x-3) + (x-3)] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x^2+1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x-3) \geq 0, \text{ αφού } x^2+1 \text{ πάντα θετικό} \\ &\Leftrightarrow x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 3. \end{aligned}$$

Λυμένες Ασκήσεις

23. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 8x + 2.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - x + 1$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Λύση

i) Εκτελούμε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - x + 1)$.

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 8x + 2 & x^2 - x + 1 \\
 -x^4 + x^3 - x^2 & x^2 - 6x + 2 \\
 \hline
 -6x^3 + 8x^2 - 8x + 2 & \\
 -6x^3 - 6x^2 + 6x & \\
 \hline
 2x^2 - 2x + 2 & \\
 -2x^2 + 2x - 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια. Δηλαδή, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - x + 1$.

ii) Από το ερώτημα i) προκύπτει η ταυτότητα

$$P(x) = (x^2 - x + 1)(x^2 - 6x + 2).$$

Επομένως, η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - 6x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 6x + 2 = 0.$$

- Η εξίσωση $x^2 - x + 1 = 0$ είναι αδύνατη αφού έχει διακρίνουσα $\Delta = -3 < 0$.
- Η εξίσωση $x^2 - 6x + 2 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 28 > 0$. Οπότε, έχει δύο ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{28}}{2} = 3 \pm \sqrt{7}.$$

Τελικά, οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης είναι οι αριθμοί $3 + \sqrt{7}$ και $3 - \sqrt{7}$.

Σημειώσεις

- **Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού n** ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

με $a_n \neq 0$

- **Ρίζα** αυτής της εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

δηλαδή κάθε αριθμό ρ , για τον οποίο ισχύει

$$P(\rho) = 0.$$

24. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha \cdot x^2 + (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) \cdot x + 1,$$

όπου $\alpha \in (0, \pi)$.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$ για $x=1$ είναι ίση με 2.

ii) Για τη μικρότερη από τις τιμές του α που βρήκαμε στο ερώτημα i) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$P(1) = 2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^3 + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha \cdot 1^2 + (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) \cdot 1 + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\alpha(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu\alpha = -\sigma\upsilon\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \epsilon\varphi\alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \epsilon\varphi\alpha = \epsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή $\alpha \in (0, \pi)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ή} \quad \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

ii) Για $\alpha = \frac{\pi}{2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + 2\eta\mu\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \cdot x^2 + \left(2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot x + 1 \\ &= 2x^3 - x + 1. \end{aligned}$$

Επομένως, η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 2x^3 - x + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2x^3 - 2x + x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) + x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x-1)(x+1) + x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(2x^2 - 2x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x+1=0 \quad \text{ή} \quad 2x^2 - 2x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Όμως, η εξίσωση $2x^2 - 2x + 1 = 0$ έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

και συνεπώς δεν έχει πραγματικές ρίζες. Άρα, η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την

$$x = -1.$$

25. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \alpha^2 \cdot x^2 + \beta^2 \cdot x + 2\alpha - 4\beta + 4,$$

όπου α και β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, τότε:

- i) να βρείτε τους αριθμούς α και β
- ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 7x \cdot (x-1).$$

Λύση

- i) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned} P(1) = 0 &\Leftrightarrow 1 + \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha - 4\beta + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha + 1) + (\beta^2 - 4\beta + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 + (\beta - 2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\alpha = -1 \quad \text{και} \quad \beta = 2.$$

ii) Αντικαθιστώντας τις τιμές των α και β που βρήκαμε στο ερώτημα i) έχουμε

$$P(x) = x^3 + x^2 + 4x - 6.$$

Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner εκτελούμε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$.

Επομένως,

$$P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 6).$$

Άρα, η εξίσωση

$$P(x) = 7x(x-1)$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2 + 2x + 6) &= 7x(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 6) - 7x(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 6 - 7x) &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow x-1 &= 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad x=2 \quad \text{ή} \quad x=3. \end{aligned}$$

1	1	4	-6	1
	1	2	6	
1	2	6	0	

26. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 - 3$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$, διαιρούμενο με $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με $x+1$ αφήνει υπόλοιπο 14, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 9x + 12$

ii) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 2$.

Λύση

i) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού και διαιρείται με το $x^2 - 3$, το οποίο είναι πολυώνυμο δεύτερου βαθμού. Άρα, το πηλίκο της διαίρεσης είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού και συνεπώς

$$P(x) = (x^2 - 3)(\alpha x + \beta), \quad \text{όπου} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Όμως,

$$P(1) = 2 \quad \text{και} \quad P(-1) = 14.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(-1) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(\alpha + \beta) = 2 \\ -2(-\alpha + \beta) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + \beta = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -4 \end{cases}$$

Άρα,

$$P(x) = (x^2 - 3)(3x - 4) = 3x^3 - 4x^2 - 9x + 12.$$

- ii) Γνωρίζουμε ότι $P(1) = 2$. Άρα, ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 2$. Έχουμε

$$P(x) = 2 \Leftrightarrow 3x^3 - 4x^2 - 9x + 10 = 0.$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner εκτελούμε τη διαίρεση

$$(3x^3 - 4x^2 - 9x + 10) : (x - 1).$$

3	-4	-9	10	1
	3	-1	-10	
3	-1	-10	0	

Επομένως

$$3x^3 - 4x^2 - 9x + 10 = (x - 1)(3x^2 - x - 10)$$

και η εξίσωση $P(x) = 2$ ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} P(x) = 2 &\Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 - x - 10) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 3x^2 - x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

27. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - \alpha x + \beta$$

το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - 4$.

i) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\sin x \cdot \sin 2x = \sin^2 x + 7 \sin x - 4.$$

Λύση

- i) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

αν και μόνο αν έχει παράγοντα το $x - 2$ και το $x + 2$. Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(2) = 0 \quad \text{και} \quad P(-2) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$16 - 4 - 2\alpha + \beta = 0 \quad \text{και} \quad -16 - 4 + 2\alpha + \beta = 0.$$

Τελικά βρίσκουμε

$$\alpha = 8 \quad \text{και} \quad \beta = 4.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\alpha = 8 \quad \text{και} \quad \beta = 4.$$

Επομένως,

$$P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4.$$

Άρα, η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0 &\Leftrightarrow 2x(x^2 - 4) - (x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - 1)(x^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = \pm 2. \end{aligned}$$

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sin x \cdot \sin 2x &= \sin^2 x + 7\sin x - 4 \Leftrightarrow \sin x \cdot (2\sin^2 x - 1) = \sin^2 x + 7\sin x - 4 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^3 x - \sin x = \sin^2 x + 7\sin x - 4 \\ &\Leftrightarrow 2\sin^3 x - \sin^2 x - 8\sin x + 4 = 0. \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\sin x = u$$

η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$2u^3 - u^2 - 8u + 4 = 0$$

δηλαδή,

$$P(u) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$u = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad u = \pm 2$$

σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα. Δηλαδή,

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \sin x = \pm 2.$$

Και επειδή

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

28. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ να διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(2, 8)$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$P(x) = x^3 + x^2 - 2x.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 8.$$

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία

$$y = 2.$$

Λύση

i) Είναι φανερό ότι το πολυώνυμο $P(x)$ είναι της μορφής

$$P(x) = (x^2 + 2x)(\alpha x + \beta), \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Όμως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B(2, 8)$.

Επομένως,

$$P(1) = 0 \quad \text{και} \quad P(2) = 8.$$

Δηλαδή,

$$3(\alpha + \beta) = 0 \quad \text{και} \quad 8(2\alpha + \beta) = 8.$$

Οπότε, βρίσκουμε

$$\alpha = 1 \quad \text{και} \quad \beta = -1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 2x)(x - 1) \\ &= x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x \\ &= x^3 + x^2 - 2x. \end{aligned}$$

ii) Γνωρίζουμε ότι

$$P(2) = 8.$$

Άρα, ο αριθμός 2 είναι μια ρίζα της εξίσωσης

$$P(x) = 8$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$P(x) - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0. \quad (1)$$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner εκτελούμε τη διαίρεση

$$(x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x - 2).$$

1	1	-2	-8	2
	2	6	8	
1	3	4	0	

Επομένως,

$$x^3 + x^2 - 2x - 8 = (x - 2)(x^2 + 3x + 4)$$

και η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$(x - 2)(x^2 + 3x + 4) = 0$$

δηλαδή

$$x - 2 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + 3x + 4 = 0, \quad \text{αδύνατη αφού } \Delta = -7 < 0$$

και τελικά

$$x = 2.$$

iii) Η εξίσωση

$$P(x) = 2$$

ισοδύναμα γράφεται

$$x^3 + x^2 - 2x = 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 1) - 2(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{ή} \quad x = -\sqrt{2}$$

Άρα, τα ζητούμενα σημεία είναι

$$A(-1, 2), \quad B(\sqrt{2}, 2) \quad \text{και} \quad \Gamma(-\sqrt{2}, 2).$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f(x)$ με την ευθεία

$$y = \kappa,$$

αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = \kappa.$$

29. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 7x - 2.$$

Να βρείτε:**i) τις ακέραιες ρίζες της εξίσωσης**

$$P(x) = 0$$

ii) τις ρίζες της εξίσωσης

$$P(x) = 0.$$

Λύση

i) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$ είναι οι διαιρέτες

$$\pm 1 \text{ και } \pm 2$$

του σταθερού όρου. Έχουμε λοιπόν

$$\bullet \quad P(-1) = 1 - 5 + 3 + 7 - 2 = 4 \neq 0$$

$$\bullet \quad P(-1) = 1 + 5 + 3 - 7 - 2 = 0$$

$$\bullet \quad P(2) = 16 - 40 + 12 + 14 - 2 = 0$$

$$\bullet \quad P(-2) = 16 + 40 + 12 + 14 - 2 \neq 0.$$

Άρα, οι ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ είναι οι αριθμοί -1 και 2 .

ii) Αποδείξαμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες το -1 και το 2 , οπότε έχει παράγοντες τα $x+1$ και $x-2$. Με το πρώτο σχήμα Horner βρίσκουμε το πηλίκο $\pi_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ της διαίρεσης $P(x):(x+1)$, ενώ με το δεύτερο σχήμα Horner βρίσκουμε το πηλίκο $\pi_2(x) = x^2 - 4x + 1$ της διαίρεσης $\pi_1(x):(x-2)$. Επομένως, έχουμε

Σημείωση

Αν ένας **ακέραιος** αριθμός $p \neq 0$ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με **ακέραιους** συντελεστές, τότε ο p είναι **διαιρέτης** του **σταθερού όρου** α_0 .

1	-5	3	7	-2	1
	-1	6	-9	2	
1	-6	9	-2	0	

1	-6	9	-2	2
	2	-8	2	
1	-4	1	0	

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\pi_1(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)\pi_2(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ ή } x-2=0 \text{ ή } x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

30. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + 3x^2 + x + 1$$

όπου a, b σταθεροί ακέραιοι αριθμοί. Αν ο αριθμός $4b - 5$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $b = 1$

ii) να βρείτε τον ακέραιο a

iii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) + 3(x + 1) = 0.$$

Λύση

i) Οι συντελεστές του πολυώνυμου $P(x)$ είναι ακέραιοι αριθμοί. Ο αριθμός $4b - 5$, ρίζα του $P(x)$, είναι επίσης ακέραιος αριθμός. Επομένως, σύμφωνα με θεώρημα ο αριθμός $4b - 5$ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου 1. Έχουμε λοιπόν

$$4b - 5 = 1 \quad \text{ή} \quad 4b - 5 = -1.$$

Όμως, η σχέση

$$4b - 5 = 1 \Leftrightarrow 4b = 6$$

είναι αδύνατη, αφού ο αριθμός b είναι ακέραιος, ενώ από τη σχέση

$$4b - 5 = -1$$

προκύπτει

$$4b = 4$$

και τελικά

$$b = 1.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$b = 1$$

και συνεπώς ότι ο αριθμός

$$4b - 5 = -1$$

είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = ax^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

Επομένως,

$$P(-1) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha(-1)^4 + (-1)^3 + 3(-1)^2 + (-1) + 1 = 0$$

και τελικά

$$\alpha = -2.$$

iii) Έχουμε

$$P(x) = -2x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

Γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό -1 . Άρα, το $P(x)$ διαιρείται με το $x+1$. Με το σχήμα Horner βρίσκουμε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x) : (x+1).$$

-2	1	3	1	1	-1
	2	-3	0	-1	
-2	3	0	1	0	

Δηλαδή,

$$P(x) = (x+1)(-2x^3 + 3x^2 + 1).$$

Επομένως, η εξίσωση

$$P(x) + 3(x+1) = 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$(x+1)(-2x^3 + 3x^2 + 1) + 3(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(-2x^3 + 3x^2 + 1 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad -2x^3 + 3x^2 + 4 = 0.$$

Η πολυωνυμική εξίσωση

$$-2x^3 + 3x^2 + 4 = 0 \tag{1}$$

έχει ακέραιους συντελεστές. Άρα, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 2$ και ± 4 του σταθερού όρου του πολυωνύμου $Q(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$.

Έχουμε λοιπόν

$$Q(1) = 5 \neq 0, \quad Q(-1) = 9 \neq 0 \quad \text{και} \quad Q(2) = 0.$$

Άρα, το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης (1) και συνεπώς το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $-2x^3 + 3x^2 + 4$.

Με το σχήμα Horner βρίσκουμε το πηλίκο της διαίρεσης

$$(-2x^3 + 3x^2 + 4) : (x - 2)$$

-2	3	0	4	2
	-4	-2	-4	
-2	-1	-2	0	

Δηλαδή,

$$-2x^3 + 3x^2 + 4 = (x - 2)(-2x^2 - x - 2)$$

Επομένως, η εξίσωση (1) γράφεται

$$(x - 2)(-2x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad -2x^2 - x - 2 = 0.$$

Η εξίσωση

$$-2x^2 - x - 2 = 0$$

είναι αδύνατη, αφού έχει διακρίνουσα

$$\Delta = -15 < 0.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς -1 και 2 .

31. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + ax + \beta,$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 + P(1)$ και διαιρούμενο με $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 - P(-1)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$P(1) = 0 \quad \text{και} \quad P(-1) = 16$$

ii) να βρείτε τους a και β

iii) να αποδείξετε ότι

$$P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7) \neq 0.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$P(-1) = 16 + P(1) \quad \text{και} \quad P(1) = 16 - P(-1).$$

Οπότε, βρίσκουμε

$$P(1) = 0 \quad \text{και} \quad P(-1) = 16.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$P(1) = 0 \quad \text{και} \quad P(-1) = 16.$$

Δηλαδή,

$$3 - 12 + 8 + \alpha + \beta = 0 \quad \text{και} \quad 3 + 12 + 8 - \alpha + \beta = 16$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{και} \quad \alpha - \beta = 7$$

και τελικά

$$\alpha = 4 \quad \text{και} \quad \beta = -3.$$

iii) Αποδείξαμε ότι

$$\alpha = 4 \quad \text{και} \quad \beta = -3.$$

Επομένως,

$$P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + 4x - 3.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

είναι πολυωνυμική με ακέραιους συντελεστές. Άρα, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι διαιρέτες $\pm 1, \pm 3$ του σταθερού όρου. Επομένως, κανένας από τους αριθμούς 4, 5, 6 και 7 δεν είναι ρίζα αυτής της εξίσωσης. Δηλαδή,

$$P(4) \neq 0 \quad \text{και} \quad P(5) \neq 0 \quad \text{και} \quad P(6) \neq 0 \quad \text{και} \quad P(7) \neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7) \neq 0.$$

32. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta, \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$$

τέτοιο, ώστε

$$2P^2(0) + 13P(0) = 7.$$

i) Να βρείτε την τιμή $P(0)$.

ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0,$$

να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$2P^2(0) + 13P(0) = 7 \Leftrightarrow 2P^2(0) + 13P(0) - 7 = 0.$$

Πρόκειται για εξίσωση β' βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 225.$$

Άρα,

$$P(0) = \frac{-13 \pm \sqrt{225}}{4}$$

δηλαδή

$$P(0) = -7 \quad \text{ή} \quad P(0) = \frac{1}{2}.$$

Και επειδή

$$P(0) = \beta \in \mathbb{Z},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$P(0) = -7.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$P(0) = -7$$

ή ισοδύναμα

$$\beta = -7.$$

Επομένως,

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + \alpha x - 7, \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι οι διαιρέτες ± 1 και ± 7 του σταθερού όρου.
Άρα, από τη σχέση

$$P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0$$

προκύπτει ότι

$$P(1) = 0$$

αφού

$$P(2) \neq 0 \quad \text{και} \quad P(3) \neq 0.$$

Από τη σχέση

$$P(1) = 0$$

παίρνουμε

$$1 - 7 + \alpha - 7 = 0$$

δηλαδή,

$$\alpha = 13.$$

Επομένως,

$$P(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 7.$$

Με το σχήμα Horner εκτελούμε τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$.

1	-7	13	-7	1
	1	-6	7	
1	-6	7	0	

Άρα,

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 7)$$

και η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$(x - 1)(x^2 - 6x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 6x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Παρατήρηση

Η δοθείσα σχέση

$$P(1) \cdot P(2) \cdot P(3) = 0$$

μαρτυρεί ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς 1, 2 και 3 είναι ρίζα της εξίσωσης

$$P(x) = 0.$$

Όμως, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυώνυμου $P(x)$ είναι οι διαιρέτες ± 1 και ± 7 του σταθερού του όρου.

33. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x-2)(x+3)(x-5).$$

Λύση

Έχουμε:

- $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
- $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$
- $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$ επομένως οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-3	2	5	$+\infty$		
$x-2$	-	-	0	+	+		
$x+3$	-	0	+	+	0	+	
$x-5$	-	-	-	0	+		
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Σημείωση

Για να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x)$ ως προς το πρόσημό του βρίσκουμε χωριστά το πρόσημο κάθε παράγοντα και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$ χρησιμοποιώντας τους γνωστούς κανόνες του γινομένου προσημών.

Δηλαδή,

$$P(x) < 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)$$

και

$$P(x) > 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x \in (-3, 2) \cup (5, +\infty).$$

34. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x^2 - x)(x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 7).$$

Λύση

Έχουμε:

- $x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \text{ ή } x \geq 1$
- $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \text{ ή } x \geq 3$
- $x^2 - 5x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, αφού $\Delta = 25 - 28 = -3 < 0$.

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$, επομένως οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$			
$x^2 - x$	+	0	-	0	+	+			
$x^2 - 5x + 6$	+		+	+	0	-	0	+	
$x^2 - 5x + 7$	+		+	+		+		+	
P(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Άρα,

$$P(x) < 0 \text{ αν και μόνο αν } x \in (0, 1) \cup (2, 3)$$

και

$$P(x) > 0 \text{ αν και μόνο αν } x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty).$$

35. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (2x-1)(-3x+1)^5(x-4)^6.$$

Λύση

Έχουμε:

- $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$
- $(-3x+1)^5 \geq 0 \Leftrightarrow -3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$
- $(x-4)^6 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$, επομένως οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$2x-1$	-	-	0	+	+
$(-3x+1)^5$	+	0	-	-	-
$(x-4)^6$	+	+	+	0	+
$P(x)$	-	0	+	0	-

Δηλαδή,

$$P(x) < 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 4\right) \cup (4, +\infty)$$

και

$$P(x) > 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

36. Να λύσετε την ανίσωση

$$(x+1)(2-x)^5(x+3)^4 < 0.$$

Λύση

Έστω

$$P(x) = (x+1)(2-x)^5(x+3)^4.$$

Έχουμε:

- $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
- $(2-x)^5 \geq 0 \Leftrightarrow 2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$
- $(x+3)^4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$, επομένως οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	-	0	+	+
$(2-x)^5$	+	+	+	0	-
$(x+3)^4$	+	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	-	0	-

Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης

$$(x+1)(2-x)^5(x+3)^4 < 0$$

είναι οι αριθμοί

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (2, +\infty).$$

37. Να λύσετε την ανίσωση

$$(x-1)(2x-3)^7(5x-2)^{11} > 0.$$

Λύση

Έστω

$$P(x) = (x-1)(2x-3)^7(5x-2)^{11}.$$

Έχουμε:

- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
- $(2x-3)^7 \geq 0 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$
- $(5x-2)^{11} \geq 0 \Leftrightarrow 5x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}.$

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$, επομένως οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$		
$x-1$	-	-	0	+	+		
$(2x-3)^7$	-	-	-	0	+		
$(5x-2)^{11}$	-	0	+	+	+		
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης

$$(x-1)(2x-3)^7(5x-2)^{11} > 0$$

είναι οι αριθμοί

$$x \in \left(\frac{2}{5}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

38. Να λύσετε την ανίσωση

$$(x-2)(x^2-5x+4)(x^2+x+1) \leq 0.$$

Λύση

Έστω

$$P(x) = (x-2)(x^2-5x+4)(x^2+x+1)$$

Έχουμε:

- $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
- $x^2-5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ή } x \geq 4$
- $x^2+x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, αφού $\Delta = 1-4 = -3 < 0$.

Οι ρίζες και το πρόσημο των παραγόντων του $P(x)$, επομένως οι ρίζες και το πρόσημο του $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$
$x-2$	-		- 0 +		+
x^2-5x+4	+	0 -		- 0 +	
x^2+x+1	+		+		+
$P(x)$	-	0 +	0 -	0 +	

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης

$$(x-2)(x^2-5x+4)(x^2+x+1) \leq 0$$

είναι οι αριθμοί

$$x \in (-\infty, 1] \cup [2, 4].$$

39. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - \alpha x + \beta,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$P(x) : (x^2 - 1)$$

και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

ii) Να βρείτε τους α και β έτσι, ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x^2 - 1)$$

να είναι το πολυώνυμο $-2x + 5$.

iii) Για $\alpha = 3$ και $\beta = 1$, να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) < x^2 - 2x + 4.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - \alpha x + \beta & x^2 - 1 \\ -x^3 & + x \\ \hline 4x^2 + (1 - \alpha)x + \beta & \\ -4x^2 & + 4 \\ \hline (1 - \alpha)x + \beta + 4 & \end{array}$$

Δηλαδή,

$$P(x) = (x^2 - 1)(x + 4) + (1 - \alpha)x + \beta + 4.$$

ii) Στο ερώτημα i) αποδείξαμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x^2 - 1)$$

είναι το πολυώνυμο $(1 - \alpha)x + \beta + 4$. Το πολυώνυμο αυτό είναι ίσο με το πολυώνυμο $-2x + 5$ αν και μόνο αν ισχύουν οι σχέσεις

$$1 - \alpha = -2 \quad \text{και} \quad \beta + 4 = 5.$$

Δηλαδή,

$$\alpha = 3 \quad \text{και} \quad \beta = 1.$$

iii) Για $\alpha=3$ και $\beta=1$ η ανίσωση

$$P(x) < x^2 - 2x + 4$$

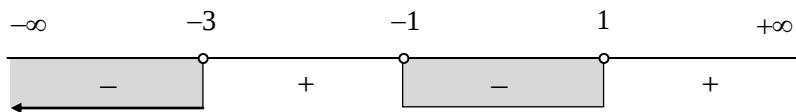
ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)(x + 4) - 2x + 5 &< x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 4) - x^2 + 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 4) - (x^2 - 1) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x + 4 - 1) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3) < 0. \end{aligned}$$

Τοποθετούμε τις ρίζες του

$$(x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

στον άξονα των πραγματικών αριθμών.



Εφαρμόζοντας το γνωστό κανόνα του γινομένου των προσήμων βρίσκουμε το πρόσημο του

$$(x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

σε καθένα από τα ανοικτά διαστήματα που ορίζουν οι ρίζες

$$-3, -1 \text{ και } 1$$

στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Έτσι, οι λύσεις της ανίσωσης

$$(x - 1)(x + 1)(x + 3) < 0$$

είναι οι αριθμοί

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1).$$

40. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + ax + \beta$$

το οποίο έχει ρίζες τους πραγματικούς αριθμούς ρ_1, ρ_2 και 3 τέτοιους, ώστε

$$\rho_1 \rho_2 = -1.$$

i) Να βρείτε τις τιμές των a και β .

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) + x < 3$.

Λύση

i) Ο αριθμός 3 είναι ρίζα του πολυώνυμου $P(x)$. Επομένως, το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-3$. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner εκτελούμε τη διαίρεση $P(x):(x-3)$.

1	-5	a	β	3
	3	-6	$3a-18$	
1	-2	$a-6$	$3a+\beta-18$	

Έχουμε λοιπόν

$$3a + \beta - 18 = 0 \Leftrightarrow 3a + \beta = 18 \quad (1)$$

και

$$P(x) = (x-3)(x^2 - 2x + a - 6).$$

Οπότε, οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 2x + a - 6$.

Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta ισχύει

$$\rho_1 \rho_2 = a - 6.$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε

$$\rho_1 \rho_2 = -1.$$

Επομένως,

$$a - 6 = -1 \Leftrightarrow a = 5$$

και από τη σχέση (1) έχουμε

$$3a + \beta = 18 \Leftrightarrow 15 + \beta = 18 \Leftrightarrow \beta = 3.$$

ii) Αντικαθιστώντας τις τιμές των α και β που βρήκαμε στο ερώτημα i) προκύπτει ότι

$$P(x) = (x-3)(x^2 - 2x - 1).$$

Οπότε,

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

iii) Έχουμε

$$P(x) + x < 3$$

$$\Leftrightarrow P(x) + x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 2x - 1) + (x-3) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 2x - 1 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 2x) < 0.$$

Το πρόσημο του γινομένου $(x-3)(x^2 - 2x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$x^2 - 2x$	+	0	-	0	+
$(x-3)(x^2 - 2x)$	-	0	+	0	+

Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης

$$(x-3)(x^2 - 2x) < 0$$

που είναι και οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης, είναι οι αριθμοί

$$x \in (-\infty, 0) \cup (2, 3).$$

41. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 8x - 4$$

το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-1)^2$.

i) Να υπολογίσετε τους α και $\beta \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$P(x) = (x-1)^2 (x^2 - 4).$$

iii) Να βρείτε τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

i) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ και συνεπώς έχει παράγοντα το $x-1$. Επομένως,

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + 8 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = -\alpha - 5.$$

Άρα,

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + (-\alpha - 5)x^2 + 8x - 4.$$

Με το σχήμα Horner βρίσκουμε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης

$$P(x) : (x-1).$$

1	α	$-\alpha - 5$	8	-4	1
	1	$\alpha + 1$	-4	4	
1	$\alpha + 1$	-4	4	0	

Δηλαδή,

$$\pi(x) = x^3 + (\alpha + 1)x^2 - 4x + 4.$$

Είναι φανερό ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$ αν και μόνο αν το $\pi(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$. Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\pi(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + (\alpha + 1) - 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2.$$

Επίσης,

$$\beta = -\alpha - 5 = 2 - 5 = -3.$$

Σημείωση

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν έχει παράγοντα το $x-\rho$ και το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης

$$P(x) : (x-\rho)$$

έχει επίσης παράγοντα το $x-\rho$.

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\alpha = -2 \text{ και } \beta = -3.$$

Επομένως,

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$$

και

$$\begin{aligned} \pi(x) &= x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4). \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)\pi(x) \\ &= (x-1)(x-1)(x^2-4) = (x-1)^2(x^2-4). \end{aligned}$$

iii) Αναζητούμε τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ στα οποία ισχύει η σχέση

$$P(x) > 0.$$

Δηλαδή,

$$(x-1)^2(x^2-4) > 0$$

ή ισοδύναμα

$$x^2 - 4 > 0 \text{ και } x \neq 1,$$

αφού

$$(x-1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Τελικά,

$$x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ στα οποία η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ αρκεί να λύσουμε την ανίσωση $f(x) > 0$.

42. Το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x - 1, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$$

έχει ακέραια ρίζα.

i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha = \beta.$$

ii) Αν επιπλέον το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-2$ είναι ίσο με 3, τότε:

α) να βρείτε τους α και β

β) να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) > 0.$$

Λύση

- i) Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραιους συντελεστές. Και επειδή έχει ακέραια ρίζα αυτή θα είναι κάποιος από τους διαιρέτες ± 1 του σταθερού όρου. Έχουμε

$$P(-1) = (-1)^3 - \alpha(-1)^2 + \beta(-1) - 1 = -\alpha - \beta - 2 \neq 0,$$

αφού $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$.

Άρα,

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha + \beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

- ii) α) Έχουμε

$$P(2) = 3.$$

Δηλαδή,

$$2^3 - \alpha \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 - 1 = 3 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta = 4.$$

Όμως, στο ερώτημα i) αποδείξαμε ότι $\alpha = \beta$. Από τα παραπάνω βρίσκουμε

$$\alpha = \beta = 2.$$

- β) Έχουμε

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

Άρα, η ανίσωση

$$P(x) > 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) - 2x(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1 - 2x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 1) > 0.$$

Όμως, το $x^2 - x + 1$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0.$$

Επομένως, η ανίσωση

$$(x-1)(x^2 - x + 1) > 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$x - 1 > 0$$

δηλαδή

$$x > 1.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

47. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 4.$$

- i) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 1$.
- ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

48. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1.$$

- i) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : (x^2 + x)$$

- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

49. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4.$$

- i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

50. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2.$$

- i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 2)$ και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = x$.

51. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + ax - a^2 \quad \text{με } a \in \mathbb{R}$$

για το οποίο ισχύει η σχέση

$$P(1) - P(0) = 1.$$

- i) Να βρείτε την τιμή του a .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

52. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \lambda^4 x^4 - 5\lambda^2 x^2 + 4,$$

όπου λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

i) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$.

ii) Για $\lambda=1$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

53. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 + 4x + 2a + \beta$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι ίσο με 3, να βρείτε τους a και β .

ii) Για $a=2$ και $\beta=-5$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

54. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 2x + 3$$

με το $x-1$ είναι ίσο με 7.

i) Να βρείτε την τιμή του a .

ii) Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - x)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 4x + 3$.

55. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 6$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$a^2 - \beta^2 = 15.$$

Αν το πολυώνυμο $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$a = -4 \quad \text{και} \quad \beta = 1$$

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

56. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - \alpha x^3 + 2\beta x^2 + x - 1,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

- i) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x-2$ είναι 1, να βρείτε τους α και β .
 ii) Για $\alpha=3$ και $\beta=1$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

57. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + (2\sin^2\alpha - 1) \cdot x^2 - (\sin\alpha) \cdot x + 1, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

το οποίο διαιρούμενο με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο 1.

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

58. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + \alpha x + 5 + \beta$$

και

$$Q(x) = x^3 + \beta x^2 - x + 2 - \alpha$$

τα οποία έχουν κοινό παράγοντα το πολυώνυμο $x-1$.

- i) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .
 ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) + Q(x) = 0.$$

59. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 8x - 8$$

με το πολυώνυμο x είναι

$$v = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha - 7.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

60. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου

$$P(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

με το πολυώνυμο $x - 2$ είναι

$$v = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha - 2\beta + 22.$$

- i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .
- ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

61. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = \alpha x^3 + x^2 + (\alpha + \beta)x - 1 \quad \text{και} \quad Q(x) = x^3 + \gamma x^2 + 3x + 1,$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

- i) Να βρείτε τους α, β και γ έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ να μην έχει βαθμό.
- ii) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x + 1$ είναι 9 και το πολυώνυμο

$$G(x) = P(x) + 27$$

έχει παράγοντα το $x - 2$, τότε:

- α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = -5$
- β) να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (2x + 1)$ και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητά της Ευκλείδειας διαίρεσης
- γ) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 3$.

62. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + \alpha x^2 + \beta,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - x$ είναι το πολυώνυμο $10x + 1$, τότε:

- i) να βρείτε τους αριθμούς α και β
- ii) να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : x^2(x - 2)$ και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης
- iii) να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

63. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + 4x^2 + \alpha x + \beta,$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν τα υπόλοιπα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με τα πολυώνυμα $x+1$ και $x-2$ είναι 16 και -17 αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii) να αποδείξετε ότι

$$P(x) + (2x + 5)^2 = (x^2 + 4)^2$$

iii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

64. Το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta$$

έχει παράγοντες τα πολυώνυμα

$$x-1 \text{ και } x+3.$$

i) Να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

iii) Να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x)$ έτσι, ώστε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$P(x) : Q(x)$$

να είναι πολυώνυμα $x^2 - 7$ και $2x - 14$ αντίστοιχα.

65. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^6 - 9x^3 + 8 = 0$$

$$\text{ii)} \quad (x+3)^4 - 5(x^2 + 6x + 9) + 4 = 0.$$

66. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 + x + 1$. Αν η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ διέρχεται από τα σημεία $A(0, 2)$ και $B(2, 0)$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$P(x) = -x^3 + x^2 + x + 2$$

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$(P(x) + x^3)^2 + 2 = 3P(x) + 3x^3.$$

67. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 3).$$

i) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 4.$$

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο

$$x - P(1 + \sqrt{2}) + 3 + \sqrt{2}.$$

68. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 + (\eta\mu\alpha - 4)x - \eta\mu\alpha, \text{ με } \alpha \in (0, 2\pi).$$

i) Να υπολογίσετε την τιμή $P(1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ έχει ακριβώς τρία κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$P(\eta\mu\alpha) = 0.$$

69. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ τέτοια, ώστε

$$P(x) = P(2 - x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $P(x)$ δεν είναι γνησίως μονότονη.

ii) Αν ισχύει η σχέση

$$P(0) = 2,$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$

β) να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x^2 - 2x$.

70. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^3 - 9$ αφήνει υπόλοιπο $u(x)$ ίσο με το πηλίκο $\pi(x)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

71. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

i) $x^3 + 5x^2 + 5x - 3 = 0$

ii) $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0.$

72. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων:

i) $2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - 1 = 0$

ii) $21x^3 + 70x^2 + 14x - 21 = 0.$

73. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες:

i) $x^3 + 7x^2 - 5 = 0$

ii) $x^5 + 4x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0.$

74. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει αρνητική ρίζα.

ii) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

75. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + 2^a \cdot x^2 + x + 1$$

όπου a ένας φυσικός αριθμός. Αν η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

έχει ακέραια ρίζα, τότε:

i) να βρείτε την τιμή του a

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

76. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 4x^3 + ax^2 + \beta x + 1,$$

όπου a, β σταθεροί ακέραιοι αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει δύο ακέραιες ρίζες, τότε:

i) να αποδείξετε ότι

$$a = -1 \text{ και } \beta = -4$$

ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

77. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 7x + 2,$$

όπου α, β σταθεροί θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει δύο ακέραιες ρίζες, να βρείτε:

- i) τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$
- ii) τους αριθμούς α και β
- iii) τις ρίζες του $P(x)$.

78. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί κ και λ τέτοιοι, ώστε ο αριθμός $5\kappa + 8$ να είναι ρίζα της εξίσωσης

$$x^5 + \lambda x^4 + x + 2 = 0.$$

- i) Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ .
- ii) Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

79. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$$

όπου α, β σταθεροί ακέραιοι αριθμοί. Αν οι αριθμοί $\alpha + 1$ και $\beta - 1$ είναι ρίζες του πολυωνύμου, διαφορετικές μεταξύ τους, τότε:

- i) να βρείτε τις τιμές των α και β
- ii) να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

80. Έστω δύο πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ με ακέραιους συντελεστές για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$P(0) + Q(0) = 5 \quad \text{και} \quad P(0) - Q(0) = 1.$$

- i) Να βρείτε τους σταθερούς όρους των πολυωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$P^2(x) + Q^2(x) = 0$$

έχει το πολύ δύο ακέραιες ρίζες.

81. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 - ax^2 - \beta x + 3,$$

όπου a και β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύει η σχέση

$$P(2) = 0,$$

τότε:

- i) να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς a και β δεν είναι ακέραιος
ii) να βρείτε τους a και β έτσι, ώστε $\beta = 4a$.
82. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές για το οποίο ισχύει η σχέση
- $$P(1) \cdot P(2) = 3.$$
- Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$, να αποδείξετε ότι:
- i) υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε
- $$(\rho - 1)(\rho - 2)\Pi(1)\Pi(2) = 3$$
- ii) ο αριθμός ρ δεν είναι ακέραιος.

83. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = x(x+1)(x-2).$$

84. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (2x-1)^3(5x-1)^2(x^2+1)^5.$$

85. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (x-5)(-3x+17)(x^2-6x+9)^3.$$

86. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (3x+1)^2(-2x+1)^5(x^2-x)^8.$$

87. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (9-x^2)(x^2-3x-4)(x^2-4x+5).$$

88. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i) } (x-2)(3x-7)(8-x) < 0 \qquad \text{ii) } (4x+1)(x-3)^2(x^2-10x+25)^3 > 0.$$

89. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(3x-4)^5 \cdot (3x-6)^7 \leq 0$

ii) $(x-2)^4 \cdot (5x+1)^7 \geq 0.$

90. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(x^2-3x+2)(x^2-7x+12) > 0$

ii) $(x^2+2x-3)(x^2+2x+2) < 0.$

91. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0$

ii) $x^3 - 3x^2 + x - 3 > 0.$

92. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^{10} - 8x^7 < x^3 - 8$

ii) $(x^2+x)^2 < 2(x^2+x).$

93. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3 + 3x^2 - 3x + 4 > 0$

ii) $x^3 < 5x^2 - 7x + 3.$

94. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 > 0$

ii) $x^5 \leq 3x^4 - x + 3.$

95. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(x+2)(2-x)(x-1)^2 > 0$

ii) $(|x|+1)(x^2-3x+2) < 0.$

96. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(1-3x)(-x^2+3x+4)(x^2-6x+9) \leq 0$

ii) $(8+2x-x^2)(x^2-2x+1) < 0.$

97. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(3-x)(-x^2+6x-5)(x^2+5x) > 0$

ii) $(3-x)^{11} \cdot (-2x^2+8x) \cdot (x+1)^{10} \cdot (x^2-4x-5) \leq 0.$

98. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$1 - x > 1 - x^2 > 1 - x^3.$$

99. i) Να αποδείξετε ότι

$$|a| + |\beta| = |a + \beta| \Leftrightarrow a\beta \geq 0.$$

- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$|x - 2| + |x + 2| = 2|x|.$$

100. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda - 1)x^3 + (\lambda + 1)x + 2\lambda - 3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- i) Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
 ii) Για $\lambda = 2$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το $P(x)$ να παίρνει την μορφή $x^2(x - \alpha) + x(x + \beta) + x + 1$.
 iii) Για $\lambda = 3$, να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) < 3.$$

101. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 9x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$$

το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 1 και διαιρούμενο με το $x - 2$ αφήνει υπόλοιπο 6.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 25$ και $\beta = -21$.
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
 iii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

102. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3 \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει ως ρίζα τον αριθμό 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ είναι ίσο με 1.

- i) Να βρείτε τις τιμές των α, β .
 ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
 iii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

103. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - \alpha x^2 + 2\alpha x - 8.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ως ρίζα τον αριθμό 2.
- ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει, εκτός από τον αριθμό 2, δύο ακόμη πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 τέτοιες, ώστε $\rho_1 + \rho_2 = 5$, να βρείτε την τιμή του α και στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

104. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύουν οι σχέσεις

$$P(1) + 4P(0) = 0$$

και

$$\frac{P(-1)}{3} = \frac{-P(1)}{5} = 4,$$

τότε:

- i) να βρείτε τις τιμές $P(1)$, $P(0)$ και $P(-1)$
- ii) να βρείτε τους αριθμούς α, β και γ
- iii) να αποδείξετε ότι $P(x) + 4(2x+1)^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iv) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

105. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 4$$

το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 2$.

- i) Να αποδείξετε ότι

$$2\alpha + \beta + 2 = 0.$$
- ii) Να βρείτε τους αριθμούς α και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x - 2)^2$.
- iii) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 8$, να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) < 0.$$

106. Δίνεται το πολύωνυμο

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x - 1.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 4x + 1$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

107. Δίνεται το πολύωνυμο

$$P(x) = 2x^3 - 11x^2 - 4x + \alpha$$

το οποίο έχει παράγοντα το πολύωνυμο $x^2 - 6x + \beta$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

108. Δίνεται το πολύωνυμο

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + (\alpha + 1)x^2 + 2x + \alpha + 2,$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολύωνυμο $x^2 + x$ και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.
- ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η παραπάνω διαίρεση είναι τέλεια.
- iii) Για $\alpha = -2$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

109. Δίνεται το πολύωνυμο

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$$

όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $x^2 - 1$, τότε:

- i) να βρείτε τις τιμές των α και β
- ii) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
- iii) να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

110. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + ax + \beta,$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση

$$P(x) : (x^6 - 1)$$

και να γράψετε την αντίστοιχη ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

ii) Να βρείτε τους a και β , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

iii) Για $a = 6$ και $\beta = -9$, να βρείτε:

α) τις ρίζες της εξίσωσης

$$P(x) = 0$$

β) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

111. Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης

$$f(x) = x^4 + ax^3 + \beta x^2 - 5x + 6$$

διέρχεται από τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(2, 0)$.

i) Να βρείτε τους $a, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

112. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 16.$$

i) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x + 2$.

ii) Να αποδείξετε ότι το $x + 1$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$. Ποιο είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $\pi(x)$ με το $x + 1$;

iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 4$.

113. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x + 2,$$

όπου a, β σταθεροί θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

- i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει θετικές ρίζες.
- ii) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει δύο ακέραιες ρίζες, τότε:
 - α) να αποδείξετε ότι $a = 3$ και $\beta = 10$
 - β) να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 2$.

114. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - \alpha x^2 + 4x - 2,$$

όπου α σταθερός ακέραιος αριθμός.

- i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση
$$P(x) = 0$$
έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.
- ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

115. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x + 2$.

- i) Να αποδείξετε ότι ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β δεν είναι ακέραιος.
- ii) Αν επιπλέον το υπόλοιπο της διαίρεσης
$$P(x) : (x - 1)$$
είναι 6, τότε:
 - α) να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{9}{2}$ και $\beta = \frac{7}{2}$
 - β) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - γ) να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 6$.

Εξισώσεις και Ανισώσεις που Ανάγονται σε Πολυωνυμικές

Υπάρχουν εξισώσεις ή ανισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλους μετασχηματισμούς μετατρέπονται σε πολυωνυμικές.

Κλασματικές Εξισώσεις

- Αρχικά βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της εξίσωσης.
- Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε όλα τα κλάσματα με το **Ε.Κ.Π. των παρονομαστών** και μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε ισοδύναμη πολυωνυμική.

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$x + \frac{2}{x(3x-2)} = \frac{3}{3x-2}.$$

Λύση

- Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad 3x - 2 \neq 0$$

δηλαδή,

$$x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq \frac{2}{3}.$$

- Για αυτά τα x έχουμε

$$x + \frac{2}{x(3x-2)} = \frac{3}{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow x(3x-2)x + x(3x-2)\frac{2}{x(3x-2)} = x(3x-2)\frac{3}{3x-2}$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x-2) + 2 = 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x-2) + 2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(3x-2) - (3x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)(x^2-1) = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{2}{3}$, -1 και 1 . Από αυτούς είναι φανερό ότι μόνο οι αριθμοί -1 και 1 είναι ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Κλασματικές Ανισώσεις

- Αρχικά βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της ανίσωσης.
- Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την ανίσωση σε ισοδύναμη που έχει τη μορφή

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{ή} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad \text{ή} \quad \frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \quad \text{ή} \quad \frac{A(x)}{B(x)} \leq 0.$$

- Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

αφού, καμία από τις λύσεις των ανισώσεων

$$A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad A(x) \cdot B(x) < 0$$

δεν μηδενίζει το $B(x)$.

- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0$$

και

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) \leq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0$$

Παράδειγμα

Έχουμε

$$\frac{x+5}{x-3} > 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < -5 \quad \text{ή} \quad x > 3.$$

Παράδειγμα

Έχουμε

$$\frac{x+1}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-4) \leq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x < 4.$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x^2 + 2x}{x-1} \geq 2.$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \neq 1$. Για αυτά τα x έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{x^2 + 2x}{x-1} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{x-1} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 2(x-1)}{x-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 \geq 0, \text{ αφού } x^2 + 2 \text{ πάντα θετικό} \\ &\Leftrightarrow x \geq 1.\end{aligned}$$

Και επειδή $x \neq 1$, συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι οι αριθμοί $x \in (1, +\infty)$.

Άρρητες Εξισώσεις

Πρόκειται για εξισώσεις με **ριζικά**, οι οποίες περιέχουν παραστάσεις του x στα υπόριζα. Για την επίλυση αυτών των εξισώσεων εργαζόμαστε ως εξής:

- Αρχικά βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της εξίσωσης.
- Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \quad (1)$$

από την οποία υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε την εξίσωση

$$A(x) = (B(x))^2 \quad (2)$$

η οποία δεν περιέχει ριζικά.

- Όμως η εξίσωση (2) προκύπτει ως **συνέπεια** και όχι ισοδύναμα από την εξίσωση (1) και η συνεπαγωγή **διευρύνει** το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης. Δηλαδή, το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης (1) είναι υποσύνολο του συνόλου των λύσεων της εξίσωσης (2). Για αυτόν τον λόγο, είναι απαραίτητο να κάνουμε **επαλήθευση** των ριζών που βρίσκουμε από την εξίσωση (2) και να διαπιστώσουμε αν αυτές είναι ή δεν είναι ρίζες και της αρχικής εξίσωσης.

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$x + \sqrt{x+7} = 5.$$

Λύση

- Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7.$$

- Για αυτά τα x έχουμε

$$x + \sqrt{x+7} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} = 5 - x$$

και συνεπώς

$$x + 7 = (5 - x)^2 \Leftrightarrow x + 7 = 25 - 10x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 = 0.$$

Οι ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και 9 οι οποίες ικανοποιούν τον περιορισμό $x \geq -7$. Θέτουμε τις τιμές αυτές στην αρχική εξίσωση και διαπιστώνουμε ότι:

- για $x = 2$ προκύπτει η ισότητα $2 + \sqrt{9} = 5$ που είναι αληθής
- για $x = 9$ προκύπτει η ισότητα $9 + \sqrt{16} = 5$ που δεν είναι αληθής.

Άρα, η αρχική εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 2.

- Η εξίσωση $\sqrt{A(x)} = B(x)$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} A(x) = (B(x))^2 \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Η συνθήκη $A(x) \geq 0$ είναι περιττή αφού καλύπτεται από τη σχέση

$$A(x) = (B(x))^2.$$

Με αυτό τον τρόπο **αποφεύγουμε τη διαδικασία της επαλήθευσης**, η οποία σε κάποιες περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα δύσκολη.

Παράδειγμα

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 x + \sqrt{x+7} &= 5 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} &= 5-x \\
 \Leftrightarrow x+7 &= (5-x)^2 \quad \text{και} \quad x+7 \geq 0 \quad \text{και} \quad 5-x \geq 0 \\
 \Leftrightarrow x+7 &= 25-10x+x^2 \quad \text{και} \quad x \geq -7 \quad \text{και} \quad x \leq 5 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 18 &= 0 \quad \text{και} \quad -7 \leq x \leq 5 \\
 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=9) &\quad \text{και} \quad -7 \leq x \leq 5 \\
 \Leftrightarrow x &= 2.
 \end{aligned}$$

Άρρητες Ανισώσεις

Για την επίλυση αυτών των ανισώσεων εργαζόμαστε όπως στις άρρητες εξισώσεις.

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$\sqrt{x+2} < x.$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

- Για κάθε x με $-2 \leq x < 0$, η δοθείσα ανίσωση είναι αδύνατη, αφού το 1^ο μέλος της είναι μη αρνητικό και το 2^ο μέλος της είναι αρνητικό.
- Για κάθε x με $x \geq 0$, η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\sqrt{x+2} < x \Leftrightarrow x+2 < x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Λυμένες Ασκήσεις

43. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x} = x+1.$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$x+1 \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0$$

δηλαδή,

$$x \neq -1 \quad \text{και} \quad x \neq 0.$$

Γι' αυτά τα x έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x} &= x+1 \\ \Leftrightarrow x(x+1) \frac{2x}{x+1} + x(x+1) \frac{1}{x} &= x(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 &= x(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 &= x(x^2 + 2x + 1) \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 &= x^3 + 2x^2 + x \\ \Leftrightarrow x^3 &= 1. \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 1 ο οποίος προφανώς είναι και μοναδική ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

Μεθοδολογία

Οι ρίζες μιας εξίσωσης δεν εξαρτώνται μόνο από τη μορφή της εξίσωσης, αλλά και από το σύνολο μέσα στο οποίο καλούμαστε να λύσουμε την εξίσωση. Όμως, όταν το σύνολο αυτό δεν δίνεται, και αυτό είναι κάτι που συνήθως συμβαίνει, τότε ως τέτοιο θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο τα μέλη της εξίσωσης ορίζονται, δηλαδή έχουν νόημα πραγματικού αριθμού.

44. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{12}{x^2 - 4} + \frac{x}{x + 2} = \frac{3}{x - 2}.$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \text{και} \quad x + 2 \neq 0 \quad \text{και} \quad x - 2 \neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$x \neq \pm 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2 \quad \text{και} \quad x \neq 2$$

δηλαδή,

$$x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2.$$

Για αυτά τα x έχουμε

$$\frac{12}{x^2 - 4} + \frac{x}{x + 2} = \frac{3}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4) \frac{12}{x^2 - 4} + (x^2 - 4) \frac{x}{x + 2} = (x^2 - 4) \frac{3}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow 12 + (x - 2)(x + 2) \frac{x}{x + 2} = (x - 2)(x + 2) \frac{3}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow 12 + x(x - 2) = 3(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow 12 + x^2 - 2x = 3x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς 2 και 3. Από αυτούς είναι φανερό ότι μόνο ο αριθμός 3 αποτελεί, τη μοναδική, ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

45. Να λύσετε την εξίσωση

$$\sqrt{x+9} = x-3.$$

Λύση**α' τρόπος:**

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$x+9 \geq 0.$$

Δηλαδή, για κάθε

$$x \geq -9.$$

Γι' αυτά τα x έχουμε

$$\sqrt{x+9} = x-3$$

και συνεπώς

$$x+9 = (x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow x+9 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0.$$

Οι ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 7. Με επαλήθευση διαπιστώνουμε ότι από αυτούς τους αριθμούς μόνο ο αριθμός 7 είναι ρίζα της αρχικής εξίσωσης.

β' τρόπος:

Έχουμε

$$\sqrt{x+9} = x-3$$

$$\Leftrightarrow x+9 = (x-3)^2 \text{ και } x+9 \geq 0 \text{ και } x-3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+9 = x^2 - 6x + 9 \text{ και } x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x = 0 \text{ και } x \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x = 7.$$

Σημείωση

Η συνεπαγωγή διευρύνει το σύνολο των λύσεων μιας εξίσωσης ή ανίσωσης. Επειδή λοιπόν από την εξίσωση

$$\sqrt{x+9} = x-3$$

προκύπτει ως συνέπεια και όχι ισοδύναμα η εξίσωση

$$x+9 = (x-3)^2$$

συμπεραίνουμε ότι το σύνολο λύσεων της πρώτης εξίσωσης είναι υποσύνολο του συνόλου λύσεων της δεύτερης.

Παρατήρηση

Η εξίσωση

$$\sqrt{A(x)} = B(x)$$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} A(x) = B^2(x) \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Η συνθήκη

$$A(x) \geq 0$$

είναι περιττή αφού καλύπτεται από τη σχέση

$$A(x) = B^2(x).$$

46. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{4x}{2-x} - \sqrt{\frac{2-x}{x}} = 3.$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$2-x \neq 0 \quad \text{και} \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad \frac{2-x}{x} \geq 0.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$x(2-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2).$$

Γι' αυτά τα x θέτοντας

$$\sqrt{\frac{2-x}{x}} = u$$

η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 4\frac{1}{u^2} - u &= 3 \Leftrightarrow 4 - u^3 = 3u^2 \\ &\Leftrightarrow u^3 + 3u^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow u^3 - u^2 + 4u^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^2(u-1) + 4(u^2-1) = 0 \Leftrightarrow u^2(u-1) + 4(u-1)(u+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (u-1)(u^2 + 4u + 4) = 0 \Leftrightarrow (u-1)(u+2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow u-1=0 \quad \text{ή} \quad (u+2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow u=1 \quad \text{ή} \quad u=-2. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\sqrt{\frac{2-x}{x}} = 1 \quad \text{ή} \quad \sqrt{\frac{2-x}{x}} = -2, \quad \text{που είναι αδυνατη.}$$

Δηλαδή,

$$\frac{2-x}{x} = 1 \Leftrightarrow 2-x = x \Leftrightarrow x = 1.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 1 είναι και η μοναδική ρίζα της δοθείσας εξίσωσης.

47. Να λύσετε τις ανισώσεις

$$\text{i)} \quad \frac{x-4}{x-7} < 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{3x+4}{x-1} \geq 2.$$

Λύση

- i) Η ανίσωση ορίζεται για $x \neq 7$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x-4}{x-7} < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x-7) < 0$$

$$\Leftrightarrow 4 < x < 7.$$

Δηλαδή, οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x \in (4, 7).$$

- ii) Η ανίσωση ορίζεται για $x \neq 1$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{3x+4}{x-1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4}{x-1} - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4-2(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+6}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+6)(x-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -6 \quad \text{ή} \quad x \geq 1.$$

Και επειδή $x \neq 1$ συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις της ανίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x \in (-\infty, -6] \cup (1, +\infty).$$

Σημείωση

Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως,

$$\bullet \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

και

$$\bullet \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0.$$

Μεθοδολογία

- Μετασχηματίζουμε την ανίσωση σε ισοδύναμή της της μορφής

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0.$$

- Η τελευταία αληθεύει για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) \geq 0$$

και

$$B(x) \neq 0.$$

48. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x}{x+1} < \frac{x-1}{x-2}$

ii) $\left| \frac{2x}{x-6} \right| > 1.$

Λύση

i) Η ανίσωση ορίζεται για $x \neq -1$ και $x \neq 2$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+1} &< \frac{x-1}{x-2} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x-2} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-2) - (x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - (x^2 - 1)}{(x+1)(x-2)} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2x+1}{(x+1)(x-2)} &< 0 \\ \Leftrightarrow (-2x+1)(x+1)(x-2) &< 0. \end{aligned}$$

Έστω

$$P(x) = (-2x+1)(x+1)(x-2).$$

Έχουμε:

- $-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$
- $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$
- $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$

Οι ρίζες και το πρόσημο του πολυώνυμου $P(x)$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$-2x+1$	+	+	0	-	-
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
$P(x)$	+	0	-	0	-

Μεθοδολογία

Μετασχηματίζουμε την ανίσωση σε ισοδύναμή της που έχει τη μορφή

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} < \frac{x-1}{x-2} &\Leftrightarrow (-2x+1)(x+1)(x-2) < 0 \\ &\Leftrightarrow P(x) < 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)\end{aligned}$$

ii) Η ανίσωση ορίζεται για $x \neq 6$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\left| \frac{2x}{x-6} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-6} < -1 \quad \text{ή} \quad \frac{2x}{x-6} > 1.$$

- Η πρώτη ανίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x-6} < -1 &\Leftrightarrow \frac{2x}{x-6} + 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x-6}{x-6} < 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-6)(x-6) < 0 \\ &\Leftrightarrow 3(x-2)(x-6) < 0 \\ &\Leftrightarrow 2 < x < 6.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $x \in (2, 6)$.

- Η δεύτερη ανίσωση γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x-6} > 1 &\Leftrightarrow \frac{2x}{x-6} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+6}{x-6} > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+6)(x-6) > 0 \\ &\Leftrightarrow x < -6 \quad \text{ή} \quad x > 6.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $x \in (-\infty, -6) \cup (6, +\infty)$.

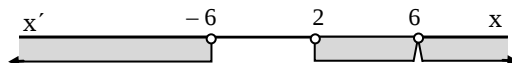
Επομένως, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x \in (-\infty, -6) \cup (2, 6) \cup (6, +\infty).$$

Σημείωση

Υπενθυμίζουμε ότι:

- $x \in A$ ή $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cup B$
- $x \in A$ και $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B$



49. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{4-x} < 1.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x} + \frac{5}{4-x} < 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x} + \frac{5}{4-x} - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4-x}{x(4-x)} + \frac{5x}{x(4-x)} - \frac{x(4-x)}{x(4-x)} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4-x+5x-x(4-x)}{x(4-x)} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4-x+5x-4x+x^2}{x(4-x)} < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2+4}{x(4-x)} < 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2+4)x(4-x) < 0. \end{aligned}$$

Όμως,

$$x^2 + 4 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η παραπάνω ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$x(4-x) < 0$$

δηλαδή

$$x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty).$$

Σχόλιο

Μπορούμε να αποφύγουμε την αναφορά στο σύνολο ορισμού της ανίσωσης. Δηλαδή, ότι η ανίσωση ορίζεται για $x \neq 0$ και $x \neq 4$. Αρκεί να μην υπάρχει αμφιβολία για την εγκυρότητα των ισοδυναμιών που ακολουθούν.

50. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 2|} < 0.$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \neq 2$. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$|x - 2| > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \neq 2.$$

Επομένως, η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad \text{και} \quad x \neq 2.$$

Οι ρίζες και το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	+	0	0	+

Οπότε,

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad \text{και} \quad x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in (1, 3) \quad \text{και} \quad x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \in (1, 2) \cup (2, 3).$$

Δηλαδή, οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x \in (1, 2) \cup (2, 3).$$

51. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\frac{2x^2 + \lambda x + \lambda + 1}{x^2 + 1} > 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 + 1 > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$2x^2 + \lambda x + \lambda + 1 > x^2 + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δηλαδή

$$x^2 + \lambda x + \lambda > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει ακριβώς τότε όταν η διακρίνουσα του τριωνύμου

$$x^2 + \lambda x + \lambda$$

είναι αρνητική. Δηλαδή,

$$\lambda^2 - 4\lambda < 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda(\lambda - 4) < 0$$

και τελικά

$$\lambda \in (0, 4).$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

116. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x+2}{x+5} = x$

ii) $x + \frac{3}{x-2} = \frac{x+1}{x-2}.$

117. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{2x-3}{x+2} + \frac{7}{2x-3} = 2$

ii) $\frac{x-3}{x-1} + \frac{4}{x^2-2} = \frac{2}{x}.$

118. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{x-5} = 2$

ii) $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x}{x-1} = \frac{2}{x^2-1}.$

119. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{x-1}{x} + \frac{2x-3}{2} = \frac{x^2-3}{x-1}$

ii) $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}.$

120. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2-x}$

ii) $\frac{3x^2}{x^2+1} - 2 = \frac{2}{x^2-1}.$

121. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{2}{x-4} = \frac{x}{x-3} - 1$

ii) $\frac{x-15}{x^2-25} + \frac{1}{x-5} = \frac{x}{x+5}.$

122. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{13-x^2} = x-1$

ii) $\sqrt{x^3+8} = x+2.$

123. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{10x-1} = x+2$

ii) $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+11} = 5.$

124. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x+4} = x-2$

ii) $\sqrt{5+2\sqrt{x}} = \sqrt{2x+1}$.

125. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $11 + \sqrt{4x+1} = x$

ii) $\sqrt{x^2+16} = 2x-1$.

126. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{5-x} + \frac{2}{\sqrt{5-x}} = \sqrt{x+5}$

ii) $\frac{1+\sqrt{3x+1}}{x} = 1$.

127. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{2+\sqrt{x}} = 2$

ii) $\frac{x+1}{\sqrt{x}+7} = x-8$.

128. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{5x-x^2} = 5x-x^2-2$

ii) $x-4\sqrt{x}+3=0$.

129. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1-\sqrt{x}} = 2$

ii) $\frac{\sqrt[3]{x}+1}{3} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}+2} = 2$.

130. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{x-1}\right) + 2 = 0$

ii) $\frac{3x}{x-2} - 2\sqrt{\frac{x-2}{3x}} = 3$.

131. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

ii) $\sqrt{5x-4} = x$

132. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x+3} < 0$

ii) $\frac{x^2+x+3}{x+2} > 0$.

133. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x+1}{x+3} - \frac{x^2+5x-6}{x^2-16} < 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x^2-4x+4}{x^2-9} \geq \frac{x+1}{x-1}.$$

134. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{3}{x-2} < 1$$

$$\text{ii)} \quad \frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{2}.$$

135. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x+1}{x-4} > \frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x+3} < \frac{3}{x-2}.$$

136. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x}{x+1} - \frac{x+2}{x} < 2$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+2}.$$

137. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x-1}{x+5} < \frac{1}{x-1}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{12-5x}{x-1} > 2.$$

138. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad x^2 - \frac{8}{x} < 0$$

$$\text{ii)} \quad 1 + \frac{10}{x^2} < \frac{7}{x}.$$

139. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x^2-7x+12}{x-3} \leq 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{5x+4}{x^2+2x+4} > 1.$$

140. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{x-x^2} - \frac{3}{x-3x^2} > 0$$

$$\text{ii)} \quad \frac{2x}{x^2-4} \leq \frac{1}{x-1}.$$

141. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\text{i)} \quad \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{3}{x+2} < \frac{3x}{2x-x^2}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+x+1} > \frac{1+2x}{x^3-1}.$$

142. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-1}{x^2-4} < 0$

ii) $\frac{x^2-x+1}{x+2} \leq 0.$

143. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{\eta\mu x - 2}{x^2 - 2x} < 0$

ii) $\frac{x^2-1}{x^2+x+1} < 1.$

144. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$\frac{2x-4}{x+1} < 0 \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{3x+4} \geq 0.$$

145. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$1 \leq \frac{3x^2-5x+6}{x^2+1} \leq 2.$$

146. Να λύσετε την ανίσωση

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| > 1.$$

147. Να λύσετε την ανίσωση

$$\left| \frac{3x-5}{x-3} \right| < 2.$$

148. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left| \frac{x-1}{x+2} \right| > 1$

ii) $\left| \frac{1}{x-1} \right| < 1.$

149. Να λύσετε τις ανισώσεις

i) $\frac{|x-1|}{x-1} > 0$

ii) $\frac{x^2-5x+4}{|x-3|} < 0.$

150. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{|x-3|} < 1.$$

151. Να λύσετε την ανίσωση

$$1 < \left| \frac{2x-3}{x+2} \right| \leq 2.$$

152. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x^2 - 4|x| + 3}{x^2 - 4x + 4} < 0$

ii) $\frac{|x| + 2x - 1}{x} > 2.$

153. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\frac{x^2 - \lambda x + 2\lambda}{x^2 + 3} > \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

154. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$-3 < \frac{x^2 + \lambda x - 2}{x^2 - x + 1} < 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

155. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{2x+3} < x$

ii) $\sqrt{x+1} > x-1.$

156. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{6-5x} > x$

ii) $\sqrt{9x-11} > x+1.$

157. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{2x-x^2} < 5-x$

ii) $3-x < \sqrt{1-x^2}.$

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x ;
2. Έστω το πολυώνυμο

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
 Τι ονομάζουμε όρους, τι συντελεστές και τι σταθερό όρο αυτού του πολυωνύμου;
3. Ποια ονομάζουμε σταθερά πολυώνυμα και ποιο μηδενικό πολυώνυμο;
4. Πότε λέμε ότι δύο πολυώνυμα είναι ίσα;
5. Τι ονομάζουμε βαθμό ενός πολυωνύμου;
6. Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου $P(x)$ για $x = \rho$;
7. Πότε ένας αριθμός ρ λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$;
8. Πότε λέμε ότι η διαίρεση δύο πολυωνύμων είναι τέλεια;
9. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι $v = P(\rho)$.
10. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.
11. Τι ονομάζουμε πολωνυμική εξίσωση βαθμού n ;
12. Έστω η πολωνυμική εξίσωση

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$
 με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Μηδενικό πολυώνυμο λέγεται το σταθερό πολυώνυμο 0. Σ Λ
2. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Σ Λ
3. Κάθε σταθερό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Σ Λ
4. Ο αριθμός ρ λέγεται ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ αν και μόνο αν ισχύει $P(\rho) = 0$. Σ Λ
5. Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x . Σ Λ
6. Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αντιστρόφως. Σ Λ
7. Ο βαθμός του αθροίσματος δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών τους. Σ Λ
8. Αν προσθέσουμε οποιαδήποτε πολυώνυμο v βαθμού, προκύπτει πολυώνυμο το οποίο είναι επίσης v βαθμού. Σ Λ
9. Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών τους. Σ Λ
10. Κάθε ισότητα πολυωνύμων της μορφής

$$P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + v(x)$$
εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$. Σ Λ
11. Αν $P(x)$ είναι πολυώνυμο v βαθμού και $Q(x)$ είναι πολυώνυμο μ βαθμού με $\mu < v$, τότε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$ έχει βαθμό $v - \mu$. Σ Λ
12. Αν στη διαίρεση $P(x) : Q(x)$ το $Q(x)$ είναι πολυώνυμο v βαθμού, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης έχει βαθμό μικρότερο του v . Σ Λ
13. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + \rho)$ είναι ίσο με $P(\rho)$. Σ Λ
14. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν ισχύει $P(\rho) = 0$. Σ Λ
15. Υπάρχει πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές, η οποία δεν έχει ακέραια ρίζα. Σ Λ
16. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει ρίζες όλους τους διαιρέτες του σταθερού όρου Σ Λ

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολωνύμου για $x = \rho$. Δηλαδή, $u = P(\rho)$.

A2. Έστω η πολωνυμική εξίσωση

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

A3. Πότε λέμε ότι δύο πολώνυμα είναι ίσα;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν ένα πολώνυμο έχει την ίδια τιμή c για όλες τις τιμές του x , τότε αυτό είναι σταθερό πολώνυμο.
- β)** Αν το άθροισμα δύο μη μηδενικών πολωνύμων είναι μη μηδενικό πολώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος με τον μέγιστο των βαθμών των δύο πολωνύμων.
- γ)** Ένα πολώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.
- δ)** Κάθε πολωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.
- ε)** Αν υψώσουμε τα μέλη οποιασδήποτε εξίσωσης στο τετράγωνο, τότε η εξίσωση που προκύπτει δεν μπορεί να έχει και άλλες ρίζες, εκτός από τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

Θέμα Β

Δίνεται πολώνυμο $P(x)$ τέτοιο, ώστε

$$(x^2 + x + 1)P(x) = \lambda x^4 + (\lambda - 3)x^3 + (\lambda - 1)x^2 - x + 2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

B1. Να βρείτε το βαθμό του $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του λ .

B1. Να βρείτε το πολώνυμο $P(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

B3. Για $\lambda = 0$, να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x - 2} \leq 0$.

Θέμα Γ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 10$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x + 1$ και διαιρούμενο με το $x - 3$ αφήνει υπόλοιπο -8 .

Γ1. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha = -6 \quad \text{και} \quad \beta = 3.$$

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = (x + 1)(x + 3).$$

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) > 0.$$

Θέμα Δ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \mu x^3 - 35x^2 + (5\mu - 4)x - 5$$

όπου μ θετικός ακέραιος αριθμός. Αν το πολυώνυμο έχει ακέραια ρίζα, τότε:

Δ1. να αποδείξετε ότι $\mu = 6$

Δ2. να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$

Δ3. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 25x - 5x^2$.

Διαγώνισμα 2**Θέμα Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.
- A2.** Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x ;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
 - β)** Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x και αντιστρόφως.
 - γ)** Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
 - δ)** Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$.
 - ε)** Κάθε ακέραιος ρ ο οποίος είναι διαιρέτης του σταθερού όρου μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, είναι ρίζα αυτής της εξίσωσης.

Θέμα Β

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 3\lambda x - \lambda \quad \text{με} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

το οποίο διαιρείται με το $x - 2$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.
- B2.** Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρείται και με το $(x - 2)^2$.
- B3.** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

Θέμα Γ

Η εξίσωση

$$x^3 + 3x^2 + ax - 1 = 0,$$

όπου a σταθερός ακέραιος αριθμός, έχει ρίζα των αριθμό $4 + a$.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του a .

Γ2. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Γ3. Να υπολογίσετε τη γωνία $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi^3\theta + 3\varepsilon\varphi^2\theta - 3\varepsilon\varphi\theta - 1 = 0.$$

Θέμα Δ

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + ax + \beta \quad \text{με} \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

το οποίο διαιρούμενο με το πολυώνυμο $x^2 - 4x$ αφήνει υπόλοιπο $4x + 1$.

Δ1. Να βρείτε τους αριθμούς a και β .

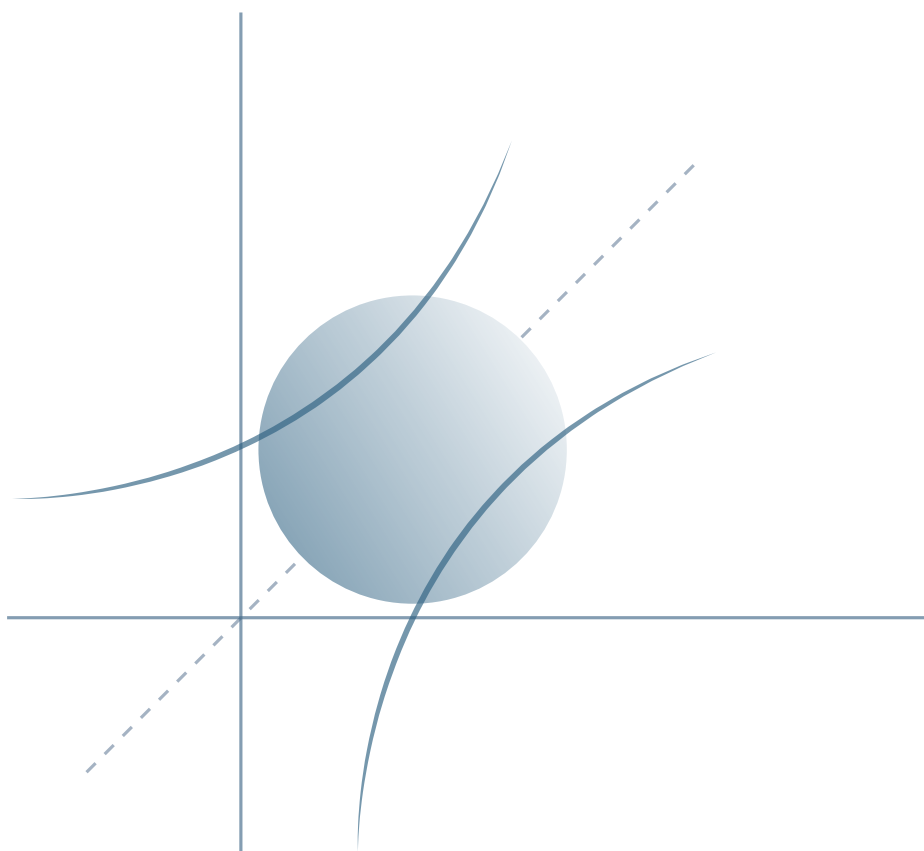
Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

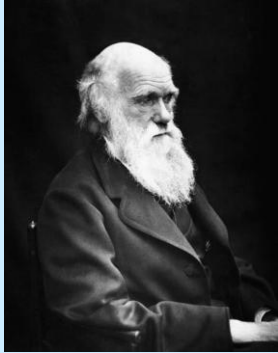
$$P(x) + (4x - 1)(x^2 + 1) = Q^2(x).$$

Δ3. Να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) < 0.$$

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση





«Ο μαθηματικός είναι ένας τυφλός
σε ένα σκοτεινό δωμάτιο
που ψάχνει για μια μαύρη γάτα
που δεν είναι εκεί».

Charles Robert Darwin

Charles Robert Darwin

(1809 - 1882)

Ο Κάρολος Ροβέρτος Δαρβίνος ήταν βρετανός φυσιοδίφης, συλλέκτης και γεωλόγος, ο οποίος έμεινε διάσημος στην ιστορία, ως ο θεμελιωτής της θεωρίας της εξέλιξης, καθώς και ως ο εισηγητής του μηχανισμού της φυσικής επιλογής, μέσω του οποίου πρότεινε ότι συντελείται η εξέλιξη. Η θεωρία της εξέλιξης αποτελεί σήμερα αναπόσπαστο μέρος της βιολογίας.

Εκθετική Συνάρτηση

Δυνάμεις (Επαναλήψεις-Συμπληρώσεις)

Ορισμός

Η δύναμη a^v με **βάση** οποιονδήποτε **πραγματικό αριθμό a** και **εκθέτη θετικό ακέραιο v** ορίζεται ως εξής:

$$a^v = \begin{cases} \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_v, & \text{αν } v > 1 \\ a & , \text{αν } v = 1 \end{cases}$$

Παράδειγμα

- $(\sqrt{5})^4 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 25$
- $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$
- $0^1 = 0$

Ορισμός

Η δύναμη a^0 με **βάση** οποιονδήποτε **μη μηδενικό πραγματικό αριθμό a** και **εκθέτη μηδέν** ορίζεται ως εξής:

$$a^0 = 1$$

Παράδειγμα

- $(2 - \sqrt{13})^0 = 1$
- $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^0 = 1$

Ορισμός

Η δύναμη a^{-v} με **βάση** οποιονδήποτε **μη μηδενικό πραγματικό αριθμό a** και **εκθέτη αρνητικό ακέραιο $-v$** ορίζεται ως εξής:

$$a^{-v} = \frac{1}{a^v}$$

Παράδειγμα

- $(-11)^{-1} = \frac{1}{(-11)^1} = -\frac{1}{11}$
- $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3} = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{8}{125}$
- $(1+\sqrt{2})^{-2} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3-2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = 3-2\sqrt{2}$

Ορισμός

- Η δύναμη $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ με **βάση** οποιονδήποτε **θετικό πραγματικό αριθμό a** και **εκθέτη ρητό** αριθμό της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$, όπου **μ ακέραιος** και **ν θετικός ακέραιος** ορίζεται ως εξής:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

- Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$.

Παράδειγμα

- $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$
- $8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$
- Ορίζεται επίσης η δύναμη a^x με **βάση** οποιονδήποτε **θετικό πραγματικό αριθμό a** και **εκθέτη άρρητο αριθμό x** . Ο τρόπος ορισμού της δύναμης αυτής υπερβαίνει τις μέχρι τώρα γνώσεις μας. Επιπλέον, αν x θετικός άρρητος, ορίζουμε $0^x = 0$.
- Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι, αν a είναι ένας **θετικός** πραγματικός αριθμός, τότε ορίζεται η δύναμη a^x για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για τις δυνάμεις αυτές ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Συγκεκριμένα:

Πρόταση

Αν a, b είναι **θετικοί** πραγματικοί αριθμοί και $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

$$a^{x_1} : a^{x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$$

$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Παράδειγμα

- $3^{6-\sqrt{5}} \cdot 3^{\sqrt{5}-4} = 3^{(6-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-4)} = 3^2 = 9$
- $\frac{\pi^{3+\sqrt{13}}}{\pi^{5+\sqrt{13}}} = \pi^{(3+\sqrt{13})-(5+\sqrt{13})} = \pi^{-2} = \frac{1}{\pi^2}$
- $(4^{2+\sqrt{3}})^{2-\sqrt{3}} = 4^{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4^{4-3} = 4$
- $\left(\frac{17}{19}\right)^{1-2\pi} \cdot \left(\frac{19}{17}\right)^{1-2\pi} = \left(\frac{17}{19} \cdot \frac{19}{17}\right)^{1-2\pi} = 1^{1-2\pi} = 1$

Εκθετική Συνάρτηση

Ορισμός

Έστω a ένας **θετικός** αριθμός. Αν αντιστοιχίσουμε κάθε $x \in \mathbb{R}$ στη δύναμη a^x , ορίζουμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = a^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

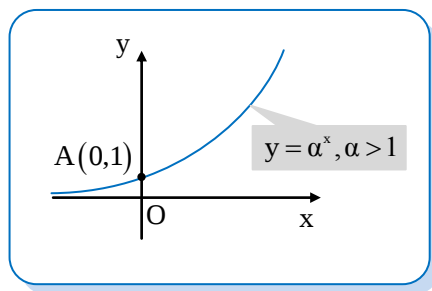
η οποία, στην περίπτωση που είναι $a \neq 1$, λέγεται **εκθετική συνάρτηση** με **βάση** a .

- Αν είναι $a = 1$, τότε έχουμε τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$.
- Αν είναι $a = e$, όπου $e = 2,71828.....$ τότε έχουμε την πιο σημαντική εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$, η οποία ονομάζεται απλώς **εκθετική** συνάρτηση.
- Κάθε εκθετική συνάρτηση έχει **πεδίο ορισμού** το σύνολο $\mathbb{R}$ και **σύνολο τιμών** το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = a^x \text{ με } a > 1$$

είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Με απαγωγή σε άτοπο, αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο. Έχουμε λοιπόν την ισοδυναμία

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

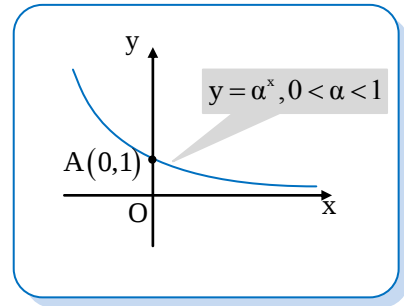


- Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = a^x \text{ με } 0 < a < 1$$

είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Με απαγωγή σε άτοπο, αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο. Έχουμε λοιπόν την ισοδυναμία

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$



- Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης

$$f(x) = a^x \text{ με } 0 < a \neq 1$$

προκύπτει ότι αυτή είναι και **1-1**. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $a^{x_1} \neq a^{x_2}$. Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $a^{x_1} = a^{x_2}$ ισχύει $x_1 = x_2$. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο. Ισχύει λοιπόν η ισοδυναμία

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- Η γραφική παράσταση κάθε εκθετικής συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο **A(0, 1)** (αφού $f(0) = a^0 = 1$) και έχει **ασύμπτωτη** τον άξονα $x'x$.

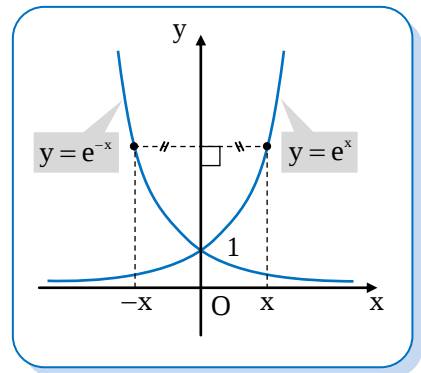
Παράδειγμα

Για τις συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$

έχουμε:

$$g(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x = \frac{1}{e^x} = e^{-x} = f(-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις τους είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.



Παράδειγμα

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

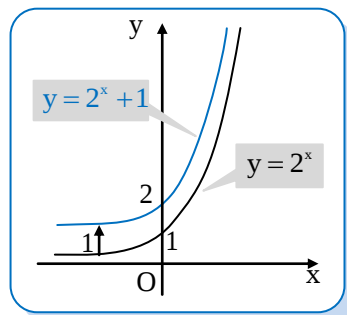
$$f(x) = 2^x + 1, \quad g(x) = 2^{x-1}, \quad h(x) = 2^{x-1} + 3.$$

Λύση

- Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$\varphi(x) = 2^x$$

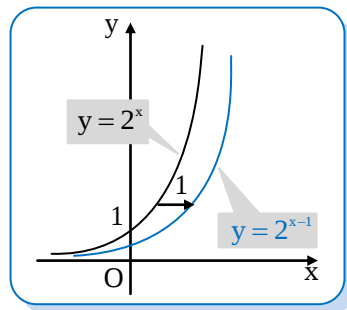
κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



- Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$\varphi(x) = 2^x$$

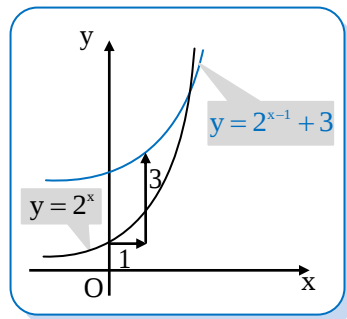
κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



- Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από δύο μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$\varphi(x) = 2^x$$

Μια οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μια κατακόρυφη κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.



Εκθετικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

1^η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που μετασχηματίζονται στις μορφές

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad \text{ή} \quad a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

Τότε αξιολογούμε:

- στις **εξισώσεις**, την ιδιότητα **1 – 1** των εκθετικών συναρτήσεων και λύνουμε την ισοδύναμη εξίσωση **$f(x) = g(x)$** .
- στις **ανισώσεις**, τη **μονοτονία** των εκθετικών συναρτήσεων και λύνουμε την ισοδύναμη ανίσωση **$f(x) < g(x)$ ή $f(x) > g(x)$** .

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$8^x = 32^{x+2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 8^x = 32^{x+2} &\Leftrightarrow (2^3)^x = (2^5)^{x+2} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{5(x+2)} \\ &\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{5x+10} \Leftrightarrow f(3x) = f(5x+10) \end{aligned}$$

όπου $f(x) = 2^x$. Και επειδή, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = 2^x$ είναι 1 – 1 η τελευταία εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$3x = 5x + 10 \Leftrightarrow -2x = 10 \Leftrightarrow x = -5.$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{x^2-4x} < 1.$$

Λύση

Έχουμε

$$e^{x^2-4x} < 1 \Leftrightarrow e^{x^2-4x} < e^0 \Leftrightarrow f(x^2-4x) < f(0)$$

όπου, $f(x) = e^x$. Και επειδή, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα ($e > 1$) η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$x^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1} < \frac{81}{16}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1} < \frac{81}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \Leftrightarrow f(3x+1) < f(-4)$$

όπου $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Και επειδή, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ είναι γνησίως

φθίνουσα $\left(\frac{2}{3} < 1\right)$ η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$3x+1 > -4 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{3}.$$

2η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που μετασχηματίζονται στις μορφές

$$\kappa \cdot a^{2f(x)} + \lambda \cdot a^{f(x)} + \mu = 0$$

$$\text{ή } \kappa \cdot a^{2f(x)} + \lambda \cdot a^{f(x)} + \mu < 0 \quad \text{ή} \quad \kappa \cdot a^{2f(x)} + \lambda \cdot a^{f(x)} + \mu > 0.$$

Τότε, εκτελούμε την αντικατάσταση $a^{f(x)} = \omega$ και οδηγούμαστε αρχικά σε δευτεροβάθμιες εξισώσεις ή ανισώσεις με άγνωστο το ω . Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε και σε εξισώσεις – ανισώσεις της μορφής

$$\kappa \cdot a^{3f(x)} + \lambda \cdot a^{2f(x)} + \mu \cdot a^{f(x)} + \nu = 0 \quad \text{ή} \quad > 0 \quad \text{ή} \quad < 0 \quad \text{κ.λπ.}$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$3^{2x+3} + 26 \cdot 3^x - 1 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 3^{2x+3} + 26 \cdot 3^x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 3^3 \cdot 3^{2x} + 26 \cdot 3^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 27 \cdot (3^x)^2 + 26 \cdot 3^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας $3^x = \omega$ η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$27\omega^2 + 26\omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \text{ ή } \omega = \frac{1}{27}.$$

- Για $\omega = -1$ έχουμε $3^x = -1$ που είναι αδύνατο, αφού ο αριθμός -1 δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της εκθετικής συνάρτησης που είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.
- Για $\omega = \frac{1}{27}$ έχουμε

$$3^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$2^{1+x} + 2^{1-x} < 5.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} 2^{1+x} + 2^{1-x} < 5 &\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + \frac{2}{2^x} < 5 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} + 2 < 5 \cdot 2^x &\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας $2^x = \omega$ η τελευταία ανίσωση γράφεται

$$2\omega^2 - 5\omega + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \omega < 2.$$

Δηλαδή

$$\frac{1}{2} < 2^x < 2 \Leftrightarrow 2^{-1} < 2^x < 2^1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

3η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις στις οποίες εμφανίζονται δυνάμεις με **δύο διαφορετικές βάσεις β και γ** . Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- αν $\beta = \gamma^2$, τότε η εξίσωση ή η ανίσωση οδηγείται στην **2^η Κατηγορία**
- αν $\beta \neq \gamma^2$ και $\gamma \neq \beta^2$ τότε η εξίσωση ή η ανίσωση οδηγείται στην **1^η Κατηγορία**, στην οποία η κοινή βάση a των δύο μελών είναι ο αριθμός $\frac{\beta}{\gamma}$ ή ο

αριθμός $\frac{\gamma}{\beta}$.

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$25^{x+1} = 5^x + 24.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $25 = 5^2$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} 25^{x+1} = 5^x + 24 &\Leftrightarrow 25^1 \cdot 25^x = 5^x + 24 \\ &\Leftrightarrow 25 \cdot 5^{2x} - 5^x - 24 = 0 \end{aligned}$$

Θέτοντας $5^x = \omega$ η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$25\omega^2 - \omega - 24 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -\frac{24}{25}.$$

- Για $\omega = 1$ έχουμε $5^x = 1 \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Για $\omega = -\frac{24}{25}$ έχουμε $5^x = -\frac{24}{25}$ που είναι αδύνατο.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0.

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$2^{x+6} + 3 \cdot 7^x > 7^{x+1} + 15 \cdot 2^x$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $2 \neq 7^2$ και $7 \neq 2^2$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} 2^{x+6} + 3 \cdot 7^x > 7^{x+1} + 15 \cdot 2^x &\Leftrightarrow 2^6 \cdot 2^x + 3 \cdot 7^x > 7^1 \cdot 7^x + 15 \cdot 2^x \\ &\Leftrightarrow 64 \cdot 2^x - 15 \cdot 2^x > 7 \cdot 7^x - 3 \cdot 7^x \\ &\Leftrightarrow 49 \cdot 2^x > 4 \cdot 7^x \\ &\Leftrightarrow \frac{2^x}{7^x} > \frac{4}{49} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x > \left(\frac{2}{7}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x < 2, \end{aligned}$$

διότι, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λυμένες Ασκήσεις

1. Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$\lambda \in (1, 3) \cup (3, +\infty).$$

- ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η βάση της συνάρτησης f είναι ίση με 10.

Λύση

- i) Η συνάρτηση f είναι εκθετική. Δηλαδή, ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{\lambda-1}{2} > 0 \text{ και } \frac{\lambda-1}{2} \neq 1$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda > 1 \text{ και } \lambda \neq 3.$$

Επομένως,

$$\lambda \in (1, 3) \cup (3, +\infty).$$

- ii) Έχουμε

$$\frac{\lambda-1}{2} = 10$$

Δηλαδή,

$$\lambda - 1 = 20$$

και τελικά

$$\lambda = 21.$$

Σημείωση

Ονομάζουμε **εκθετική συνάρτηση** με βάση έναν θετικό αριθμό

$$a \neq 1$$

τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = a^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5^{3x-1} < 25$

ii) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$

iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-7} < \frac{8}{27}$

iv) $5^{|x|} \cdot 7^{3-|x|} > 125.$

Λύση

i) Έχουμε

$$5^{3x-1} < 25$$

ή ισοδύναμα

$$5^{3x-1} < 5^2.$$

Και επειδή $5 > 1$ συμπεραίνουμε ότι η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

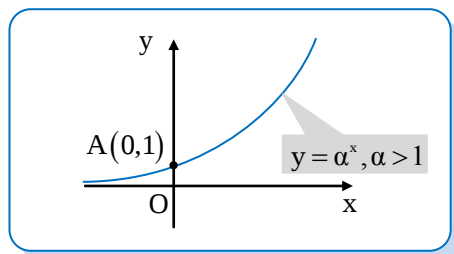
$$3x - 1 < 2$$

δηλαδή

$$3x < 3$$

και τελικά

$$x < 1.$$

**Σημείωση**

Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = a^x \text{ με } a > 1$$

είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2$$

ισχύει

$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

(και αντιστρόφως).

ii) Έχουμε

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 < 0.$$

Θέτοντας $2^x = \omega$ η τελευταία ανίσωση γράφεται

$$\omega^2 - 5\omega + 4 < 0 \Leftrightarrow (\omega - 1)(\omega - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \omega < 4.$$

Δηλαδή,

$$1 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 2^0 < 2^x < 2^2$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

iii) Έχουμε

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-7} < \frac{8}{27}$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-7} < \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Και επειδή $\frac{2}{3} < 1$ συμπεραίνουμε

ότι η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

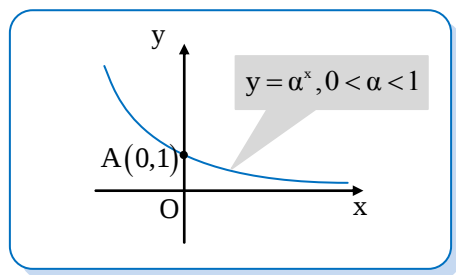
$$2x - 7 > 3$$

δηλαδή

$$2x > 10$$

και τελικά

$$x > 5.$$



Σημείωση

Η εκθετική συνάρτηση

$$f(x) = a^x \text{ με } 0 < a < 1$$

είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2$$

ισχύει

$$a^{x_1} > a^{x_2}$$

(και αντιστρόφως).

iv) Έχουμε

$$5^{|x|} \cdot 7^{3-|x|} > 125 \Leftrightarrow 5^{|x|} \cdot 7^3 \cdot 7^{-|x|} > 5^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{5^{|x|}}{7^{|x|}} > \frac{5^3}{7^3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^{|x|} > \left(\frac{5}{7}\right)^3.$$

Και επειδή $\frac{5}{7} < 1$, η τελευταία ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$|x| < 3$$

και τελικά

$$-3 < x < 3.$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} \quad 7^{\frac{1}{x}-2} = \frac{1}{7}$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{1-\sqrt{x}} = 1,5.$$

Λύση

- i) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$x \neq 0.$$

Γι' αυτά τα x η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$7^{\frac{1}{x}-2} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7^{\frac{1}{x}-2} = 7^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2x = -x$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

- ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \geq 0$.

Γι' αυτά τα x η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{1-\sqrt{x}} = 1,5 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{1-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2-2\sqrt{x}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{x} = -1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}.$$

Σημειώσεις

- Από τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης

$$f(x) = a^x \quad \text{με} \quad 0 < a \neq 1$$

προκύπτει ότι αυτή είναι και

1-1. Δηλαδή, για κάθε

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \text{με}$$

$$x_1 \neq x_2$$

ισχύει

$$a^{x_1} \neq a^{x_2}.$$

- Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$a^{x_1} = a^{x_2}$$

ισχύει

$$x_1 = x_2.$$

- Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, ισχύει η ισοδυναμία

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στην επίλυση εκθετικών εξισώσεων. Δηλαδή, εξισώσεων όπου ο άγνωστος εμφανίζεται σε εκθέτη.

4. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 5^x - 4^y = 21 \\ \sqrt{5^x} - 2^y = 3. \end{cases}$$

Λύση

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\left(\sqrt{5^x}\right)^2 - \left(2^y\right)^2 = 21$$

ή ισοδύναμα

$$\left(\sqrt{5^x} - 2^y\right)\left(\sqrt{5^x} + 2^y\right) = 21.$$

Οπότε, λόγω της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος, η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$3\left(\sqrt{5^x} + 2^y\right) = 21$$

δηλαδή,

$$\sqrt{5^x} + 2^y = 7.$$

Επομένως, το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} \sqrt{5^x} + 2^y = 7 \\ \sqrt{5^x} - 2^y = 3. \end{cases}$$

Από τις εξισώσεις αυτού του συστήματος με πρόσθεση κατά μέλη και αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα

$$\begin{cases} 2 \cdot \sqrt{5^x} = 10 \\ 2 \cdot 2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5^x} = 5 \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 5^2 \\ 2^y = 2^1. \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$(x, y) = (2, 1).$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $9^{|\sin x|} = 3$

ii) $25^{\eta_{\mu x}-1} = \frac{1}{5^{\sigma_{\nu}^2 x}}$

Λύση

i) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (3^2)^{|\sin x|} &= 3 \\ \Leftrightarrow 3^{2|\sin x|} &= 3^1 \\ \Leftrightarrow 2|\sin x| &= 1 \\ \Leftrightarrow |\sin x| &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin x &= \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \sin x = -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin x &= \sin \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad \sin x = \sin \frac{2\pi}{3} \\ \Leftrightarrow x &= 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Σημείωση

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} &= -\sin \frac{\pi}{3} \\ &= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} 25^{\eta_{\mu x}-1} &= \frac{1}{5^{\sigma_{\nu}^2 x}} \\ \Leftrightarrow (5^2)^{\eta_{\mu x}-1} &= 5^{-\sigma_{\nu}^2 x} \\ \Leftrightarrow (5)^{2(\eta_{\mu x}-1)} &= 5^{-\sigma_{\nu}^2 x} \\ \Leftrightarrow 2(\eta_{\mu x}-1) &= -\sigma_{\nu}^2 x \\ \Leftrightarrow \sigma_{\nu}^2 x + 2\eta_{\mu x} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \eta_{\mu}^2 x) + 2\eta_{\mu x} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\eta_{\mu}^2 x + 2\eta_{\mu x} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta_{\mu}^2 x - 2\eta_{\mu x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\eta_{\mu x} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta_{\mu x} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta_{\mu x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

6. Να λύσετε την εξίσωση

$$8^{\eta\mu x} \cdot 2^{\frac{3}{\sigma\upsilon\nu x}} = 8^{\sigma\upsilon\nu x}.$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$. Γι'αυτά τα x η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} (2^3)^{\eta\mu x} \cdot 2^{\frac{3}{\sigma\upsilon\nu x}} &= (2^3)^{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow 2^{3\eta\mu x} \cdot 2^{\frac{3}{\sigma\upsilon\nu x}} = 2^{3\sigma\upsilon\nu x} \\ \Leftrightarrow 2^{3\eta\mu x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu x}} &= 2^{3\sigma\upsilon\nu x} \\ \Leftrightarrow 3\eta\mu x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu x} &= 3\sigma\upsilon\nu x \\ \Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1 &= \sigma\upsilon\nu^2 x \\ \Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x &= 0. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν:

- $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$
- ή
- $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} &= -1 \\ \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x &= \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow x &= \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης δίνονται από τους τύπους

$$x = \kappa\pi \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = 16 \cdot 5^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = 25 \cdot 4^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g
- ii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Λύση

i) Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 16 \cdot 5^x = 25 \cdot 4^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5^x}{4^x} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

Και επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι 1-1 συμπεραίνουμε ότι

$$x = 2.$$

Άρα, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $A(2, f(2))$ ή $A(2, 400)$.

ii) Έχουμε

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow 16 \cdot 5^x < 25 \cdot 4^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5^x}{4^x} < \frac{25}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x < \left(\frac{5}{4}\right)^2.$$

Και επειδή

$$\frac{5}{4} > 1$$

από την τελευταία ανίσωση συμπεραίνουμε ότι

$$x < 2.$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g αν και μόνο αν

$$x \in (-\infty, 2).$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = g(x).$$

Μεθοδολογία

Για να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g αρκεί να λύσουμε την ανίσωση

$$f(x) < g(x).$$

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a \cdot 2^x + \beta, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου a, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, 13)$, τότε:

- i) να βρείτε τους αριθμούς a και β
- ii) να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.
- iii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
- iv) να λύσετε την ανίσωση

$$f(2^x - 31) < 3.$$

Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, 13)$. Άρα,

$$f(1) = 3 \quad \text{και} \quad f(2) = 13.$$

Δηλαδή,

$$a \cdot 2^1 + \beta = 3 \quad \text{και} \quad a \cdot 2^2 + \beta = 13$$

ή ισοδύναμα

$$2a + \beta = 3 \quad \text{και} \quad 4a + \beta = 13.$$

Από το σύστημα των δύο παραπάνω εξισώσεων βρίσκουμε

$$a = 5 \quad \text{και} \quad \beta = -7.$$

- ii) Αποδείξαμε ότι

$$a = 5 \quad \text{και} \quad \beta = -7.$$

Επομένως,

$$f(x) = 5 \cdot 2^x - 7 \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε,

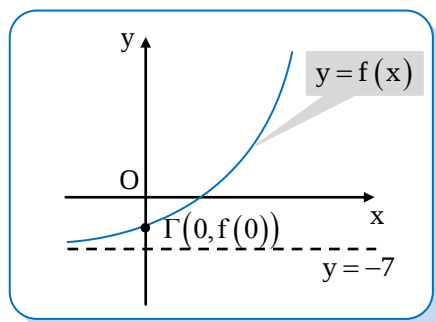
$$f(0) = 5 \cdot 2^0 - 7 = 5 - 7 = -2.$$

Σημείωση

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x_0) = y_0$.

Άρα, το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι το σημείο

$$\Gamma(0, -2).$$



Σημείωση

Για να βρούμε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ αρκεί να βρούμε το $f(0)$.

iii) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2$$

έχουμε

$$2^{x_1} < 2^{x_2}, \text{ αφού } 2 > 1$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} < 5 \cdot 2^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^{x_1} - 7 < 5 \cdot 2^{x_2} - 7$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iv) Παρατηρούμε ότι

$$3 = f(1).$$

Επομένως, η ανίσωση

$$f(2^x - 31) < 3$$

ισοδύναμα γράφεται

$$f(2^x - 31) < f(1).$$

Και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ισοδύναμα έχουμε

$$2^x - 31 < 1$$

$$\Leftrightarrow 2^x < 32$$

$$\Leftrightarrow 2^x < 2^5$$

$$\Leftrightarrow x < 5, \text{ αφού } 2 > 1.$$

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\alpha - 2}{3} \right)^x.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iii) Αν $\alpha = 8$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + 4 \cdot f(1-x) = 6.$$

Λύση

- i) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha - 2}{3} > 0$$

δηλαδή,

$$\alpha > 2.$$

- ii) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha - 2}{3} > 1$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha - 2 > 3$$

δηλαδή,

$$\alpha > 5.$$

- iii) Αν $\alpha = 8$, τότε

$$\frac{\alpha - 2}{3} = \frac{8 - 2}{3} = 2.$$

Επομένως,

$$f(x) = 2^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η εξίσωση

$$f(x) + 4f(1-x) = 6$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 2^x + 4 \cdot 2^{1-x} = 6 &\Leftrightarrow 2^x + 4 \cdot \frac{2}{2^x} = 6 \\ &\Leftrightarrow (2^x)^2 + 8 = 6 \cdot 2^x \\ &\Leftrightarrow (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0. \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$2^x = u,$$

και η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$u^2 - 6u + 8 = 0$$

από την οποία βρίσκουμε

$$u = 2 \quad \text{ή} \quad u = 4.$$

Δηλαδή,

$$2^x = 2 \quad \text{ή} \quad 2^x = 4$$

ή ισοδύναμα

$$2^x = 2^1 \quad \text{ή} \quad 2^x = 2^2$$

και τελικά

$$x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \sin x.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$x^2 \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Και επειδή $e > 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$e^{x^2} \geq e^0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

ii) Αποδείξαμε ότι

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι

$$\sin x \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η εξίσωση

$$f(x) = \sin x$$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$f(x) = 1 \text{ και } \sin x = 1.$$

Παρατηρούμε ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = 1,$$

δηλαδή ο αριθμός 0, επαληθεύει την εξίσωση

$$\sin x = 1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = \sin x$$

έχει μοναδική ρίζα, την $x = 0$.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = 4^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = 2^{x-1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = 27^{x+4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{x+1} = 32$

ii) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

iii) $8 \cdot 3^x = 27 \cdot 2^x$

iv) $9^{x-2} = 3^{4x+1}$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

ii) $3^{2x+2} + 8 \cdot 3^x = 1$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{x^2+8} = 8^{2x}$

ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{4x-9} = \left(\frac{5}{4}\right)^{9x-4}$

iii) $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27}$

iv) $9^{2x} = 3$.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x-2} = \left(\frac{25}{16}\right)^{x+4}$

ii) $\frac{4^x + 10^x}{2} = 5^{2x}$

iii) $2^x - 9\sqrt{2^x} + 8 = 0$

iv) $\frac{8^x + 11 \cdot 2^x}{13 \cdot 4^x + 8} = \frac{1}{2}$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $e^x + e^{-x} = 2$

ii) $2^x - 2^{-x} = \frac{3}{2}$.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$

ii) $2^x + 2^{-x} = 2^{2x+1}$.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x - 3^{x+1} = 3^x - 2^{x+3}$

ii) $5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$.

10. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 7^x + 2^y = 57 \\ 7^x - 2^y = 41 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 3^{2x-y} = 81 \cdot 3^{2x+y} \\ 5^{x+y} = 5 \cdot 25^{y+1} \end{cases}$$

11. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2^x + 2^y = 6 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} (x+y) \cdot 3^{y-x} = 1 \\ (x+y)^{x-y} = 3 \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12 \\ 2^y \cdot 3^x = 18 \end{cases}$$

12. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 2 \cdot 8^x = 4^y \\ 9^{2x} = 27 \cdot 3^{9-4y} \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 9^x \cdot 9^y = 27 \\ 9^x + 9^y = 12 \end{cases}$$

13. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} 5^x + 2^y = 33 \\ 5^x - 2^y = 17 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 3^x - 2^{y+4} = 17 \\ 2^y - 3^{x-3} = 1 \end{cases}$$

14. Να λύσετε τα συστήματα:

i)
$$\begin{cases} \sqrt{3^x} - 2^y = 1 \\ 3^x - 4^y = 17 \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 20 \\ 2^y \cdot 5^x = 50 \end{cases}$$

15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2^{4x-5} < 8$

ii) $7^{1-x} < 1$

iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}$

iv) $5^{x^2+1} \geq 25^x.$

16. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\left(\frac{5}{4}\right)^{x^2} < \left(\frac{16}{25}\right)^{2x}$

ii) $\left(\frac{10}{11}\right)^{1-|x|} < 1,21$

iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|-4} < 9$

iv) $32^{\frac{1}{x}} < \sqrt{2^x}.$

17. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

ii) $5 \cdot 3^{x-1} < 5^x.$

18. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x-1}{4^x - \sqrt{2}}$

ii) $f(x) = \sqrt{1-e^x}.$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2^{3x} + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

ii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 5.$$

20. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\alpha+3}{2}\right)^x.$$

i) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ και είναι γνησίως φθίνουσα.

iii) Για $\alpha = 7$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(2x) + 5 = 6f(x).$$

21. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\eta_{\mu x}}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

i) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{e} \leq f(x) < e \quad \text{για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία

$$y = \sqrt{e}.$$

22. i) Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2.$$

ii) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία οι αριθμοί

$$e^{4x}, \quad e^{6x}, \quad e^{9x}$$

είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν οι αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ισχύει το αντίστροφο;

24. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\alpha + 5}{4}\right)^x.$$

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική συνάρτηση.

ii) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii) Για $\alpha = 7$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(3) - 13f(2x) + 39f(x) = 27.$$

25. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $e^{x+1} + x < 0$.

26. Δίνεται εκθετική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(2, 4)$, τότε:
 - α) να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α
 - β) να λύσετε την ανίσωση $f(x+1) < 8$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{όπου } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right).$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να βρείτε την τιμή του α έτσι, ώστε να ισχύει η σχέση

$$3f(1) = f(0).$$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) - f(y) = \frac{2(e^x - e^y)}{(e^x + 1) \cdot (e^y + 1)} \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x) < f(x)$.

29. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

- i) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{1}{3}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) \leq 0.$$

30. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 2.$$

- iii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) > 1 \quad \text{για κάθε } x < 2.$$

- iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$2^x + 3^x = 5^x.$$

- iii) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση

$$2^x + 3^x < 2 \cdot 5^x.$$

- 32.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2^x + x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τις ευθείες $x = 2$ και $x = 3$.
 ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$2^x = 11 - x.$$

- iv) Να λύσετε την ανίσωση

$$2^x < 6 - x.$$

- 33.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{i) } \left[f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - f\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]^2 > 0 \qquad \text{ii) } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

- 34.** Δίνεται εκθετική συνάρτηση f με βάση το θετικό αριθμό $a \neq 1$.

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(2) - f(1) < f(3) - f(2).$$

- ii) Αν ισχύει η σχέση

$$f(2) = 2f(1),$$

τότε:

- α) να βρείτε την τιμή του a
 β) να λύσετε την εξίσωση $f(2x) = 64$.

- 35.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 2^{2x+1} + 8, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = 17 \cdot 2^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε:

- i) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g
 ii) τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

36. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \varepsilon\varphi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

και

$$g(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i)** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- ii)** Με τη βοήθεια του ερωτήματος **i)** να βρείτε πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $\varepsilon\varphi x = e^x$ στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i)** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

- ii)** Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2 \sin x.$$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i)** Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (4 + \sqrt{15})^x + \frac{1}{(4 + \sqrt{15})^x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- ii)** Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2.$$

- iii)** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

39. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{5 - 2^x - 2^{2-x}}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = 1$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

- iv) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα, ούτε γνησίως φθίνουσα.
- v) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο.

40. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{|x|} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
- iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^{|x|} = \eta \mu^2 x$$

είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

41. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^{|x|+x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή.

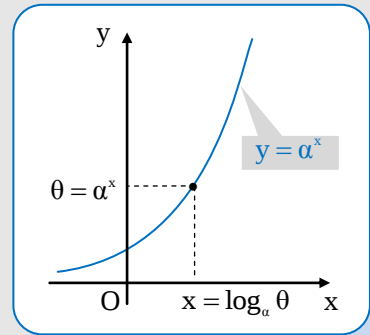
Λογάριθμοι

Ορισμός (Λογαρίθμου)

Έστω a, θ δύο θετικοί αριθμοί με $a \neq 1$. Η εξίσωση $a^x = \theta$ έχει μοναδική λύση, αφού η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ είναι 1-1 και ο θ ανήκει στο σύνολο τιμών της. Τη μοναδική αυτή λύση τη συμβολίζουμε με $\log_a \theta$ και την ονομάζουμε **λογάριθμο του θ ως προς βάση a** . Οπότε έχουμε:

$$a^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_a \theta.$$

Δηλαδή, ο $\log_a \theta$ είναι ο **εκθέτης** στον οποίο πρέπει να **υψώσουμε** τον **a για να βρούμε** το **θ** .



Παράδειγμα

Έχουμε:

- $5^3 = 125 \Leftrightarrow \log_5 125 = 3$
- $2^{-4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{16} = -4$
- $8^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \log_8 2 = \frac{1}{3}$

Πρόταση

Επειδή $a^0 = 1$ και $a^1 = a$, από τον παραπάνω ορισμό συμπεραίνουμε ότι

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{και} \quad \log_a a = 1.$$

Πρόταση

Επίσης, από τον ορισμό του λογαρίθμου προκύπτει αμέσως ότι, αν $0 < a \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\theta > 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\log_a a^x = x \quad \text{και} \quad a^{\log_a \theta} = \theta$$

Παράδειγμα

Έχουμε:

- $\log_9 9^{-6} = -6$
- $11^{\log_{11} 10} = 10$

Ιδιότητες των Λογαριθμών

Πρόταση

Αν $0 < a \neq 1$, τότε για κάθε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

1. $\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
2. $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
3. $\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$

Απόδειξη

1. Έστω ότι είναι

$$\log_a \theta_1 = x_1 \quad \text{και} \quad \log_a \theta_2 = x_2 \quad (1)$$

Τότε έχουμε

$$a^{x_1} = \theta_1 \quad \text{και} \quad a^{x_2} = \theta_2$$

οπότε

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \theta_1 \theta_2 \quad \text{και} \quad a^{x_1 + x_2} = \theta_1 \theta_2.$$

Από τον ορισμό όμως του αλγορίθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$$

από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά:

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$

2. Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο
3. Έστω ότι είναι:

$$\log_a \theta = x \quad (2)$$

Τότε έχουμε $a^x = \theta$, οπότε

$$a^{\kappa x} = \theta^\kappa.$$

Από τον ορισμό όμως του λογαρίθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_a \theta^{\kappa} = \kappa x$$

από την οποία, λόγω της **(2)**, προκύπτει ότι

$$\log_a \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_a \theta.$$

- Επειδή $\sqrt[v]{\theta} = \theta^{\frac{1}{v}}$ για κάθε $\theta > 0$, έχουμε

$$\log_a \sqrt[v]{\theta} = \log_a \theta^{\frac{1}{v}} = \frac{1}{v} \log_a \theta.$$

Παράδειγμα

Να μετατρέψετε την παράσταση

$$A = \frac{1}{2} \log_3 4 - \log_3 54 + 2$$

σε έναν λογάριθμο και να βρείτε την τιμή της.

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \log_3 4 - \log_3 54 + 2 \\ &= \frac{1}{2} \log_3 4 - \log_3 54 + 2 \log_3 3 \\ &= \log_3 4^{\frac{1}{2}} - \log_3 54 + \log_3 3^2 \\ &= \log_3 \sqrt{4} - \log_3 54 + \log_3 9 \\ &= \log_3 2 - \log_3 54 + \log_3 9 \\ &= \log_3 (2 \cdot 9) - \log_3 54 \\ &= \log_3 \frac{2 \cdot 9}{54} = \log_3 \frac{1}{3} \\ &= \log_3 3^{-1} = -1. \end{aligned}$$

Δεκαδικοί Λογάριθμοι

Ορισμός

Οι λογάριθμοι με βάση το **10** λέγονται **δεκαδικοί** ή **κοινοί** λογάριθμοι. Ο δεκαδικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ , συμβολίζεται απλά με **log θ** και όχι με $\log_{10} \theta$. Επομένως:

$$10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta.$$

Πρόταση

Στους δεκαδικούς λογαρίθμους οι ιδιότητες των λογαρίθμων διαμορφώνονται ως εξής:

- $\log 1 = 0$ και $\log 10 = 1$
- $\log 10^x = x$ και $10^{\log \theta} = \theta$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$
- $\log(\theta_1 \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\log \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log \theta_1 - \log \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\log \theta^\kappa = \kappa \log \theta$, $\theta > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 100^{\log 12 + \log 5 - 1}$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} & \log 12 + \log 5 - 1 \\ &= \log 12 + \log 5 - \log 10 \\ &= \log(12 \cdot 5) - \log 10 \\ &= \log 60 - \log 10 \\ &= \log \frac{60}{10} = \log 6. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} A &= 100^{\log 12 + \log 5 - 1} \\ &= 100^{\log 6} = 10^{2 \log 6} \\ &= 10^{\log 6^2} = 10^{\log 36} = 36. \end{aligned}$$

Φυσικοί Λογάριθμοι

Ορισμός

Οι λογάριθμοι με βάση τον αριθμό **e** λέγονται **φυσικοί** ή **νεπέριοι** λογάριθμοι. Ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ , συμβολίζεται με **ln θ** και όχι με $\log_e \theta$. Επομένως:

$$e^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln \theta$$

Πρόταση

Στους φυσικούς λογαρίθμους οι ιδιότητες των λογαρίθμων διαμορφώνονται ως εξής:

- $\ln 1 = 0$ και $\ln e = 1$
- $\ln e^x = x$ και $e^{\ln \theta} = \theta$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta > 0$
- $\ln(\theta_1 \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\ln \frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 > 0$
- $\ln \theta^\kappa = \kappa \ln \theta$, $\theta > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$

Αλλαγή Βάσης

Πρόταση

Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει ο τύπος:

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$$

Παράδειγμα

Έχουμε:

- $\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \frac{1}{\log_2 3}$
- $\log_{100} 7 = \frac{\log 7}{\log 100} = \frac{\log 7}{\log 10^2} = \frac{\log 7}{2 \log 10} = \frac{1}{2} \log 7 = \log \sqrt{7}$
- $\log_{\sqrt{e}} 2 = \frac{\ln 2}{\ln \sqrt{e}} = \frac{\ln 2}{\frac{1}{2} \ln e} = 2 \ln 2 = \ln 4$

Λυμένες Ασκήσεις

11. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους:

i) $\log_7 49$

ii) $\log_2 \sqrt{2}$

iii) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

iv) $\log_{\frac{1}{3}} 81.$

Λύση

i) α' τρόπος:

Έστω

$$\log_7 49 = x.$$

Δηλαδή,

$$49 = 7^x$$

ή ισοδύναμα

$$7^x = 7^2$$

και τελικά

$$x = 2.$$

Άρα,

$$\log_7 49 = 2.$$

β' τρόπος:

Έχουμε

$$\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2.$$

ii) Έχουμε

$$\log_2 \sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

iii) Έχουμε

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 \sqrt[3]{2^2} = \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Σημείωση

Αν a και θ είναι δύο θετικοί αριθμοί με $a \neq 1$, τότε

$$\log_a \theta = x \Leftrightarrow a^x = \theta.$$

Δηλαδή, ο $\log_a \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον a για να βρούμε το θ .

Σημείωση

Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\log_a a^x = x.$$

iv) Έχουμε

$$\log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_{\frac{1}{3}} 3^4 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = -4.$$

12. Να υπολογίσετε τους παρακάτω λογάριθμους:

i) $\log_2 8$

ii) $\log_3 81$

iii) $\log_4 2$

iv) $\log_2 \frac{1}{32}$.

Λύση

i) α' τρόπος:

Έστω

$$\log_2 8 = x.$$

Οπότε με βάση τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε

$$2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Άρα,

$$\log_2 8 = 3.$$

β' τρόπος:

Έχουμε

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

ii) Έχουμε

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

iii) Έχουμε

$$\log_4 2 = \log_4 \sqrt{4} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

iv) Έχουμε

$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 \frac{1}{2^5} = \log_2 2^{-5} = -5.$$

Σημείωση

Θέτουμε x τον ζητούμενο λογάριθμο και επικαλούμαστε τον αντίστοιχο ορισμό.

Σημείωση

Γράφουμε τη λογαριθμητέα ποσότητα ως δύναμη της βάσης και αξιοποιούμε την ιδιότητα

$$\log_a a^x = x.$$

13. Να βρείτε την τιμή του x στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\log_3 x = 4$

ii) $\log_5 x = 2$

iii) $\log_{16} x = \frac{1}{2}$

iv) $\log_{\frac{2}{3}} x = -3.$

Λύση

Έχουμε:

i) $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Leftrightarrow x = 81.$

ii) $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 5^2 \Leftrightarrow x = 25.$

iii) $\log_{16} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 16^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = 4.$

iv) $\log_{\frac{2}{3}} x = -3 \Leftrightarrow x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = \frac{27}{8}.$

14. Να βρείτε την τιμή του a στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\log_a 8 = 3$

ii) $\log_a 49 = 2$

iii) $\log_a 5 = \frac{1}{2}$

iv) $\log_a 0,001 = -3.$

Λύση

Έχουμε:

i) $\log_a 8 = 3 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow a = 2$

ii) $\log_a 49 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 49 \Leftrightarrow a = 7, \text{ αφού } a > 0$

iii) $\log_a 5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 5 \Leftrightarrow a = 5^2 \Leftrightarrow a = 25$

iv) $\log_a 0,001 = -3 \Leftrightarrow a^{-3} = 0,001 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow a = 10.$

15. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $\frac{1}{3}\log_5 8 + \log_5 50 - 2\log_5 2$

ii) $4^{\frac{1}{2}\log_2 20-1}$.

Λύση

i) Έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}\log_5 8 + \log_5 50 - 2\log_5 2 \\ &= \log_5 8^{\frac{1}{3}} + \log_5 50 - \log_5 2^2 \\ &= \log_5 \sqrt[3]{8} + \log_5 50 - \log_5 4 \\ &= \log_5 2 + \log_5 50 - \log_5 4 \\ &= \log_5 (2 \cdot 50) - \log_5 4 \\ &= \log_5 \frac{2 \cdot 50}{4} = \log_5 25 \\ &= \log_5 5^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} 4^{\frac{1}{2}\log_2 20-1} &= (2^2)^{\frac{1}{2}\log_2 20-1} \\ &= 2^{2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 20-2} \\ &= 2^{\log_2 20 - \log_2 2^2} \\ &= 2^{\log_2 \frac{20}{4}} \\ &= 2^{\log_2 5} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Σημείωση

Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε για κάθε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$
- $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$
- $\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta$

Σημείωση

Αν $a > 0$ και $a \neq 1$, τότε ισχύει

$$\log_a 1 = 0$$

και

$$\log_a a = 1.$$

Σημείωση

Αν a και θ είναι δύο θετικοί αριθμοί με $a \neq 1$, τότε ισχύει

$$a^{\log_a \theta} = \theta.$$

16. Έστω α, β δύο πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha > \beta > 0$$

και

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\beta.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } 2\log(\alpha - \beta) = \log \alpha + \log \beta \quad \text{ii) } \log^2(\alpha - \beta) \geq \log \alpha \cdot \log \beta.$$

Λύση

i) Έχουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = \alpha\beta > 0.$$

Επομένως,

$$\log(\alpha - \beta)^2 = \log \alpha\beta.$$

Και επειδή

$$\alpha - \beta > 0, \alpha > 0 \text{ και } \beta > 0$$

συμπεραίνουμε ότι

$$2\log(\alpha - \beta) = \log \alpha + \log \beta.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$2\log(\alpha - \beta) = \log \alpha + \log \beta.$$

Επομένως,

$$(2\log(\alpha - \beta))^2 = (\log \alpha + \log \beta)^2$$

δηλαδή

$$4\log^2(\alpha - \beta) = \log^2 \alpha + \log^2 \beta + 2\log \alpha \cdot \log \beta \quad (1)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$\log^2 \alpha + \log^2 \beta \geq 2\log \alpha \cdot \log \beta$$

και συνεπώς από τη σχέση (1) προκύπτει ότι

$$4\log^2(\alpha - \beta) \geq 2\log \alpha \cdot \log \beta + 2\log \alpha \cdot \log \beta$$

ή ισοδύναμα

$$4\log^2(\alpha - \beta) \geq 4\log \alpha \cdot \log \beta$$

και τελικά

$$\log^2(\alpha - \beta) \geq \log \alpha \cdot \log \beta.$$

Σημείωση

Έχουμε

$$\log \theta = \log_{10} \theta$$

και

$$\ln \theta = \log_e \theta.$$

17. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_3 2 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 1$

ii) $\log_3 32 \cdot \log_5 81 \cdot \log_2 25 = 40.$

Λύση

i) Σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων έχουμε

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5}$$

και $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}.$

Από τις παραπάνω ισότητες πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει

$$\log_3 2 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 2} = 1.$$

ii) Παρατηρούμε ότι

$$\log_3 32 = \log_3 2^5 = 5 \log_3 2$$

$$\log_5 81 = \log_5 3^4 = 4 \log_5 3$$

και $\log_2 25 = \log_2 5^2 = 2 \log_2 5.$

Επομένως,

$$\begin{aligned} & \log_3 32 \cdot \log_5 81 \cdot \log_2 25 \\ &= (5 \log_3 2) \cdot (4 \log_5 3) \cdot (2 \log_2 5) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \log_3 2 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 \end{aligned}$$

i)
 $= 40 \cdot 1 = 40.$

Σημειώσεις

- Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha, \beta \neq 1$ τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει η σχέση

$$\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$$

- Σύμφωνα με τον τύπο αυτό έχουμε

$$\log_\beta \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta}$$

και

$$\log_\beta \theta = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}.$$

18. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_3 2 \cdot \log_7 5 = \log_7 2 \cdot \log_3 5$ ii) $\log_{100} 4 - \log_{0,1} 4 = \log 8$.

Λύση

i) Σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων έχουμε

$$\begin{aligned}\log_3 2 \cdot \log_7 5 &= \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 7} \\ &= \frac{\log 2 \cdot \log 5}{\log 3 \cdot \log 7}\end{aligned}\tag{1}$$

και

$$\begin{aligned}\log_7 2 \cdot \log_3 5 &= \frac{\log 2}{\log 7} \cdot \frac{\log 5}{\log 3} \\ &= \frac{\log 2 \cdot \log 5}{\log 7 \cdot \log 3}\end{aligned}\tag{2}$$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** συμπεραίνουμε ότι

$$\log_3 2 \cdot \log_7 5 = \log_7 2 \cdot \log_3 5.$$

ii) Σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων έχουμε

$$\begin{aligned}\log_{100} 4 - \log_{0,1} 4 &= \frac{\log 4}{\log 100} - \frac{\log 4}{\log 0,1} \\ &= \frac{\log 2^2}{\log 10^2} - \frac{\log 2^2}{\log 10^{-1}} \\ &= \frac{2 \log 2}{2} - \frac{2 \log 2}{-1} \\ &= \log 2 + 2 \log 2 \\ &= 3 \log 2 \\ &= \log 2^3 = \log 8.\end{aligned}$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

42. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους:

i) $\log_2 64$

ii) $\log_{\frac{1}{3}} 81$

iii) $\log_5 \sqrt{125}$

iv) $\log_{\frac{11}{7}} \frac{49}{121}$.

43. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ισχύει:

i) $\log_2 x = 3$

ii) $\log_3 x = -2$

iii) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$

iv) $\log_{100} x = \frac{1}{2}$.

44. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία ισχύει:

i) $\log_a 32 = 5$

ii) $\log_a 2 = \frac{1}{3}$

iii) $\log_a 5 = -\frac{1}{2}$

iv) $\log_a 25 = 2$.

45. Έστω α, β δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\log(\alpha\beta) = \log \alpha \cdot \log \beta + 1.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\alpha = 10 \quad \text{ή} \quad \beta = 10.$$

46. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1}{2} \log_2 16 + \log_2 10 - \log_2 5 = 3$

ii) $\log 5 + 3 \log 2 - \log 4 = 1$

iii) $\ln(9 + 4\sqrt{5}) + 2 \ln(\sqrt{5} - 2) = 0$

iv) $e^{\ln 5 + 2 \ln 2} = 20$.

47. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $8^{\log_2 3}$

ii) $25^{\log_5 7}$

iii) $81^{\log_3 \sqrt{5}}$

iv) $27^{\log_3 \sqrt[3]{2}}$.

48. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $10^{1-\log 2} + 100^{\log 5}$

ii) $\log\left(\log\sqrt[5]{\sqrt{10}}\right).$

49. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $100^{\log 3} + \left(\sqrt{10}\right)^{\log 25}$

ii) $e^{\frac{1}{2}\ln 9} + \left(\sqrt{e}\right)^{\ln 4}.$

50. Αν α και β είναι δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha > \beta \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 6\alpha\beta,$$

να αποδείξετε ότι

$$\log\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta).$$

51. Έστω α, β δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αν ισχύει η σχέση

$$\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta,$$

να αποδείξετε ότι

$$\log\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right) = \frac{\log \alpha + \log \beta}{2}.$$

Ισχύει το αντίστροφο;

52. Να αποδείξετε ότι αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι κάποιας γεωμετρικής προόδου, τότε οι αριθμοί

$$\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$$

είναι διαδοχικοί όροι κάποιας αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω της προόδου αυτής;

53. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι σχέσεις

$$\beta = 10^{\alpha^2} \quad \text{και} \quad \gamma = 10^{\beta^2},$$

να αποδείξετε ότι:

i) $\beta = \sqrt{\log \gamma}$

ii) $|\alpha| = \sqrt{\frac{\log(\log \gamma)}{2}}.$

- 60.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ με $x \neq 1$ ισχύει η σχέση

$$\frac{2}{\log_4 x} = \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_8 x}.$$

- 61.** Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό α με $\alpha \neq 1$ ισχύει η σχέση

$$\frac{\log_{e^3} \alpha \cdot \log_{e^4} \alpha}{\log_{e^2} \alpha \cdot \log_{e^6} \alpha} = 1.$$

- 62.** Δίνεται πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \ln(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x^2 - \ln(1 + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot x - 8$$

$$\text{με } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

- i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$.

- ii) Για $\alpha = \frac{\pi}{4}$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

- 63.** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - x^2 + (\ln \alpha)x + \ln \beta$$

όπου α, β σταθεροί θετικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι $\alpha\beta = 1$

- ii) να βρείτε τους α και β έτσι, ώστε οι αριθμοί

$$\alpha, \beta \text{ και } \frac{1}{8}$$

να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Λογαριθμική Συνάρτηση

Η Συνάρτηση $f(x) = \log x$

Ορισμός

Για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο λογάριθμος $\log x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\log x$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \log x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **δεκαδική λογαριθμική συνάρτηση**.

Πρόταση

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \log x \quad \text{και} \quad g(x) = 10^x$$

είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}y'$.

Απόδειξη

Έστω $M(\alpha, \beta)$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \log x$.

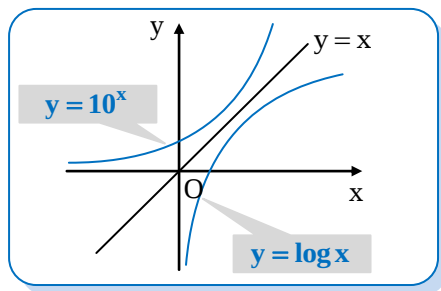
Τότε, έχουμε:

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow \log \alpha = \beta \Leftrightarrow 10^\beta = \alpha \Leftrightarrow g(\beta) = \alpha.$$

Επομένως, το σημείο $N(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = 10^x \quad \text{και αντιστρόφως.}$$

Όμως, τα σημεία $M(\alpha, \beta)$ και $N(\beta, \alpha)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}y'$. Άρα, το ίδιο ισχύει με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .



Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \log x$, συμπεραίνουμε ότι η δεκαδική λογαριθμική συνάρτηση:

- Έχει **πεδίο ορισμού** το διάστημα $(0, +\infty)$.
- Έχει **σύνολο τιμών** το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, +\infty)$. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \log x_1 < \log x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$\log x_1 < \log x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

- Είναι **συνάρτηση 1-1**. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow \log x_1 \neq \log x_2.$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται και ως εξής:

Αν ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \log x_1 = \log x_2,$$

τότε

$$x_1 = x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$\log x_1 = \log x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- Έχει γραφική παράσταση η οποία, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο **A(1,0)** (αφού $f(1) = \log 1 = 0$) και έχει **ασύμπτωτη** τον άξονα $y'y$.
- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:
 - $\log x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
 - $\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Η Συνάρτηση $f(x) = \ln x$

Ορισμός

Για κάθε $x > 0$ ορίζεται ο λογάριθμος $\ln x$. Επομένως, αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in (0, +\infty)$ στο $\ln x$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

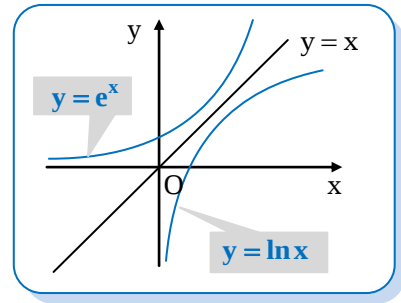
$$f(x) = \ln x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **φυσική λογαριθμική συνάρτηση**.

Για τη φυσική λογαριθμική συνάρτηση ισχύουν παρόμοια συμπεράσματα με αυτά της δεκαδικής λογαριθμικής συνάρτησης. Έχουμε λοιπόν:

- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ είναι **συμμετρικές** ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\hat{x}\hat{O}y$ και $\hat{x}'\hat{O}y'$.

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$, συμπεραίνουμε ότι η φυσική λογαριθμική συνάρτηση:



- Έχει **πεδίο ορισμού** το διάστημα $(0, +\infty)$.
- Έχει **σύνολο τιμών** το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.
- Είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, +\infty)$. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, ισχύει

$$f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2.$$

- Είναι **συνάρτηση 1-1**. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 \neq x_2$, ισχύει

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow \ln x_1 \neq \ln x_2.$$

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται και ως εξής:

Αν ισχύει

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2,$$

τότε

$$x_1 = x_2.$$

Επομένως, ισχύει η ισοδυναμία

$$\ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- Έχει γραφική παράσταση η οποία, τέμνει τον άξονα x' στο σημείο **$A(1, 0)$** (αφού, $f(1) = \ln 1 = 0$) και έχει **ασύμπτωτη** τον άξονα $y'y$.
- Ισχύουν οι ισοδυναμίες:
 - $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$
 - $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Παράδειγμα

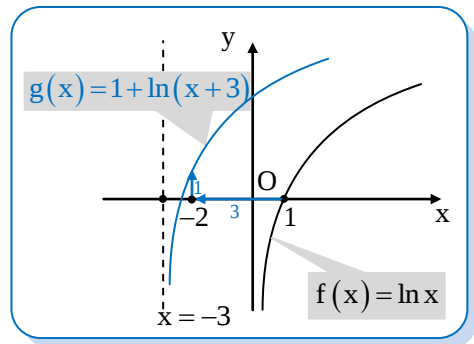
Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = 1 + \ln(x + 3).$$

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από δύο μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

- Μια οριζόντια κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και
- Μια κατακόρυφη κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



Λογαριθμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

1η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που μετασχηματίζονται με τις ιδιότητες των λογαρίθμων στις μορφές

$$\log f(x) = \log g(x) \quad \text{ή} \quad \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$\log f(x) < \log g(x) \quad \text{ή} \quad \ln f(x) < \ln g(x)$$

- Αρχικά, πριν μετασχηματίσουμε την εξίσωση ή την ανίσωση, βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της.
- Κατόπιν αξιοποιούμε:
 - στις **εξισώσεις**, την ιδιότητα **$1 - 1$** των λογαριθμικών συναρτήσεων και λύνουμε την ισοδύναμη εξίσωση **$f(x) = g(x)$** .
 - στις **ανισώσεις**, τη **μονοτονία** των λογαριθμικών συναρτήσεων (γνησίως αύξουσες) και λύνουμε την ισοδύναμη ανίσωση **$f(x) < g(x)$** .

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln(4x - x^2) = 2 \ln 2 + \ln(x - 1).$$

Λύση

- Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$4x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(4 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4$$

και

$$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in (1, 4)$.

- Για αυτά τα x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\ln(4x - x^2) = \ln 2^2 + \ln(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(4x - x^2) = \ln[4(x - 1)]$$

$$\Leftrightarrow 4x - x^2 = 4(x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4x - x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 = 4$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και 2 . Όμως $x \in (1, 4)$ και συνεπώς η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα. Τον αριθμό 2 .

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$\log(x^2 - 16) < 1 + \log\left(x - \frac{16}{5}\right).$$

Λύση

- Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 4) > 0 \Leftrightarrow x < -4 \text{ ή } x > 4$$

και

$$x - \frac{16}{5} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{16}{5}.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in (4, +\infty)$.

- Για αυτά τα x η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\log(x^2 - 16) < \log 10 + \log\left(x - \frac{16}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log(x^2 - 16) < \log\left[10\left(x - \frac{16}{5}\right)\right] \Leftrightarrow \log(x^2 - 16) < \log(10x - 32)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 16 < 10x - 32 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 8) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 8.$$

Όμως, $x \in (4, +\infty) \Leftrightarrow x > 4$.

Επομένως, η δοθείσα ανίσωση έχει λύση τους αριθμούς $x \in (4, 8)$.

2η Κατηγορία

Πρόκειται για εξισώσεις – ανισώσεις που εμφανίζουν **δυνάμεις** λογαρίθμων.

- Αρχικά, βρίσκουμε το **πεδίο ορισμού** της εξίσωσης ή της ανίσωσης.
- Κατόπιν αξιοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων εμφανίζουμε **δυνάμεις** του **ίδιου λογάριθμου** και εκτελώντας κατάλληλη **αντικατάσταση** οδηγούμαστε στη λύση πολωνυμικής εξίσωσης – ανίσωσης.

Παράδειγμα

Να λύσετε την εξίσωση

$$\log^3 x = \log x^4.$$

Λύση

- Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$x > 0 \quad \text{και} \quad x^4 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- Για αυτά τα x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\log^3 x = 4 \log x.$$

Θέτοντας $\log x = \omega$ η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 4\omega \Leftrightarrow \omega^3 - 4\omega = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega(\omega^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega = 0 \text{ ή } \omega = 2 \text{ ή } \omega = -2. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\log x = 0 \text{ ή } \log x = 2 \text{ ή } \log x = -2$$

ή ισοδύναμα

$$\log x = \log 1 \text{ ή } \log x = \log 10^2 \text{ ή } \log x = \log 10^{-2}$$

και τελικά

$$x = 1 \text{ ή } x = 100 \text{ ή } x = \frac{1}{100}.$$

Παράδειγμα

Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{\ln x - 3} \geq e^3.$$

Λύση

- Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- Για αυτά τα x η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x}{e}\right)^{\ln x - 3} &\geq \ln e^3 \Leftrightarrow (\ln x - 3)\ln\left(\frac{x}{e}\right) \geq \ln e^3 \\ &\Leftrightarrow (\ln x - 3)(\ln x - \ln e) \geq 3\ln e \\ &\Leftrightarrow (\ln x - 3)(\ln x - 1) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow \ln^2 x - 4\ln x \geq 0\end{aligned}$$

Θέτοντας $\ln x = \omega$ η παραπάνω ανίσωση γράφεται

$$\omega^2 - 4\omega \geq 0 \Leftrightarrow \omega(\omega - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \omega \leq 0 \text{ ή } \omega \geq 4.$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned}\ln x &\leq 0 \quad \text{ή} \quad \ln x \geq 4 \\ \Leftrightarrow \ln x &\leq \ln 1 \quad \text{ή} \quad \ln x \geq \ln e^4 \\ \Leftrightarrow x &\leq 1 \quad \text{ή} \quad x \geq e^4.\end{aligned}$$

Όμως, $x \in (0, +\infty) \Leftrightarrow x > 0$.

Επομένως, η δοθείσα ανίσωση έχει λύση τους αριθμούς $x \in (0, 1] \cup [e^4, +\infty)$.

Λυμένες Ασκήσεις

19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log(x-1).$$

- Na βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
- Na παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- Na λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2$.

Λύση

- Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνες ακριβώς τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η παράσταση

$$\log(x-1)$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Δηλαδή,

για τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $x-1 > 0$ ή ισοδύναμα $x > 1$. Επομένως, $A = (1, +\infty)$.

Σημείωση

Κάθε λογάριθμος έχει νόημα αριθμού αν και μόνο αν η λογαριθμητέα ποσότητα είναι θετική.

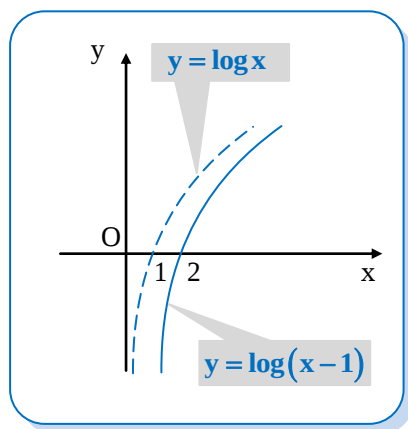
ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \log(x-1)$$

προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση (μεταφορά) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = \log x$$

κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.



iii) Η ανίσωση

$$f(x) < 2$$

δηλαδή, η ανίσωση

$$\log(x-1) < 2$$

ορίζεται για κάθε $x > 1$ και ισοδύναμα γράφεται

$$\log(x-1) < 2\log 10$$

$$\Leftrightarrow \log(x-1) < \log 10^2$$

$$\Leftrightarrow x-1 < 10^2 \quad \text{και} \quad x > 1$$

$$\Leftrightarrow x < 101 \quad \text{και} \quad x > 1.$$

Επομένως,

$$f(x) < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 101.$$

Σημειώσεις

- Η λογαριθμική συνάρτηση

$$g(x) = \log x$$

είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, +\infty)$. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2$$

ισχύει

$$\log x_1 < \log x_2$$

και αντιστρόφως.

- Η λογαριθμική συνάρτηση

$$g(x) = \ln x$$

είναι **επίσης γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $(0, +\infty)$. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2$$

ισχύει

$$\ln x_1 < \ln x_2$$

και αντιστρόφως.

20. Έστω α και β δύο θετικοί αριθμοί τέτοιοι, ώστε

$$\log \alpha \cdot \log \beta < 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha\beta + 1 < \alpha + \beta$

ii) αν επιπλέον ισχύει η σχέση $\alpha + \beta < 11$, τότε $\log \alpha + \log \beta < 1$.

Λύση

i) Από τη δοθείσα σχέση γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί $\log \alpha$ και $\log \beta$ είναι ετερόσημοι. Δηλαδή,

$$\log \alpha < 0 \quad \text{και} \quad \log \beta > 0$$

ή

$$\log \alpha > 0 \quad \text{και} \quad \log \beta < 0.$$

Επομένως,

$$\alpha < 1 \quad \text{και} \quad \beta > 1$$

ή

$$\alpha > 1 \quad \text{και} \quad \beta < 1.$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι σε κάθε περίπτωση οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι ετερόσημοι. Δηλαδή,

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha\beta - \alpha - \beta + 1 < 0$$

και τελικά

$$\alpha\beta + 1 < \alpha + \beta.$$

ii) Έχουμε

$$\alpha\beta + 1 < \alpha + \beta \quad \text{και} \quad \alpha + \beta < 11.$$

Οπότε,

$$\alpha\beta + 1 < 11$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha\beta < 10.$$

Άρα,

$$\log(\alpha\beta) < \log 10$$

και τελικά

$$\log \alpha + \log \beta < 1.$$

21. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$$

i) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$g(x) = \ln 2.$$

iii) Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$h(x) = f(g(x)) \quad \text{και} \quad r(x) = g(f(x))$$

συμπίπτουν.

Λύση

i) Σχεδιάζουμε αρχικά την καμπύλη με εξίσωση

$$y = e^x,$$

δηλαδή τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τη συμμετρική της καμπύλης

$$y = e^x$$

ως προς την ευθεία

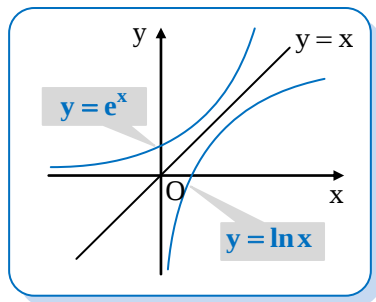
$$y = x.$$

Η καμπύλη αυτή έχει εξίσωση

$$y = \ln x,$$

δηλαδή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$$



Σημείωση

Οι καμπύλες με εξισώσεις

$$y = \ln x \quad \text{και} \quad y = e^x$$

είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία

$$y = x.$$

ii) Η εξίσωση

$$g(x) = \ln 2$$

δηλαδή, η εξίσωση

$$\ln x = \ln 2$$

ορίζεται για κάθε

$$x > 0$$

και προφανώς έχει μοναδική λύση την

$$x = 2.$$

Σημειώσεις

- Από τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης

$$g(x) = \ln x, \quad x > 0$$

προκύπτει ότι αυτή είναι και **1-1**.

Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει

$$\ln x_1 \neq \ln x_2.$$

- Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι η παραπάνω ιδιότητα διατυπώνεται και ως εξής:

Αν ισχύει $\ln x_1 = \ln x_2$, τότε

$$x_1 = x_2.$$

Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, ισχύει η ισοδυναμία

$$\ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

- Η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στην επίλυση λογαριθμικών εξισώσεων. Δηλαδή, εξισώσεων όπου ο άγνωστος εμφανίζεται σε λογάριθμο.

iii) Έχουμε

$$h(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = e^{\ln x} = x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Άρα, η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(0, +\infty)$ και γραφική παράσταση το σύνολο των σημείων της ημιευθείας

$$y = x \quad \text{με } x \in (0, +\infty).$$

Επίσης,

$$r(x) = g(f(x)) = g(e^x) = \ln e^x = x \ln e = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, η συνάρτηση r έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ και γραφική παράσταση το σύνολο των σημείων της ευθείας

$$y = x \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και r δεν συμπίπτουν.

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln x + \ln(6-x) = 3\ln 2$

ii) $\ln(4-x^2) - \ln x = \ln 3$.

Λύση

i) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με
 $x > 0$

και

$$6-x > 0 \Leftrightarrow x < 6.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in (0, 6)$. Γι' αυτά
 τα x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα
 γράφεται

$$\ln[x(6-x)] = \ln 2^3 \Leftrightarrow x(6-x) = 2^3$$

$$\Leftrightarrow 6x - x^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 4 οι οποίοι ανήκουν στο
 διάστημα $(0, 6)$. Άρα, η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς
 2 και 4.

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$4-x^2 > 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

και

$$x > 0.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in (0, 2)$. Γι' αυτά τα x η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα
 γράφεται

$$\ln \frac{4-x^2}{x} = \ln 3 \Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x} = 3$$

$$\Leftrightarrow 4-x^2 = 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -4 . Όμως,
 $x \in (0, 2)$.

Άρα, η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα, τον αριθμό 1.

Σχόλιο

Αρχικά βρίσκουμε το σύνολο ορι-
 σμού της εξίσωσης απαιτώντας από
 κάθε λογαριθμητέα ποσότητα να
 είναι θετική.

23. Να λύσετε την εξίσωση

$$4\log x^2 - \log^2(-x) = 16.$$

Λύση

Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$x^2 > 0 \quad \text{και} \quad -x > 0$$

δηλαδή, για κάθε $x < 0$. Γι' αυτά τα x η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται.

$$4\log(-x)^2 - \log^2(-x) = 16$$

$$\Leftrightarrow 8\log(-x) - \log^2(-x) = 16$$

$$\Leftrightarrow \log^2(-x) - 8\log(-x) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow [\log(-x) - 4]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(-x) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(-x) = 4.$$

Δηλαδή, $-x = 10^4$ και τελικά $x = -10.000$.

Παρατήρηση

Γράφοντας

$$x^2 = (-x)^2$$

η δοθείσα ανίσωση μετασχηματίζεται σε εξίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο τον $\log(-x)$.

24. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^{x+1} = 3^{5-x}$

ii) $e^{x-1} = 5^x.$

Λύση

i) Έχουμε

$$2^{x+1} = 3^{5-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2^{x+1} = \ln 3^{5-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\ln 2 = (5-x)\ln 3$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2 + \ln 2 = 5 \ln 3 - x \ln 3$$

$$\Leftrightarrow (\ln 2 + \ln 3)x = 5 \ln 3 - \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \ln 3 - \ln 2}{\ln 2 + \ln 3}.$$

Παρατήρηση

Αξιοποιώντας την ισοδυναμία

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 = \ln x_2$$

μετασχηματίζουμε τη δοθείσα εξίσωση σε εξίσωση 1ου βαθμού.

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned}
 e^{x-1} &= 5^x \\
 \Leftrightarrow \ln e^{x-1} &= \ln 5^x \\
 \Leftrightarrow (x-1)\ln e &= x \ln 5 \\
 \Leftrightarrow x-1 &= x \ln 5, \quad \text{αφού } \ln e = 1 \\
 \Leftrightarrow x - x \ln 5 &= 1 \\
 \Leftrightarrow (1 - \ln 5) \cdot x &= 1 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{1 - \ln 5}.
 \end{aligned}$$

25. Να λύσετε την εξίσωση

$$25^x + 6 = 5^{x+1}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 25^x + 6 &= 5^{x+1} \\
 \Leftrightarrow (5^2)^x - 5^{x+1} + 6 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 6 &= 0 \\
 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 5 \cdot 5^x + 6 &= 0.
 \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$5^x = \omega$$

οπότε η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\omega^2 - 5\omega + 6 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \quad \text{ή} \quad \omega = 3.$$

Επομένως,

- $\omega = 2 \Leftrightarrow 5^x = 2 \Leftrightarrow \ln 5^x = \ln 2$

$$\Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5}$$

Παρατήρηση

Παρατηρώντας ότι

$$25^x = (5^2)^x$$

και

$$5^{x+1} = 5 \cdot 5^x,$$

η δοθείσα εξίσωση μετασχηματίζεται σε εξίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο το 5^x που για λόγους απλότητας θέτουμε ω .

ή

$$\begin{aligned} \bullet \quad \omega = 3 &\Leftrightarrow 5^x = 3 \Leftrightarrow \ln 5^x = \ln 3 \\ &\Leftrightarrow x \ln 5 = \ln 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln 5}. \end{aligned}$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες τους αριθμούς

$$\frac{\ln 2}{\ln 5} \quad \text{και} \quad \frac{\ln 3}{\ln 5}.$$

26. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $e^{x-1} > 2^x$

ii) $10^{x^2} < 5^x.$

Λύση

i) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \ln e^{x-1} &> \ln 2^x \\ \Leftrightarrow (x-1) \ln e &> x \ln 2 \\ \Leftrightarrow x-1 &> x \ln 2 \\ \Leftrightarrow x - x \ln 2 &> 1 \\ \Leftrightarrow (1 - \ln 2)x &> 1. \end{aligned}$$

Και επειδή

$$1 - \ln 2 = \ln e - \ln 2 > 0$$

αφού

$$e > 2$$

και η συνάρτηση $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι

$$x > \frac{1}{1 - \ln 2}.$$

Παρατήρηση

Αξιοποιώντας τη μονotonία της συνάρτησης $\ln x$ η δοθείσα ανίσωση μετασχηματίζεται σε ισοδύναμη ανίσωση πρώτου βαθμού.

- ii) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\log x$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}\log 10^{x^2} &< \log 5^x \\ \Leftrightarrow x^2 \log 10 &< x \log 5 \\ \Leftrightarrow x^2 &< x \log 5 \\ \Leftrightarrow x^2 - x \log 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow x(x - \log 5) &< 0.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$x \in (0, \log 5).$$

27. Να λύσετε την ανίσωση

$$\frac{(x-2)\log(x^2+3)}{x^2-4x} < 0.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 + 3 \geq 3 > 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\log(x^2 + 3) > \log 1 = 0,$$

αφού η συνάρτηση $\log x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Οπότε, η δοθείσα ανίσωση είναι ισοδύναμη με την ανίσωση

$$\frac{x-2}{x^2-4x} < 0$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται

$$(x-2)(x^2-4x) < 0.$$

Οι ρίζες και το πρόσημο του πολωνύμου

$$P(x) = (x-2)(x^2-4x)$$

φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$		
$x-2$	-	-	0	+	+		
x^2-4x	+	0	-	-	0	+	
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Άρα, οι λύσεις της ανίσωσης

$$P(x) < 0$$

που είναι και οι λύσεις της δοθείσας ανίσωσης είναι οι αριθμοί

$$x \in (-\infty, 0) \cup (2, 4).$$

28. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\log(2x - 4) < 1$

ii) $\ln(3x - 8) > 0$

Λύση

i) Η ανίσωση ορίζεται για εκείνα τα x , ώστε

$$2x - 4 > 0 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2.$$

Γι' αυτά τα x έχουμε

$$\begin{aligned} \log(2x - 4) < 1 &\Leftrightarrow \log(2x - 4) < \log 10 \\ &\Leftrightarrow 2x - 4 < 10 \\ &\Leftrightarrow 2x < 14 \\ &\Leftrightarrow x < 7 \end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το διάστημα $(2, 7)$.

ii) Η ανίσωση ορίζεται για εκείνα τα x , ώστε

$$\begin{aligned} 3x - 8 > 0 &\Leftrightarrow 3x > 8 \\ &\Leftrightarrow x > \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Γι' αυτά τα x έχουμε

$$\begin{aligned}\ln(3x-8) > 0 &\Leftrightarrow \ln(3x-8) > \ln 1 \\ &\Leftrightarrow 3x-8 > 1 \\ &\Leftrightarrow 3x > 9 \\ &\Leftrightarrow x > 3\end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το διάστημα $(3, +\infty)$.

29. Να λύσετε την ανίσωση

$$\log^2 x + 2 < \log x^3.$$

Λύση

Η ανίσωση ορίζεται για εκείνα τα x ώστε

$$x > 0 \quad \text{και} \quad x^3 > 0$$

δηλαδή

$$x > 0.$$

Γι' αυτά τα x έχουμε

$$\begin{aligned}\log^2 x + 2 < \log x^3 &\Leftrightarrow \log^2 x + 2 < 3\log x \\ &\Leftrightarrow \log^2 x - 3\log x + 2 < 0\end{aligned}$$

Θέτουμε $\log x = \omega$, οπότε έχουμε

$$\omega^2 - 3\omega + 2 < 0 \Leftrightarrow \omega \in (1, 2).$$

ω	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$\omega^2 - 3\omega + 2$	+	0	-	0	+

Δηλαδή

$$\begin{aligned}1 < \log x < 2 &\Leftrightarrow \log 10 < \log x < \log 10^2 \\ &\Leftrightarrow 10 < x < 100.\end{aligned}$$

30. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 9 \\ 5^x + 32 \cdot 2^{-y} = 27. \end{cases}$$

Λύση

Από την πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε

$$5^x = 2^y + 9 \quad (1)$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει

$$\begin{aligned} 2^y + 9 + 32 \cdot 2^{-y} &= 27 \Leftrightarrow 2^y - 18 + \frac{32}{2^y} = 0 \\ \Leftrightarrow 2^y \cdot 2^y - 18 \cdot 2^y + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^y)^2 - 18 \cdot 2^y + 32 &= 0. \end{aligned}$$

Θέτουμε $2^y = \omega$ και η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\omega^2 - 18\omega + 32 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \quad \text{ή} \quad \omega = 16.$$

Δηλαδή,

$$2^y = 2 \Leftrightarrow y = 1 \quad \text{ή} \quad 2^y = 16 \Leftrightarrow y = 4.$$

Από τη σχέση (1) για $y = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} 5^x &= 11 \Leftrightarrow \log 5^x = \log 11 \\ \Leftrightarrow x \log 5 &= \log 11 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log 11}{\log 5}. \end{aligned}$$

Επίσης, για $y = 4$ παίρνουμε

$$5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει δύο ζεύγη λύσεων

$$(x, y) = (2, 4) \quad \text{ή} \quad (x, y) = \left(\frac{\log 11}{\log 5}, 1 \right).$$

31. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \ln(x^2y) = 5 \\ \ln x - \ln y = 1 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 2\log 3 \\ \log(x+y) = 1. \end{cases}$$

Λύση

i) Το σύστημα ορίζεται για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με

$$x^2y > 0, x > 0 \text{ και } y > 0.$$

Δηλαδή, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Γι' αυτά τα x, y το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ln(x^2y) = 5 \\ \ln x - \ln y = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x^2y) = 5 \\ \ln \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y = e^5 \\ \frac{x}{y} = e \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \frac{x}{e} = e^5 \\ y = \frac{x}{e} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = e^6 \\ y = \frac{x}{e} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^2 \\ y = e. \end{cases} \end{aligned}$$

Σημείωση

Ισχύει εξ' ορισμού η ισοδυναμία

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow \theta = e^x$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = (e^2, e).$$

ii) Το σύστημα ορίζεται για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με

$$x > 0, y > 0 \text{ και } x + y > 0.$$

Δηλαδή, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Γι' αυτά τα x, y το σύστημα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \log 3 \\ \log(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(xy) = \log 3^2 \\ \log(x + y) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 9 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(10 - x) = 9 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 = 0 \\ y = 10 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ή } x = 9 \\ y = 10 - x. \end{cases}$$

Σημείωση

Ισχύει εξ' ορισμού η ισοδυναμία

$$\log \theta = x \Leftrightarrow \theta = 10^x$$

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις

$$(x, y) = (1, 9) \text{ ή } (x, y) = (9, 1).$$

32. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$$

- i) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = a$$

για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

Λύση

- i) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f αποτελείται από το σύνολο των σημείων της καμπύλης

$$y = e^x$$

με τετμημένη

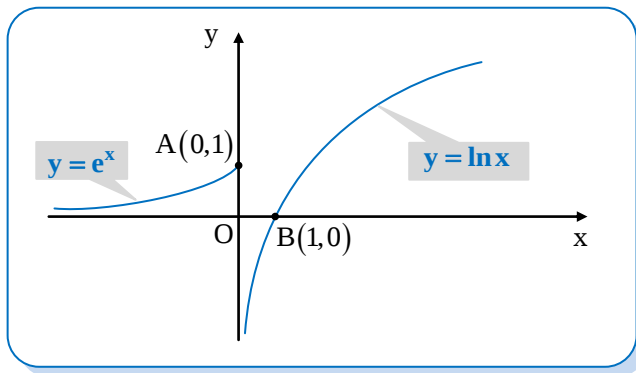
$$x \leq 0$$

και το σύνολο των σημείων της καμπύλης

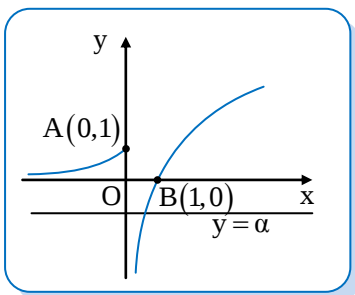
$$y = \ln x$$

με τετμημένη

$$x > 0.$$



- ii)



Παρατηρούμε ότι η ευθεία

$$y = \alpha$$

έχει:

Παρατήρηση

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = \alpha$$

συμπίπτει με το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία

$$y = \alpha.$$

- ακριβώς ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f αν

$$\alpha \leq 0 \quad \text{ή} \quad \alpha > 1$$

- ακριβώς δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f αν

$$0 < \alpha \leq 1.$$

Δηλαδή, η εξίσωση

$$f(x) = \alpha$$

έχει:

- ακριβώς μια ρίζα αν

$$\alpha \in (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$$

- ακριβώς δύο ρίζες αν

$$\alpha \in (0, 1].$$

33. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\ln x - 1).$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2\ln 3.$$

iii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Λύση

- i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αποτελείται από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η παράσταση $\ln(\ln x - 1)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Δηλαδή, από εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x - 1 > 0$$

ή ισοδύναμα

$$x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x > \ln e$$

δηλαδή

$$x > 0 \quad \text{και} \quad x > e$$

και τελικά

$$x > e.$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο

$$A = (e, +\infty).$$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για κάθε

$$x \in A = (e, +\infty).$$

Γι' αυτά τα x έχουμε

$$f(x) = 2 \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \ln(\ln x - 1) = \ln 3^2$$

$$\Leftrightarrow \ln x - 1 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = e^{10} \in A.$$

iii) Αρκεί να βρούμε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f(x) < 0.$$

Η ανίσωση αυτή ορίζεται για κάθε

$$x \in A = (e, +\infty).$$

Γι' αυτά τα x η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\ln(\ln x - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(\ln x - 1) < \ln 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x - 1 < 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x < 2$$

$$\Leftrightarrow \ln x < \ln e^2$$

$$\Leftrightarrow x < e^2.$$

Όμως,

$$x \in A = (e, +\infty).$$

Δηλαδή,

$$x > e.$$

Άρα, οι ζητούμενες τιμές του x είναι

$$e < x < e^2.$$

34. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

iii) Να αποδείξετε ότι

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, e\right) \cup (e, +\infty).$$

iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}.$$

Λύση

i) Αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η παράσταση $\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Δηλαδή, τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x - 1 \neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$x > 0 \quad \text{και} \quad \ln x \neq \ln e$$

και τελικά

$$x > 0 \quad \text{και} \quad x \neq e.$$

Επομένως,

$$A = (0, e) \cup (e, +\infty).$$

ii) Η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

ορίζεται για κάθε $x \in A$ και ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \in A.$$

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\ln \frac{1}{x} + 1}{\ln \frac{1}{x} - 1} \\ &= \frac{\ln 1 - \ln x + 1}{\ln 1 - \ln x - 1} \\ &= \frac{-\ln x + 1}{-\ln x - 1} \\ &= \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}} = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$$

$$\text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, e\right) \cup (e, +\infty).$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$$

$$\text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, e\right) \cup (e, +\infty).$$

iv) Η εξίσωση

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2}$$

ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$x \in A \text{ και } \frac{1}{x} \in A.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$$x \in (0, e) \cup (e, +\infty) \text{ και } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

Παρατήρηση

Η παράσταση $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ορίζεται σ' εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $\frac{1}{x} \in A$, δηλαδή

$$\frac{1}{x} > 0 \text{ και } \frac{1}{x} \neq e$$

ή ισοδύναμα

$$x > 0 \text{ και } x \neq \frac{1}{e}.$$

Παρατήρηση

Η παράσταση $\frac{1}{f(x)}$ ορίζεται σ' εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύουν

$$x \in A \text{ και } f(x) \neq 0$$

ή ισοδύναμα

$$x > 0 \text{ και } x \neq e \text{ και } x \neq \frac{1}{e}.$$

ή ισοδύναμα

$$x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup \left(\frac{1}{e}, e\right) \cup (e, +\infty).$$

Γι' αυτά τα x και αξιοποιώντας το ερώτημα **iii)** η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2f^2(x) + 2 = 5f(x)$$

$$\Leftrightarrow 2f^2(x) - 5f(x) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad f(x) = 2.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\bullet \quad f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\ln x + 2 = \ln x - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -3$$

$$\Leftrightarrow x = e^{-3}.$$

$$\bullet \quad f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = 2$$

$$\Leftrightarrow \ln x + 1 = 2\ln x - 2$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = e^3.$$

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$e^{-3} \text{ και } e^3.$$

35. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{4\ln 2 - \ln(x^2 - 9)}$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο.

iv) Να συγκρίνετε τους αριθμούς 1 και $f(4)$.

Λύση

i) Αναζητούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η παράσταση

$$\sqrt{4\ln 2 - \ln(x^2 - 9)}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Δηλαδή, τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$x^2 - 9 > 0 \quad \text{και} \quad 4\ln 2 - \ln(x^2 - 9) \geq 0.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\bullet \quad x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

και

$$\bullet \quad 4\ln 2 - \ln(x^2 - 9) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 - 9) \leq 4\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 9) \leq \ln 2^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 2^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-5, 5].$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο

$$A = [-5, -3) \cup (3, 5].$$

ii) Η εξίσωση

$$f(x) = 0$$

ορίζεται για κάθε

$$x \in A = [-5, -3) \cup (3, 5]$$

και γι' αυτά τα x ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} \sqrt{4\ln 2 - \ln(x^2 - 9)} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\ln 2 - \ln(x^2 - 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x^2 - 9) &= \ln 2^4 \\ \Leftrightarrow x^2 - 9 &= 2^4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow x &= \pm 5 \in A. \end{aligned}$$

iii) Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = \sqrt{4\ln 2 - \ln(x^2 - 9)} \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in A$$

και η ισότητα ισχύει για $x = \pm 5$. Άρα, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \pm 5$, το

$$f(\pm 5) = 0.$$

iv) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(4) &= \sqrt{4\ln 2 - \ln(16 - 9)} \\ &= \sqrt{\ln 2^4 - \ln 7} \\ &= \sqrt{\ln \frac{16}{7}}. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\frac{16}{7} < 2,3 < e.$$

Επομένως,

$$\ln \frac{16}{7} < \ln e = 1$$

και συνεπώς

$$\sqrt{\ln \frac{16}{7}} < \sqrt{1} = 1.$$

Δηλαδή,

$$f(4) < 1.$$

Προτεινόμενες Ασκήσεις

64. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x - 4).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0.$$

65. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log(x + 1).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 3.$$

66. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2e^{2x} - e^x + 2).$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- iii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 3x$.

67. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2\ln x, \quad x > 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$x^2 + \ln x < x.$$

68. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(\ln x)}}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < \frac{1}{\sqrt{\ln 2}}.$$

69. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x + x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = \ln|e^x + x - 1|.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .
- iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- iv) Να αποδείξετε ότι

$$g(x) = \begin{cases} \ln(e^x + x - 1), & x > 0 \\ \ln(1 - x - e^x), & x < 0. \end{cases}$$

70. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \ln(x-1) = 2\ln 3 \qquad \text{ii) } \ln x + \ln(2-x) = 0.$$

71. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \ln(x^2 - x) = 2\ln 2 + \ln(x-1) \qquad \text{ii) } \ln(x^2 - 1) + 2\ln 3 = \ln(18x - 17).$$

72. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i) } \log x + \log(x+1) = 2 - \log 5 \qquad \text{ii) } (\log x)^2 + 6 = 10\log \sqrt{x}.$$

73. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln\left(x + \frac{3}{x}\right) = 2\ln 2 + \ln x$

ii) $\frac{1}{2}\log(x-1) + \log\sqrt{x+2} = \log 2.$

74. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{\log x - 1}{\log x} + \frac{\log x + 3}{\log x + 1} = 2$

ii) $\log(2x) = \frac{\log 5}{\log x}.$

75. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln(2^x + 2) = 2x \ln 2$

ii) $\log(\log x - 1) = 0.$

76. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(10^x + 1) = \log 2 - x$

ii) $2\ln(x+2) + \ln x^2 = 0.$

77. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\ln(9 - 2^x) = (3 - x) \cdot \ln 2$

ii) $\ln(4 \cdot 3^x - 1) = (2x + 1) \cdot \ln 3.$

78. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $e^{1+\ln x} + e^{2\ln(x-1)} = 2e + 1$

ii) $\ln(2^x + 3^x) + \ln 9 = x \ln 3 + \ln 15$

iii) $x^{\log x - 1} = 100$

iv) $\frac{2}{\ln x} + \frac{1}{\ln x - 1} = 2.$

79. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log x = \ln x$

ii) $x^{1-\log x} = 0,01.$

80. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $2^x = 5$

ii) $3^x = 4^{3x-1}$

iii) $81^x + 8 = 9^{x+1}$

iv) $4e^{-x} = 4 - e^x.$

81. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

ii) $10^x - 3\sqrt{10^x} + 2 = 0.$

82. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log 2 + \log(x+1) = 1 + \log(2x-7) - \log(x-3)$

ii) $\frac{1}{2x} \log 3 + \log 6 = \log\left(27 - 3^{\frac{1}{x}}\right)$

iii) $\frac{\log(101-10^x)}{2-x} = 1.$

83. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\log(99 + \log(x-1)) = 2$

ii) $x^{\ln x} = e^2 x.$

84. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^{1+\ln x} = ex$

ii) $\frac{\ln \sqrt{x+3}}{\ln \sqrt[3]{x+1}} = 3.$

85. Να βρείτε τον θετικό αριθμό θ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\log_2 \theta + \log_4 \theta + \log_8 \theta = 11.$$

86. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση

$$\ln(2\eta\mu x) + \ln(2\sigma\upsilon\nu x) = 0.$$

87. i) Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε θετικούς αριθμούς α, β ισχύει η σχέση

$$\alpha^{\log \beta} = \beta^{\log \alpha}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$5^{\log x} = 50 - x^{\log 5}.$$

88. Δίνεται η εξίσωση

$$\ln x \cdot \ln ex = \kappa \quad \text{με} \quad \kappa \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της παραπάνω εξίσωσης για τις διάφορες τιμές του κ .

ii) Για $\kappa = 12$, να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

89. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \log x - \log y = 4 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ \ln x - \ln y = 1. \end{cases}$$

90. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 1. \end{cases}$$

91. Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{i)} \quad \begin{cases} \log(y - x) = 0 \\ 2^x \cdot 5^y = 10 \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 3^x + 8 \cdot 2^{-y} = 10. \end{cases}$$

92. Έστω οι αριθμοί $\alpha, \beta \in (1, +\infty)$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha^2 \geq 10\beta \quad \text{και} \quad \beta^2 \geq 10\alpha.$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad 2\log \alpha \geq 1 + \log \beta \geq 2\sqrt{\log \beta}$$

$$\text{ii)} \quad \log \alpha + \log \beta \geq 2$$

$$\text{iii)} \quad \log \alpha \cdot \log \beta \geq 1.$$

93. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad 2\sqrt{\log 11 \cdot \log 9} < \log 11 + \log 9 < 2 \quad \text{ii)} \quad \log 11 < \log_9 10.$$

94. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \frac{1}{\log_5 6} + \frac{1}{\log_7 6} < 2$$

$$\text{ii)} \quad \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log \pi} > 4.$$

95. Να αποδείξετε ότι

$$\text{i)} \quad 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

ii) αν α, β είναι δύο θετικοί αριθμοί τέτοιои, ώστε $\alpha\beta = 100$, τότε ισχύει η σχέση

$$(\log \alpha)^2 + (\log \beta)^2 \geq 2.$$

96. Έστω α, β δύο πραγματικοί τέτοιοι, ώστε

$$\alpha > 2 \quad \text{και} \quad \beta > 2.$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$

ii) $\ln(\alpha + \beta) < \ln \alpha + \ln \beta.$

97. Να αποδείξετε ότι

$$2 \log(1 + \alpha^3) < 3 \log(1 + \alpha^2) \quad \text{για κάθε} \quad \alpha > 0.$$

98. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $7^x > 8$

ii) $2^x < 3^{x-1}.$

99. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\log(3x - 5) > 1$

ii) $\ln(2x - 3) < 0.$

100. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\log^2 x > \log x + 2$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\ln(x-1)} > 1.$

101. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $(\log x)^2 < \log x$

ii) $\log(9 - x^2) < \log 8x.$

102. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\ln^2 x \geq \ln x + 2$

ii) $\left(\frac{x}{e}\right)^{\ln x - 2} < e^2.$

103. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha > 0$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - (1 + \log \alpha)x + \log \alpha = 0$$

έχει δύο ρίζες τέτοιες, ώστε η μία να είναι διπλάσια της άλλης.

104. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln(4-x)$ ii) $f(x) = \ln(2^x - 16)$.

105. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.
- iii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

106. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}, \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
 $g(x) = \ln f(x), \quad x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
είναι σταθερή.
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

107. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι
 $f(1) + f(2) + \dots + f(99) = \ln 100$.

108. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{\ln^2 x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

109. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3\sqrt{\log x} - \log \frac{1}{x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 4.$$

110. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x \ln x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2\sqrt{x}.$$

111. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3\ln x^2 - \ln^2(-x)$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 9.$$

112. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x+2) + f(x) = 0.$$

113. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right),$$

όπου α σταθερός πραγματικός αριθμός. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε:

- i) να βρείτε την τιμή του a
- ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$
- iii) να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \ln 2.$$

114. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log x + \log(x^2 - 4x + 4).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$.
- iii) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 2 - \log \frac{100}{3}.$$

115. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2 + e^{-x}).$$

Να βρείτε:

- i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii) τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία

$$y = x.$$

116. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln x \cdot (\ln x + a) \quad \text{για κάθε } x > 0,$$

όπου a σταθερός πραγματικός αριθμός.

- i) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο με τετμημένη e^2 , να βρείτε την τιμή του a .
- ii) Για $a = -2$, να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = -1.$$

117. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln^4 x + \ln^2 x \cdot (\alpha - 2 \ln x), \quad x > 0$$

και το σημείο $M(e^2, 4)$ το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση της f .

i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (\ln^2 x - \ln x)^2 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$.

118. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \frac{x}{1+x}.$$

i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $y \in B$ η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μοναδική λύση την

$$x = g(y).$$

iii) Να αποδείξετε ότι

$$f(g(y)) = y \quad \text{για κάθε } y \in B.$$

119. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + 2 \ln^2 \alpha \cdot x^3 - 3 \ln \alpha \cdot x^2 + x - 1,$$

όπου α σταθερός θετικός αριθμός.

i) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.

ii) Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα i) να βρείτε:

α) το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 3)$

β) τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 7x - 1$.

120. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x + x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{1}{\ln(1-x)}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .
- iv) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

121. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
- ii) για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση

$$f(x) = y$$

έχει μοναδική ρίζα

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

122. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \frac{4 - 2^x}{4 + 2^x}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $f(1)$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2\ln 3 = \ln 7$.

123. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 4e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \frac{x-1}{4}, \quad x \in (1, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g
- iii) οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

124. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1, \quad x > 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι:
 - α) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα
 - β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 0.$$

125. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0.$$

126. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(\log \frac{11x}{x+1} \right).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) > 0.$$

127. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2 - e^x).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iv) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .
- v) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = x.$$

128. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(25^x + 5) - x \ln 5 - \ln 6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,0)$.
- ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 0.$$

129. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\ln x).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - ii) Να λύσετε την εξίσωση
- $$f(x) = 0.$$
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - iv) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e^2)$ και $f(e^e)$.
 - v) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις

$$\ln 2 < f(x) < 1.$$

130. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x^{\ln \sqrt{x}}}, \quad x > 0.$$

- i) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.
- ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = e$.

131. Δίνεται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x)$$

και

$$g(x) = \ln(e^x - 1).$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ορίζονται οι παραπάνω συναρτήσεις.
- ii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινά σημεία.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < 2g(x) + \ln 2.$$

132. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(2 - \ln x).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 0.$$

- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < \ln 5 - \ln 2.$$

133. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(\ln x) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(\ln x^3 - 2)$$

- i) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) + g(x) = 0.$$

- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x) < g(x).$$

134. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{\ln x} - \frac{1}{2}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \frac{1}{2}$.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln \sqrt{x}$.

135. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\sin x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- ii) δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f που να βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$
- iii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

136. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (x-1)\ln x, \quad x > 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

137. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x \cdot \ln x^2.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι
$$f(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in A.$$
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.
- iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(\eta\mu x) = \frac{1}{4}f(2), \quad x \in (0, \pi).$

138. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(\eta\mu x), \quad x \in (0, \pi).$$

- i) Να αποδείξετε ότι
$$f(x) \leq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (0, \pi).$$
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $4f^2(x) = \ln(\eta\mu^2 x).$

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Να δώσετε τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης με βάση a .
2. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης με βάση a , όταν $0 < a < 1$.
3. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τη μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης με βάση a , όταν $a > 1$.
4. Να δώσετε τον ορισμό του $\log_a \theta$.
5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$ με $a \neq 1$ και για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει

$$\log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$
6. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a > 0$ με $a \neq 1$ και για κάθε $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta.$$
7. Να αναφέρετε τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων.
8. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log x$.
9. Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τη μονοτονία της λογαριθμικής συνάρτησης

$$f(x) = \ln x.$$

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $a > 1$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
2. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ με $0 < a < 1$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
3. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = a^x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Σ Λ

4. Ο αριθμός e είναι ρητός Σ Λ
5. Ισχύει η ισοδυναμία $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \log \theta$. Σ Λ
6. Ισχύει η ισότητα $\log 1 = 0$. Σ Λ
7. Ισχύει η ισότητα $\ln 1 = 0$. Σ Λ
8. Ισχύει η ισότητα $\ln 10 = 1$. Σ Λ
9. Ισχύει η ισότητα $\ln e = 1$. Σ Λ
10. Για κάθε $\theta > 0$ ισχύει η σχέση $\theta = e^{\ln \theta}$. Σ Λ
11. Για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει $\log(\theta_1 + \theta_2) = \log \theta_1 + \log \theta_2$. Σ Λ
12. Για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει $\ln \frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$. Σ Λ
13. Για κάθε $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει $\log \theta^\kappa = (\log \theta)^\kappa$. Σ Λ
14. Αν $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει $\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$ Σ Λ
15. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Σ Λ
16. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$. Σ Λ
17. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ Λ
18. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
 $y = \ln x$ και $y = e^x$
είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy
και $x'Oy'$. Σ Λ

Διαγώνισμα 1

Θέμα 1

- A1.** Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει
- $$\log_a(\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2.$$
- A2.** Έστω $a > 0$ με $a \neq 1$ και $\theta > 0$. Τι ονομάζουμε λογάριθμο του θ ως προς βάση a ;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Κάθε εκθετική συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ των θετικών πραγματικών αριθμών.
- β)** Η γραφική παράσταση κάθε εκθετικής συνάρτησης τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, 1)$.
- γ)** Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.
- δ)** Για κάθε $a > 0$ με $a \neq 1$ ισχύει $\log_a a = 0$.
- ε)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα Oy' .

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = 4^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(x) = 2^x - \frac{1}{4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- B1.** Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- B2.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A .
- B3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - e^x}}.$$

- Γ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- Γ3.** Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(e^x - 1)$$

και

$$g(x) = \ln x^2.$$

- Δ1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- Δ2.** Να λύσετε τις ανισώσεις:
- α)** $f(x) > 0$
- β)** $g(x) < 0$.
- Δ3.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$f(\ln 3) \quad \text{και} \quad g\left(\frac{2}{e}\right).$$

- Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση

$$f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1}).$$

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

- A1.** Αν $a > 0$ με $a \neq 1$, να αποδείξετε ότι για κάθε $\theta > 0$ και για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\log_a \theta^\kappa = \kappa \log_a \theta.$$

- A2.** Έστω ένας αριθμός $a > 0$ με $a \neq 1$. Ποιά συνάρτηση ορίζουμε ως εκθετική με βάση a ;

- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $\theta > 0$, τότε

$$\ln \theta = x \Leftrightarrow \theta = e^x.$$

γ) Για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει η σχέση

$$\log \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\log \theta_1}{\log \theta_2}.$$

δ) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = e^x \quad \text{και} \quad g(x) = \ln x.$$

είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία
 $y = x$.

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \log x, \quad x \in (0, +\infty)$$

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

B2. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(2x) \leq 11$$

B3. Να λύσετε την εξίσωση

$$(f(x))^2 - f(x^2) = 3 + 2x \log x.$$

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{2e^x + \alpha} \right)$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο

$$A(\ln 9, \ln 16 - \ln 5).$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 7$.

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Γ3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^x} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}.$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

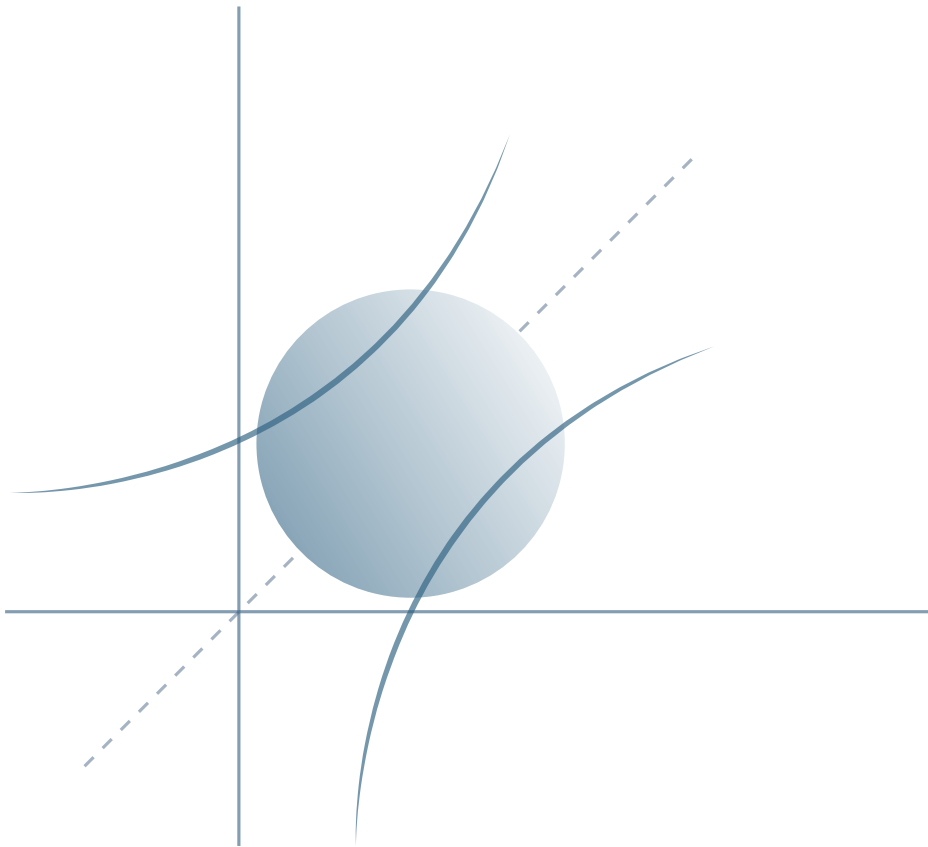
Δ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν δύο κοινά σημεία.

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία με

$$\text{εξίσωση } y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ασκήσεις για Επανάληψη





*«Η μουσική είναι μαθηματικά με ήχο,
τα μαθηματικά είναι βουβή μουσική.»*

Edward Herriot

1. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} (a+1)x + y = a^2 + a \\ ax + y = a^2 + 1, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) .
- ii) Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το άθροισμα

$$x^2 + y^2$$

γίνεται ελάχιστο.

2. Δίνονται τα συστήματα

$$\begin{cases} \lambda x + (1-\lambda)y = 1 \\ (1+\lambda)x + \lambda^2 y = \lambda \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} 4x + \lambda^2 y = 5\lambda - 8 \\ (\lambda-1)x + (\lambda+1)y = 6, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- i) Αν είναι D και D' οι αντίστοιχες ορίζουσες των παραπάνω συστημάτων, να υπολογίσετε το άθροισμα $D + D'$.
- ii) Να αποδείξετε ότι ένα τουλάχιστον από τα παραπάνω συστήματα έχει μοναδική λύση.
- iii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση

$$D + D' = 1,$$

να αποδείξετε ότι τα παραπάνω συστήματα είναι ισοδύναμα.

3. Έστω ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y για το οποίο ισχύει η σχέση

$$D_x^2 + D_y^2 = 2D(D_x - D_y - D).$$

Αν είναι $D_x \neq D_y$, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση
- ii) να βρείτε τη λύση του συστήματος.

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 5|x-2| + 3x + 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$
- ii) η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο μόνο στο $x_0 = 1$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = g(x).$$

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4x + 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f στη μορφή

$$f(x) = (x-p)^2 + q, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να βρείτε με ποια οριζόντια και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Θεωρούμε και τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = 2 + x + f(f(x)) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2 - g(x)) > 0$.

8. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και τέτοια, ώστε

$$f(f(x)) - f(x) = -\frac{x}{4} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι:
 - α) η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - β) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $4f(x-1) > x-1$.

9. Δίνεται η εξίσωση

$$2\alpha\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + 2\beta\sigma\upsilon\nu^2\chi = \beta + \gamma$$

όπου α, β, γ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί, η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς

$$\frac{\pi}{2} \text{ και } \frac{\pi}{4}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \gamma = -\beta$.
- ii) Αν ο αριθμός π δεν είναι λύση της δοθείσας εξίσωσης, τότε:
 - α) να αποδείξετε ότι $\beta \neq 0$
 - β) να λύσετε τη δοθείσα εξίσωση.

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu^3x + 2\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu^3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{όπου } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.
- ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M(1, 2)$.

12. Για κάποια γωνία $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει η σχέση $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = -\frac{7}{8}$.

- i) Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\alpha$.
- ii) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \varepsilon\varphi^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- iii) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ έχει λύση.

13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 3\eta\mu x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

- i) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
- ii) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .
- iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 1$.
- iv) Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{7\pi}{10}\right)$ και $f\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha + \beta \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(0, 4)$ και $B\left(\frac{\pi}{2}, -8\right)$ τότε:

- i) να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 6$
- ii) να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f
- iii) να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = 1$, στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

16. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (\alpha\beta + 2)\eta\mu(\beta x), \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$.

Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή -3 και περίοδο 4, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$
- ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$
- iii) να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$.

17. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 5\eta\mu(\pi - 2x) + 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

με $x \in [0, \pi]$.

- i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4\eta\mu 2x$, $x \in [0, \pi]$.
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.
- iii) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να λύσετε την ανίσωση $2 + f(x) < 0$.

18. Έστω γωνία $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια, ώστε

$$4\epsilon\phi^2 2\alpha - 5\epsilon\phi 2\alpha - 6 = 0.$$

- i) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

ii) Να υπολογίσετε την εφα.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$(2 + \sqrt{3})\eta\mu(x + \alpha) = -\eta\mu(x - \alpha).$$

19. i) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \eta\mu 2x}{1 + \eta\mu 2x}.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$1 - \eta\mu 2x = \sigma\phi^2 x (1 + \eta\mu 2x).$$

20. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 5x^4 + 62x^3 + 26x^2 + 29x + \alpha$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 12$.

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα i), να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

21. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 + 1.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$.
- ii) Να βρείτε την τιμή του $a > 0$ έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^2 - ax + 1$.
- iii) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x)$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων δευτέρου βαθμού.

22. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^{100} + ax + \beta$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x - 1$.

- i) Να αποδείξετε ότι $a + \beta = -1$.
- ii) Να βρείτε τους a και β έτσι, ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να διαιρείται με το πολυώνυμο $(x - 1)^2$.
- iii) Για $a = -100$ και $\beta = 99$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης

$$P(x) : (x - 1)^2$$

- iv) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $v \in \mathbb{N}^*$ για την οποία η διαίρεση

$$P(x) : (x - 1)^v$$

είναι τέλεια.

23. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ το οποίο διαιρούμενο με το x δίνει υπόλοιπο 2 και διαιρούμενο με το $x - a$ δίνει πηλίκο $x^2 + 5x$.

- i) Να αποδείξετε ότι $P(a) = 2$.
- ii) Να αποδείξετε ότι

$$P(x) = x^3 + (5 - a)x^2 - 5ax + 2.$$

- iii) Αν επιπλέον το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το $x - \beta$ δίνει πηλίκο $x^2 + x - 8$, τότε:

- α) να αποδείξετε ότι $P(\beta) = 2 - 8\beta$
- β) να βρείτε τις τιμές των a και β
- γ) να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

- 24.** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (3 - 2a)x - 2\beta$$

με $a, \beta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα τον αριθμό 2.

i) Να βρείτε τον αριθμό β .

ii) Αν επιπλέον το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς ρ_1, ρ_2 με

$$\rho_1 < 2 < \rho_2 \quad \text{και} \quad \rho_1 + \rho_2 = 4,$$

τότε:

α) να βρείτε τον αριθμό a

β) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

- 25.** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 4x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2.$$

i) Να βρείτε τους $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει η ισότητα

$$P(x) = (ax^2 + x - \beta)^2 + (ax + \gamma)^2.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

- 26.** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = -x^4 + x^3 + 4x^2 + ax + \beta, \quad \text{με} \quad a, \beta \in \mathbb{R}.$$

i) Να εκτελέσετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - x + 1)$

και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης αυτής.

ii) Να βρείτε τους αριθμούς a και β , έτσι ώστε το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεσης να είναι το πολυώνυμο $u(x) = 2x - 3$.

iii) Για $a = -3$ και $\beta = 2$, να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) > (2x - 3)(x^2 - x + 2).$$

- 27.** Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (x - 2)^{2v} - (x - 1)^{2v} + 2x^2 - x - 3$$

και

$$Q(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$$

όπου v θετικός ακέραιος αριθμός.

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρείται από το πολυώνυμο $x - 2$.

- ii) Να γράψετε το πολυώνυμο $Q(x)$ ως γινόμενο τριών πρωτοβάθμιων παραγόντων της μορφής $x - \rho$.
- iii) Να αποδείξετε ότι μόνο ένας από τους τρεις παράγοντες του $Q(x)$ είναι παράγοντας και του πολυωνύμου $P(x)$.
- iv) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$.

28. Έστω η πολωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = ax^3 + ax^2 - (5\beta + 1)x + (\beta - 5)$$

με α, β ακέραιους αριθμούς και τέτοια, ώστε η γραφική της παράσταση να διέρχεται από το σημείο $A(-1, 8)$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\beta = 2$.
- ii) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) = 0$, να βρείτε:
 - α) τον αριθμό α
 - β) τα διαστήματα του $\mathbb{R}$ στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

29. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + (\eta\mu\beta) \cdot x + 2 + \sigma\upsilon\nu\beta$$

το οποίο έχει θετικούς ακέραιους συντελεστές.

- i) Να αποδείξετε ότι $P(0) = 2$.
- ii) Να αποδείξετε ότι $P(-3) \cdot P(-4) \cdot P(-5) \neq 0$.
- iii) Αν η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ακέραια ρίζα ρ , τότε:
 - α) να βρείτε το ρ και το α
 - β) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

30. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{\alpha + x} - \sqrt{\alpha - x}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $P(4, 2)$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$.
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και περιττή.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2$.

- 31.** Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + 2\alpha + 4,$$

το οποίο έχει παράγοντες τα πολυώνυμα $x - 1$ και $x - 2$.

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$.

- 32.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2^x + 2^{-x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) \geq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

- ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = 4\sin^2 x - 2.$$

- 33.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = e^x + e^{-x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f , το οποίο να βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.
- iii) Να λύσετε τη εξίσωση

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

- 34.** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x + x + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2e^{-x} + x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2 - 3x) < 2.$$

35. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{ax} - 2^x - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$.

- i) Να αποδείξετε ότι $a = 1$
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} + x^2 > 2 + 2^{-x^2}.$$

36. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε

$$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad g(x) = (2 - f(1))^x \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, τότε:

- i) Να αποδείξετε ότι:
 - α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
 - β) $g(x) > f(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.
- ii) Αν επιπλέον $f(1) = \frac{3}{2}$, να λύσετε:
 - α) την εξίσωση $3^x (g(x) + g(x-3)) = 4$
 - β) την ανίσωση $f(3 - 2f(x)) < 1$.

37. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(ex + 1).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x) < f(x+1)$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(1 + \eta\mu 2x) = f(1 + \sigma\upsilon\nu x)$.

38. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x-1).$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(e^x) + f(e^x - 2) = 3 \ln 2$$

iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$f(e^x + e^2 + 1) - f(e^x + 1) \geq \ln 2.$$

39. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (\ln a + 5)x^2 + (5 \ln a + 6)x - 6 \ln a \quad \text{με} \quad a > 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$.

ii) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0.$$

iv) Να βρείτε την τιμή του a έτσι, ώστε

$$P(1) = 0.$$

40. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{2} \eta \mu x \right).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών

ii) $-\ln 2 \leq f(x) \leq \ln 3 - \ln 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) η συνάρτηση f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

41. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\log x + 1}{\log x - 1}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

ii) Να συγκρίνετε τις τιμές $f(100)$ και $f(1000)$.

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$ ισχύει $x_1 = x_2$.

iv) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(4x - 20) = 3.$$

42. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x \ln \sqrt{2^{x-1}}.$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2$.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

43. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 7x^3 - 2ax^2 - 3a \quad \text{με} \quad a \in \mathbb{R}$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x - 3$.

- i) Να αποδείξετε ότι $a = 9$.
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.
- iii) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{(\ln^2 x + 2)^3}{2(\ln^2 x + 2)^2 + 3} = \frac{9}{7}.$$

44. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(3 - \sqrt{e^x + 3}).$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

45. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log(5^x + x - 1) + x \log 2.$$

- i) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = (0, +\infty)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- iii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 26 + 2 \log 2$.
- iv) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $y = x$.

46. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \varepsilon \phi x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{και} \quad g(x) = (x-1) \ln x, \quad x \in (0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

ii) $\eta \mu^2 x < \sigma \nu \nu^2 x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

iii) η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

iv) $\sigma \nu \nu^2 x \cdot \ln(\eta \mu x) < \eta \mu^2 x \ln(\sigma \nu \nu x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

47. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{3^x - 2}{3^x - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln \left(\frac{2 \cdot 3^x - 3}{3^{2x} - 3^x} \right).$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το σύνολο

$$A_g = (-\infty, 0) \cup \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty\right).$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e^{g(x)}$.

48. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (\log x)^{8\alpha} + 4 \log \frac{10}{x} \cdot (\log x)^{4\alpha}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(100, 0)$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \frac{1}{2}$

ii) η συνάρτηση $f(x)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x) = (\log^2 x - 2 \log x)^2, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

iii) η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει με τον άξονα $x'x$ και δεύτερο κοινό σημείο.

49. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 2x^3 + 3ax^2 - x - 2,$$

όπου a ακέραιος αριθμός και η συνάρτηση

$$f(x) = \ln P(x).$$

Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ακέραια ρίζα p , τότε:

- i) να υπολογίσετε τις τιμές των ακέραιων αριθμών a και p .
- ii) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- iii) να λύσετε την εξίσωση

$$f(x) = \ln(x-2) + \ln(x^2+13).$$

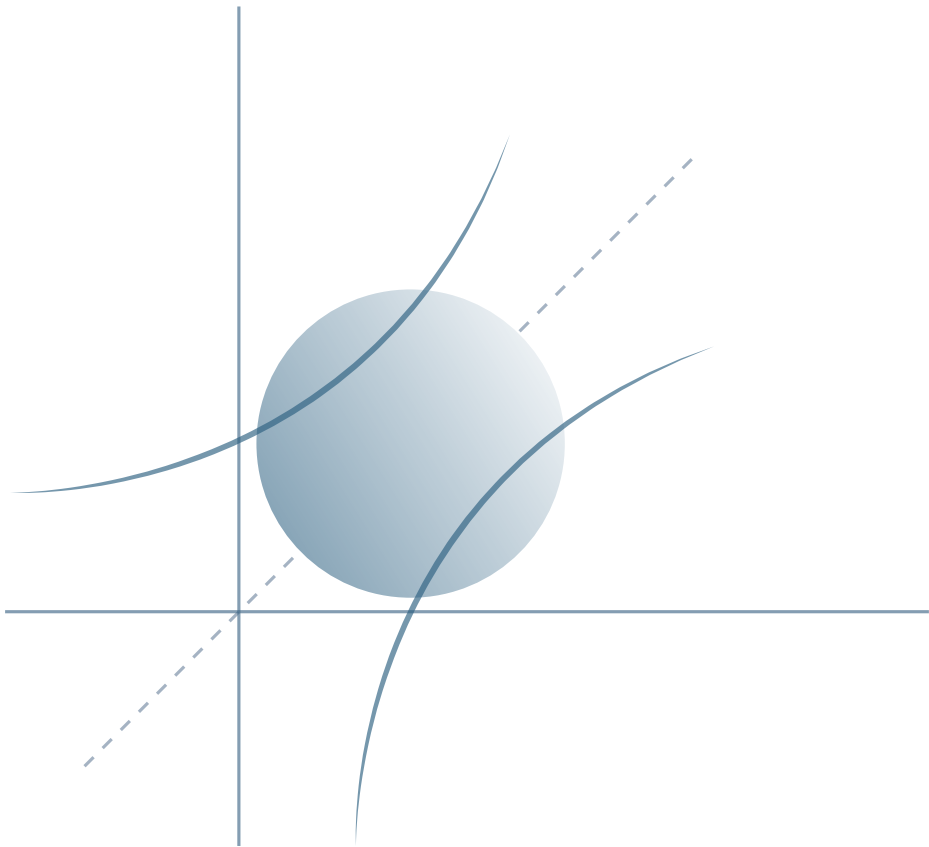
50. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \ln(1 + \eta\mu^2 x) + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f
- iii) $(1 + \eta\mu^2 x) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) = \frac{9}{4} - \left(\eta\mu^2 x - \frac{1}{2}\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- iv) $f(x) \leq 2 \ln \frac{3}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- v) ο αριθμός $2 \ln \frac{3}{2}$ είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f .

Απαντήσεις





*«Η Άλγεβρα είναι η μεταφυσική
της Αριθμητικής.»*

John Ray

Συστήματα

Γραμμικά Συστήματα

1. i) Μοναδική λύση $(x, y) = (2, 5)$
 ii) Μοναδική λύση $(x, y) = (3, -4)$

2. i) Μοναδική λύση $(x, y) = (1, 0)$
 ii) Μοναδική λύση $(x, y) = (-6, 8)$.

3. i) Αδύνατο
 ii) Άπειρες λύσεις της μορφής
 $(x, y) = (\kappa, 2\kappa - 8), \kappa \in \mathbb{R}$.

4. i) Μοναδική λύση
 $(x, y) = (-2, 3)$.
 ii) Αδύνατο.

5. i) Μοναδική λύση
 $(x, y) = (5, -1)$.
 ii) Άπειρες λύσεις της μορφής
 $(x, y) = (\kappa, 2\kappa - 1), \kappa \in \mathbb{R}$.

6. i) Μοναδική λύση $(x, y) = (\sqrt{2}, 1)$.
 ii) Μοναδική λύση $(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{5})$.

7. $x = 2$ και $y = 1$.

8. i) Μοναδική λύση
 $(x, y, \omega) = (1, 4, -2)$
 ii) Μοναδική λύση
 $(x, y, \omega) = (-3, 0, 5)$.

9. i) Αδύνατο.
 ii) Άπειρες λύσεις της μορφής
 $(x, y, \omega) = (\kappa + 1, 2\kappa - 3, \kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

10. i) $(x, y, \omega) = (2, 3, 5)$
 ii) Αδύνατο.

11. Μοναδική λύση
 $(x, y, \omega) = (60, 150, 240)$.

12. Θέτουμε

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{\omega-3}{4} = \lambda$$
 οπότε έχουμε
 $x = 2\lambda + 1, y = 3\lambda + 2$ και $\omega = 4\lambda + 3$.
 Αντικαθιστώντας στην εξίσωση
 $x + y + \omega = 15$
 βρίσκουμε
 $\lambda = 1$.
 Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση
 $(x, y, \omega) = (3, 5, 7)$.

13. $x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = -\frac{1}{2}$.

14. i) • Αν $\lambda \neq 10$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = \left(\frac{3-2\lambda}{\lambda-10}, \frac{\lambda^2-15}{\lambda-10} \right)$$
.
 • Αν $\lambda = 10$, το σύστημα είναι αδύνατο.
 ii) • Αν $\lambda \neq \pm 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = \left(\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda}, \frac{-\lambda}{1+\lambda} \right)$$
.
 • Αν $\lambda = -1$, το σύστημα είναι αδύνατο.
 • Αν $\lambda = 1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής
 $(x, y) = (\kappa, 1-\kappa), \kappa \in \mathbb{R}$.

15. i) • Αν $\lambda \neq \pm 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = \left(\frac{\lambda(\lambda^2 + \lambda + 1)}{\lambda + 1}, \frac{\lambda^2}{\lambda + 1} \right).$$

- Αν $\lambda = -1$, το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda = 1$, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y) = (\kappa + 1, \kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\mu^2 + \mu + 1}, \frac{-\mu^2 - 1}{\mu^2 + \mu + 1} \right).$$

16. i) Μοναδική λύση
(άρτιος – περιττός $\neq 0$)

ii) Μοναδική λύση
($\sqrt{2}$ άρρητος)

17. i) Μοναδική λύση
 $x = \frac{\lambda^2 - \lambda}{\lambda^2 - \lambda + 1}, y = \frac{-\lambda}{\lambda^2 - \lambda + 1}$
για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αδύνατο, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

18. i) • Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 3$, το σύστημα έχει μοναδική λύση
 $x = \frac{1 - 3\lambda}{(\lambda - 1)(\lambda - 3)}$ και $y = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 3}$.

- Αν $\lambda = 1$, το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $\lambda = 3$, το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 - \mu \\ \mu & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - \mu(2 - \mu) \\ &= \lambda^2 + 1 - 2\mu + \mu^2 = \lambda^2 + (\mu - 1)^2, \\ D_x &= \begin{vmatrix} 0 & 2 - \mu \\ 1 & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = 0 - (2 - \mu) = \mu - 2, \end{aligned}$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- Αν $\lambda^2 + (\mu - 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \neq (0, 1)$, τότε $D \neq 0$ οπότε, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\mu - 2}{\lambda^2 + (\mu - 1)^2},$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{\lambda^2 + (\mu - 1)^2}.$$

- Αν $\lambda^2 + (\mu - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda, \mu) = (0, 1)$, τότε το σύστημα γίνεται
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

19. Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς ω και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο. Έχουμε τελικά:

- Αν $\lambda \neq 2$, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$x = \frac{3}{6\lambda - 12}, y = \frac{5\lambda - 12}{6\lambda - 12}, \omega = \frac{5\lambda - 9}{6\lambda - 12}.$$

- Αν $\lambda = 2$, το σύστημα είναι αδύνατο.

20. i) Το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών είναι γραμμικό 2×2 με ορίζουσα

$$D = 1 + a^2 \neq 0 \text{ για κάθε } a \in \mathbb{R}.$$

Άρα, το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

ii) Το σημείο τομής των δύο ευθειών είναι

$$M \left(\frac{2a}{1 + a^2}, \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \right).$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{2a}{1 + a^2} &= 1 \Leftrightarrow 2a = 1 + a^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$M(1, 0).$$

21. i) • Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο

$$M\left(\frac{4-\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha+2}{\alpha-1}\right).$$

- Αν $\alpha = 0$, οι ευθείες συμπίπτουν.
 - Αν $\alpha = 1$, οι ευθείες είναι παράλληλες.
- ii) Ας υποθέσουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι το σημείο

$$M\left(\frac{4-\alpha}{\alpha-1}, \frac{\alpha+2}{\alpha-1}\right)$$

ανήκει στην ευθεία $y = x$. Οπότε θα ισχύει

$$\frac{\alpha+2}{\alpha-1} = \frac{4-\alpha}{\alpha-1}$$

$\Leftrightarrow \alpha + 2 = 4 - \alpha$ και $\alpha \neq 0, 1$
που είναι αδύνατον.

22. i) $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ και $\lambda_2 = -\frac{\alpha}{12}$.

- ii) Καταρχάς πρέπει

$$\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = -\frac{\alpha}{12} \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

Οπότε,

$$\varepsilon_1 : x + 3y = 4$$

και

$$\varepsilon_2 : 4x + 12y = \beta \Leftrightarrow x + 3y = \frac{\beta}{4}.$$

Άρα, οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) συμπίπτουν αν και μόνο αν

$$\alpha = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\beta}{4} = 4 \Leftrightarrow \beta = 16.$$

23. i) $\varepsilon_1 : y = x + 1$

και

$$\varepsilon_2 : y = 2x - 4.$$

- ii) $M(5, 6)$.

24. $\rho_1 = 5, \rho_2 = 2$ και $\rho_3 = 3$.

25. $\lambda = 2$.

26. i) $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$

- ii) $(x, y) = (1 + \kappa, \kappa)$ με $\kappa \in \mathbb{R}$.

27. Αν το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τότε ισχύει

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 2 & 1-\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \beta + 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta = 2\alpha.$$

Οπότε, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x - \alpha y = 1 \\ 2x - 2\alpha y = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \alpha y = 1 \\ x - \alpha y = \alpha \end{cases}$$

και έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $\alpha = 1$. Τελικά, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

28. $\lambda = 2$ και $\mu = 4$.

29. $\kappa = -3$ και $\lambda = -\frac{4}{3}$.

30. i) Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $(x, y) = (0, 0)$

αποτελεί λύση του συστήματος για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ii) Το σύστημα είναι γραμμικό 2×2 και έχει δύο τουλάχιστον λύσεις, τα ζεύγη $(0, 0)$ και (x_1, y_1) . Επομένως, έχει άπειρες λύσεις και συνεπώς

$$D = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda - 5) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = 3.$$

- Αν $\lambda = 2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (\kappa, \kappa) \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

- Αν $\lambda = 3$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Δηλαδή, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = \left(\kappa, \frac{3}{2}\kappa \right) \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η ζητούμενη τιμή του λ είναι $\lambda = 3$.

31. i) Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 \neq 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Είναι

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda^2 - 2\lambda & -1 \\ 2\lambda^2 + \lambda & \lambda \end{vmatrix} \\ = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda) + (2\lambda^2 + \lambda) = \lambda^3 + \lambda$$

και

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 - 2\lambda \\ 1 & 2\lambda^2 + \lambda \end{vmatrix} \\ = \lambda(2\lambda^2 + \lambda) - (\lambda^2 - 2\lambda) = 2\lambda^3 + 2\lambda.$$

Οπότε,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda^3 + \lambda}{\lambda^2 + 1} = \frac{\lambda(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2 + 1} = \lambda$$

και

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2\lambda^3 + 2\lambda}{\lambda^2 + 1} = \frac{2\lambda(\lambda^2 + 1)}{\lambda^2 + 1} = 2\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι $y = 2x$. Άρα, το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x$ η οποία διέρχεται, προφανώς, από την αρχή των αξόνων.

32. Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 2×2 με ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4) + 4 \\ = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

- Αν $\lambda \neq 2$, τότε $D \neq 0$ οπότε, το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- Αν $\lambda = 2$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x - y = 8 - \alpha \\ 4x - 2y = 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 8 - \alpha \\ 2x - y = \alpha \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι αν $8 - \alpha \neq \alpha$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο ενώ αν

$$8 - \alpha = \alpha \Leftrightarrow 8 = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το αρχικό σύστημα έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\alpha = 4$.

33. Πρόκειται για γραμμικό σύστημα 2×2 με ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \beta.$$

- Αν $\beta \neq 1$, τότε $D \neq 0$ οπότε, το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- Αν $\beta = 1$, τότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} x + y = \gamma^2 \\ x + y = 2\gamma - \alpha \end{cases}$$

και έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν

$$\gamma^2 = 2\gamma - \alpha \Leftrightarrow \gamma^2 - 2\gamma + \alpha = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύση ως προς γ αν και μόνο αν

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 4\alpha \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4 - 4\alpha \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4\alpha \leq 4 \\ \Leftrightarrow \alpha \leq 1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ακριβώς όταν $\alpha \leq 1$, τότε για κάθε β υπάρχει τουλάχιστον ένα γ ώστε το αρχικό σύστημα να έχει μία τουλάχιστον λύση.

34. i) $\alpha = -2$, $\beta = -2$ και $\gamma = 4$.

ii) $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right).$

35. i) Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$. Επομένως,

$$\alpha > 0 \text{ και } -\frac{\beta}{2\alpha} = -1 \Leftrightarrow \beta = 2\alpha.$$

ii) $x = -3$ ή $x = 1$.

iii) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ και $\gamma = -\frac{3}{2}$.

36. i) $\lambda = 1$.

ii) Το σύστημα είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$x + y = 1.$$

Επομένως,

$$x_1 + y_1 = 1$$

και

$$x_2 + y_2 = 1.$$

Άρα,

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 2.$$

37. Το σύστημα έχει μοναδική λύση και επομένως $D \neq 0$. Οπότε, από τις δοθείσες ισότητες διαιρώντας με D , προκύπτει

$$x + y = 4 \text{ και } 2x + 3y = 5$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y = 4 - x$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτει

$$2x + 3(4 - x) = 5 \Leftrightarrow 2x + 12 - 3x = 5$$

$$\Leftrightarrow -x = -7$$

$$\Leftrightarrow x = 7.$$

Επομένως,

$$(x, y) = (7, -3).$$

38. i) Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$(D_x - 2D_y)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow D_x = 2D_y$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_x}{D} = 2 \frac{D_y}{D}$$

$$\Leftrightarrow x = 2y.$$

ii) $x = 8$ και $y = 4$.

39. Η δοθείσα σχέση γράφεται:

$$(D_x - D)^2 + D_y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow D_x - D = 0 \text{ και } D_y = 0$$

$$\Leftrightarrow D_x = D \text{ και } D_y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{D_x}{D} = 1 \text{ και } \frac{D_y}{D} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = 0.$$

40. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $D \neq 0$. Προς τούτο, υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι $D = 0$. Αντικαθιστώντας στη δοθείσα σχέση έχουμε

$$D_x^2 + D_y^2 \leq 0$$

δηλαδή,

$$D_x^2 + D_y^2 = 0$$

και τελικά

$$D_x = D_y = 0$$

πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Επομένως, $D \neq 0$.

ii) Από τη δοθείσα σχέση, διαιρώντας με $D^2 > 0$, έχουμε

$$\frac{D_x^2}{D^2} + \frac{D_y^2}{D^2} + \frac{13D^2}{D^2} \leq \frac{2D(2D_x - 3D_y)}{D^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{D_x}{D}\right)^2 + \left(\frac{D_y}{D}\right)^2 + 13$$

$$\leq 2\left(2\frac{D_x}{D} - 3\frac{D_y}{D}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 13 \leq 4x - 6y$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ και } y = -3.$$

41. i) $D_x = 0, D_y = 1$ και $D = 1$.

ii) $(x, y) = (0, 1)$.

Μη Γραμμικά Συστήματα

42. i) $(x, y) = (2, 1)$

ii) $(x, y) = (3, -2)$ ή $(x, y) = (-3, 2)$.

43. i) $(x, y) = (-1, 2)$ ή $(x, y) = (2, 8)$
 ii) $(x, y) = (1, 2)$ ή $(x, y) = (2, 1)$.
44. i) $(x, y) = (1, 2)$ ή $(-1, -2)$ ή $(2, 1)$
 ή $(-2, -1)$.
 ii) $(x, y) = (\sqrt{13}, 2)$ ή $(-\sqrt{13}, 2)$
 ή $(5, 4)$ ή $(-5, 4)$.
45. i) $(x, y) = (-2, 4)$ ή $(x, y) = (4, -2)$.
 ii) $(x, y) = (1, 4)$ ή $(x, y) = (4, 1)$.
46. i) $(x, y) = (-1, 5)$ ή $(x, y) = (5, -1)$
 ii) $(x, y) = (5, 2)$.
47. i) $(x, y) = (3, -1)$
 ii) $(x, y) = (1, 2)$ ή $(x, y) = (2, 1)$.
48. i) $(x, y) = (-1, 0)$
 ii) $(x, y) = (1, 4)$ ή $(x, y) = (4, 1)$.

49. Από τις δύο εξισώσεις αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{x}{y}} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2 \text{ ή } \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Δηλαδή,

$$x = 2y \text{ ή } x = -\frac{1}{2}y$$

Οπότε, αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση προκύπτει

$$3y - 2 = 1 \text{ ή } \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 1.$$

Τελικά, το σύστημα έχει δύο λύσεις

$$(x, y) = (2, 1) \text{ ή } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

50. Από την πρώτη εξίσωση λύνουμε ως προς y^2 και αντικαθιστούμε στην δεύτερη εξίσωση. Τελικά βρίσκουμε

$$(x, y) = (1, \sqrt{2}) \text{ ή } (1, -\sqrt{2})$$

51. $(x, y) = (1, 1)$ ή $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Δηλαδή, η ευθεία

$$y = -2x + 3$$

έχει δύο κοινά σημεία $A(1, 1)$ και

$$B\left(\frac{1}{2}, 2\right) \text{ με την υπερβολή } y = \frac{1}{x}.$$

52. i) $\kappa > -1$.

ii) $A(-1, 1)$ και $B(3, 9)$.

53. i) $\kappa = \pm 10$.

ii) $A(-3, 1)$.

54. Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$z = x + y - 1.$$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση αυτή γίνεται

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ και } y = 1.$$

Τελικά, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y, z) = (1, 1, 1).$$

55. Από τις δύο πρώτες εξισώσεις έχουμε $y = x + 1$ και $\omega = y + 1 = x + 2$. Οπότε, αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση, αυτή γίνεται

$$x^3 + x^3 + x^3 = 3$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Τελικά, το σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y, \omega) = (1, 2, 3).$$

56. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y + \omega = 3 \\ x + 2y - \omega = 2 \\ x + y\omega + x\omega = 3. \end{cases}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις βρίσκουμε τους x, y συναρτήσει του ω και αντικαθιστούμε στην τρίτη εξίσωση.

Τελικά βρίσκουμε

$$(x, y, \omega) = (1, 1, 1) \text{ ή } (7, -3, -1).$$

57. i) $\kappa = 2$.

ii) $f(x) \geq -x + 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Βλ. σελ. 33
2. Βλ. σελ. 33
3. Βλ. σελ. 34
4. Όταν έχουν ίδιες λύσεις.
5. Η μέθοδος της αντικατάστασης και η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών.
6. Βλ. σελ. 34-35
7. Βλ. σελ. 37-38
8. Βλ. σελ. 38
9. Βλ. σελ. 39
10. Βλ. σελ. 69

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Σ
2. Σ
3. Λ
4. Λ
5. Λ
6. Σ
7. Σ
8. Σ
9. Σ

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

A1. Βλ. θεωρία.

A2. Βλ. θεωρία.

A3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό.

Θέμα Β

B1. $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq 2$

B2. α) Άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (2\kappa + 2, \kappa) \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

β) Αδύνατο.

B3. Έχουμε

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 2}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{\lambda - 2}$$

και

$$x + y = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0.$$

Η μοναδική λύση είναι η

$$(x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

Θέμα Γ

Γ1. α) Το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών δεν έχει μοναδική λύση και συνεπώς $D = 0$. Όμως

$$D = 2(\alpha - 2).$$

β) Για $\alpha = 2$, το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών είναι αδύνατο.

Γ2. Το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) είναι

$$A \left(\frac{\alpha + 1}{2(\alpha - 2)}, \frac{\alpha^2 - 5\alpha}{2(\alpha - 2)} \right) \text{ με } \alpha \neq 2.$$

Όμως, οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν και την εξίσωση της ευθείας (ε_3) . Επομένως,

$$\frac{\alpha+1}{2(\alpha-2)} + 2\frac{\alpha^2-5\alpha}{2(\alpha-2)} = 3$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 - 15\alpha + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ή } \alpha = -\frac{13}{2}.$$

Και επειδή $\alpha \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\alpha = 1$ και $A(-1, 4)$.

Θέμα 4

A1. $\kappa = 1$

A2. $A(2, -1)$

A3. Έχουμε

$$f(x) \geq x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \geq x - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$.

Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

A1. Βλέπε θεωρία

A2. Βλέπε θεωρία

A3. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος.

Θέμα Β

B1. Από τη δοθείσα σχέση παίρνουμε

$$(D_x - 3D_y)^2 \leq 0.$$

Οπότε, $D_x - 3D_y = 0$.

B2. α) Έχουμε

$$D_x D_y = D^2 - 1 \Leftrightarrow D^2 = 3D_y^2 + 1 \neq 0.$$

β) Έχουμε

$$D^2 = 3D_y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4 = 3D_y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow D_y = 1 \text{ ή } D_y = -1.$$

• αν $D_y = 1$, τότε $D_x = 3$

$$\text{και } (x, y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

• αν $D_y = -1$, τότε $D_x = -3$

$$\text{και } (x, y) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Θέμα Γ

Γ1. Για $x=1$ και $y=-1$ επαληθεύονται οι εξισώσεις του συστήματος. Δηλαδή,

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -2$$

και

$$2\lambda + 1 - (\lambda + 1) = \lambda^2 - 6$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ ή } \lambda = 3.$$

Τελικά, $\lambda = -2$.

Γ2. Για $\lambda = -2$ έχουμε

$$\begin{cases} 4x^2 + 2y = 2 \\ -3x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + y = 1 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ και } y = -1 \\ \text{ή} \\ x = \frac{1}{2} \text{ και } y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα, το σύστημα έχει δύο λύσεις, τις

$$(x, y) = (1, -1) \text{ και } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Γ3. Για $\lambda = -2$ το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών γίνεται

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ -2x + 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε

$$D = \kappa^2 - 2\kappa\lambda + 3 \text{ και } D' = \lambda^2 + 2\kappa\lambda - 2.$$

$$\text{Οπότε } D + D' = \kappa^2 + \lambda^2 + 1.$$

Δ2. Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο), ότι κανένα από τα συστήματα δεν έχει μοναδική λύση. Τότε $D = D' = 0$ και από τη σχέση του ερωτήματος Δ1 προκύπτει ότι $\kappa^2 + \lambda^2 + 1 = 0$ (άτοπο).

Δ3. α) Έχουμε $\kappa = 1$ και

$$D = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

β) • Για $\kappa = 1$ και $\lambda = 2$, το πρώτο σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ x = 1 - 2y \end{cases}$$

Άρα, έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(x, y) = (1 - 2\mu, \mu) \text{ με } \mu \in \mathbb{R}.$$

• Για $\kappa = 1$ και $\lambda = 2$, το δεύτερο σύστημα έχει μοναδική λύση

$$(x, y) = (4, -3).$$

Ιδιότητες Συναρτήσεων

Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

1. i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε $x_1^3 < x_2^3$ και $5x_1 < 5x_2$.
Επομένως, $x_1^3 + 5x_1 < x_2^3 + 5x_2$ και συνεπώς
$$x_1^3 + 5x_1 + 7 < x_2^3 + 5x_2 + 7.$$
Δηλαδή, $f(x_1) < f(x_2)$.
Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε
$$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 0 < x_1^2 + 1 < x_2^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2 + 1} > \frac{1}{x_2^2 + 1}$$
Δηλαδή,
$$g(x_1) > g(x_2).$$
Άρα, η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.
2. $f \searrow (-\infty, 0)$ και $f \searrow (0, +\infty)$.
3. i) $A = (-\infty, 3]$ ii) $f \nearrow (-\infty, 3]$.
4.
$$f(x) = \begin{cases} -3x + 7, & \text{αν } x \geq 0 \\ 7x + 7, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$
5.
$$f(x) = \begin{cases} 11x - 2, & \text{αν } x \geq 0 \\ 3x - 2, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$
6.
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ -4x + 1, & \text{αν } x \leq -1. \end{cases}$$
7. i) Με τον ορισμό.
ii) Η δοθείσα ανίσωση ισοδύναμα γράφεται
$$f(\sqrt[3]{x}) < f(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$
8. i) Με τον ορισμό.
ii) Η δοθείσα ανίσωση γράφεται
$$f(x^3) < f(1) \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1.$$
9. i) Με απαγωγή σε άτοπο παρατηρώντας ότι
$$f(2) < f(5).$$
ii) $x < 16$.
10. i) Γνησίως αύξουσα.
ii) $x < 6$.
11. i) Γνησίως φθίνουσα.
ii) $x < -3$ ή $x > 3$.
12. i) Με απαγωγή σε άτοπο παρατηρώντας ότι
$$2 < 4 \text{ και } f(2) > f(4)$$
ii) $f(f(x) - 3) < 7$
$$\Leftrightarrow f(f(x) - 3) < f(2)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 3 < 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) < 5$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(4)$$

$$\Leftrightarrow x < 4.$$
13. i) $B(3, 4)$
ii) Γνησίως αύξουσα
iii) $-1 < x < 3$.
14. Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Δηλαδή, για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει
$$f(x_1) < f(x_2).$$
Οπότε,
$$f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \quad (1)$$
και
$$3f(x_1) < 3f(x_2) \quad (2)$$
Από τις (1) και (2) προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$f(f(x_1)) + 3f(x_1) < f(f(x_2)) + 3f(x_2)$$

ή ισοδύναμα

$$-2x_1 < -2x_2$$

που είναι άτοπο. Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Και επειδή είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

- 15.** Οι αριθμοί $f(1)$, $2f(2)$ και $-3f(3)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$f(1) \cdot (-3f(3)) = (2f(2))^2$$

ή ισοδύναμα

$$f(1) \cdot f(3) = -\frac{4}{3}(f(2))^2 < 0.$$

Όμως, $f(1) < 0$. Επομένως, $f(3) > 0$ και συνεπώς, $f(1) < f(3)$. Οπότε, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Και επειδή είναι γνησίως μονότονη, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

- 16. i)** $f(-4) = 3$, $f(0) = 1$ και $f(5) = 7$
ii) $x = -6$ ή $x = -1$
iii) $x \in (-6, -1) \cup (-1, +\infty)$
iv) α) $(-\infty, -4]$ και $[-1, +\infty)$
β) $[-4, -1]$.

- 17. i)** $f(4) = 3$

ii) Η σχέση

$$f(x) \geq f(4)$$

γράφεται ισοδύναμα

$$(x-4)^2 \geq 0$$

και ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 18.** $f(x) \leq f(3) \Leftrightarrow 1 + 6x - x^2 \leq 10$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0,$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 19.** Η ανισότητα

$$f(x) \geq f(4)$$

ισοδύναμα γράφεται

$$x - 4\sqrt{x} \geq 4 - 4\sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow x - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \geq 0$.

- 20. i)** Η σχέση

$$f(x) \geq f(0)$$

γράφεται ισοδύναμα

$$x^4 + x^2 \geq 0$$

και ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii)** Η σχέση

$$f(x) \leq f(5)$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{10x}{x^2 + 25} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 10x \leq x^2 + 25$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 \geq 0$$

και ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 21.** $f(x) \leq f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 22. i)** Έχουμε

$$|x^2 - 4| \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$|x| \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε,

$$|x^2 - 4| + |x| \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και τελικά

$$|x^2 - 4| + |x| + 2 \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή,

$$f(x) \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- ii)** Η εξίσωση

$$f(x) = 2$$

ισοδύναμα γράφεται

$$|x^2 - 4| + |x| + 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 4| + |x| = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \text{ και } x = 0, \text{ αδύνατον.}$$

Άρα, ο αριθμός 2 δεν είναι τιμή της f και συνεπώς δεν είναι ελάχιστη τιμή της f .

23. i) Έχουμε

$$|f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4|x|}{x^2 + 4} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4|x| \leq x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 2)^2 \geq 0$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Έχουμε

$$-1 \leq f(x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$f(-2) = -1 \text{ και } f(2) = 1.$$

24. i) $\mathbb{R}$

ii) Αποδεικνύουμε ότι

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η ισότητα ισχύει για $x = 3$.

Δηλαδή,

$$f(x) \geq f(3) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

25. i) Έχουμε $f(x) \geq 3$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0,$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει για $x = 2$.

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει ότι

$$f(x) \geq f(2) = 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 2$ το $f(2) = 3$.

26. i) Έχουμε $f(x) \leq 2$

$$\Leftrightarrow 2 - |x + 1| \leq 2$$

$$\Leftrightarrow |x + 1| \geq 0,$$

ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει για $x = -1$.

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα **i)** ισχύει

$$f(x) \leq f(-1) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = -1$ το $f(-1) = 2$.

27. i) $a = 4$

ii) $f(x) \geq f(2)$

$$\Leftrightarrow x + \frac{4}{x} \geq 4 \Leftrightarrow x^2 + 4 \geq 4x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0,$$

ισχύει για κάθε $x > 0$.

$$\mathbf{28. i)} \quad f(x) = \begin{cases} 6x - 13, & \text{αν } x \geq 3 \\ -2x + 11, & \text{αν } x \leq 3. \end{cases}$$

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει

$$f(x) \geq f(3) = 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

29. i) Με τον ορισμό αφού παρατηρήσουμε ότι

$$f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2 + 2 \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει

$$f(x) \geq f(1) = 2 \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

$$\mathbf{30. i)} \quad f(x) = \begin{cases} -x^3 + 8, & \text{αν } x \geq 0 \\ 3x^3 + 8, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει

$$f(x) \leq f(0) = 8 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

31. i) α) $(-\infty, -3]$ και $[5, +\infty)$

β) $[-3, 5]$

ii) $\max f(x) = f(-3) = 4$

και

$\min f(x) = f(5) = -2.$

32. i) $A = [-9, 10]$

ii) $f(-4) = -1, \quad f(0) = 4$

και $f(7) = -5$

iii) $f(A) = [-5, 6]$

iv) $x = [-9, -7] \cup [-2, 5] \cup \{10\}.$

v) α) $[-4, 2]$ και $[7, 10]$

β) $[-9, -4]$ και $[2, 7]$

vi) $\max f(x) = f(2) = 6$

και

$\min f(x) = f(7) = -5.$

33. i) $A = [-7, 7]$

ii) $f(A) = [-4, 5]$

iii) $x = 0$ ή $x = 6$

iv) $x \in (0, 6)$

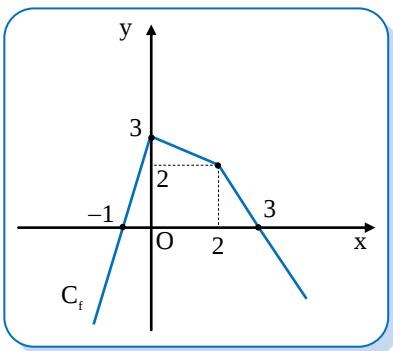
v) α) $[-7, -3]$ και $[4, 7]$

β) $[-3, 4]$

vi) $\max f(x) = f(-3) = 5$

και $\min f(x) = f(4) = -4.$

34. i)



ii) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty).$

iii) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μόνο ολικό μέγιστο για $x = 0$ το $f(0) = 3.$

35. i) Παρατηρούμε ότι

$$f(x) \geq f(0) = -2\lambda + 3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

Άρα, $\min f = f(0) = -2\lambda + 3.$

ii) Έχουμε

$$f(x) \geq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \min f \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda + 3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda \leq 1.$$

Επομένως,

$$\max \lambda = 1.$$

36. i) Έχουμε

$$2f(1) \leq f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(1) \leq f(2)$$

και

$$2f(2) \leq f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(2) \leq f(1).$$

Άρα,

$$f(1) = f(2).$$

ii) Έχουμε

$$2f(x) \leq f(1) + f(2) = 2f(1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}.$ Επομένως

$$f(x) \leq f(1) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

37. i) $g(x) = (f(x))^2 - 2f(x) + 1 + 4$

$$= (f(x) - 1)^2 + 4 \geq 4$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

ii) Έχουμε

$$g(x) \geq 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και

$$g(0) = (f(0) - 1)^2 + 4 = 4.$$

Επομένως,

$$g(x) \geq g(0) = 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

38. i) Άρτια ii) Περιττή
 iii) Άρτια iv) Περιττή.

39. Με απαγωγή σε άτοπο, παρατηρώντας π.χ. ότι $f(1)=0$ και $f(-1)=2$
 Επομένως,

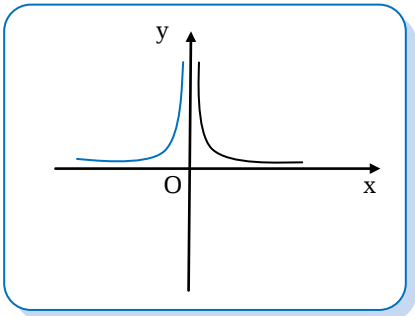
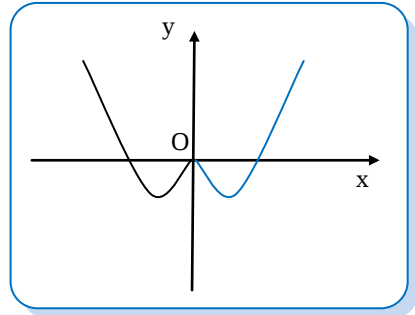
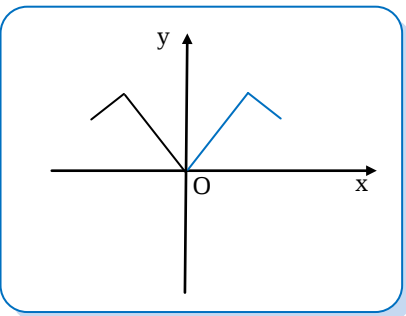
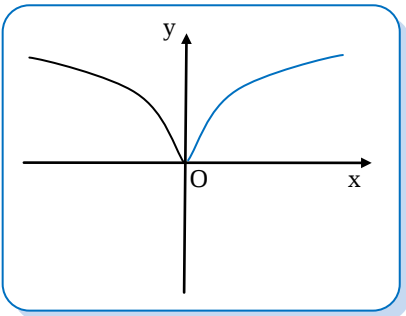
$$f(-1) \neq f(1)$$

και

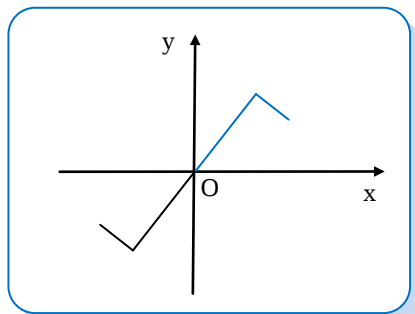
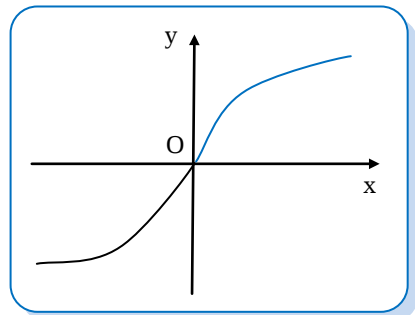
$$f(-1) \neq -f(1).$$

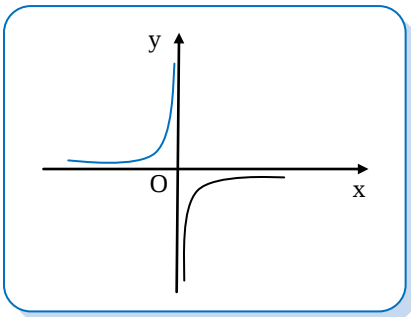
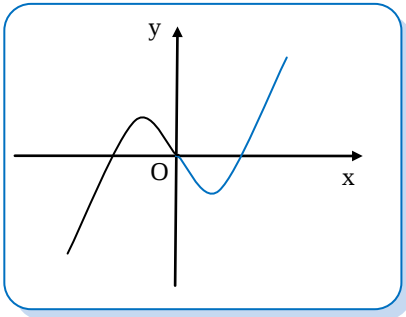
40. i) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. Άρα, η συνάρτηση είναι άρτια.
 ii) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Επομένως, η συνάρτηση είναι περιττή.

41. i) άρτια συνάρτηση

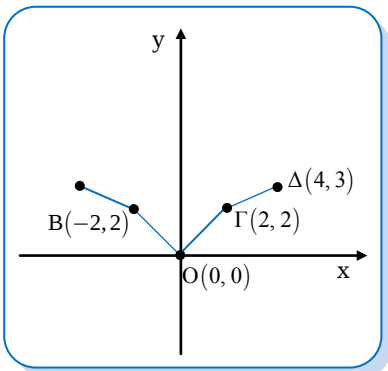


- ii) περιττή συνάρτηση





42. i)



$$\text{ii) } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1, & \text{αν } x \in [-4, -2] \\ |x|, & \text{αν } x \in (-2, 2) \\ \frac{1}{2}x + 1, & \text{αν } x \in [2, 4] \end{cases}$$

$$\text{iii) } x = \pm 1.$$

43. Έχουμε

$$f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$f(-0) = -f(0)$$

$$\Leftrightarrow 2f(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0.$$

44. i) Με απαγωγή σε άτοπο παρατηρούμε ότι

$$f(1) = -f(-1) = -2 < f(-1).$$

ii) α) $f(x-1) > 0 \Leftrightarrow f(x-1) > f(0)$

$$\Leftrightarrow x-1 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 1.$$

$$\beta) f\left(\frac{x}{4}\right) < -2 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{4}\right) < f(1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{4} > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 4.$$

45. i) Θέτουμε στη δοθείσα σχέση όπου y το 0, οπότε βρίσκουμε $f(0) = 0$.ii) Θέτουμε στη δοθείσα σχέση όπου y το $-x$ οπότε προκύπτει

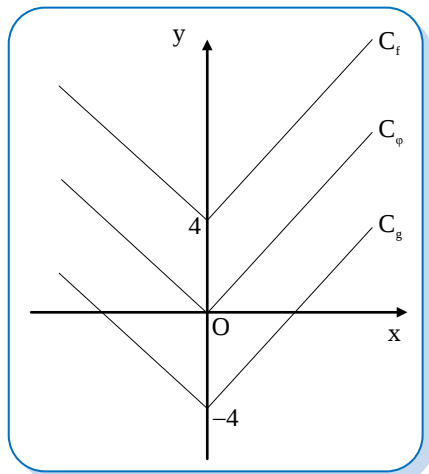
$$f(0) = f(x) + f(-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

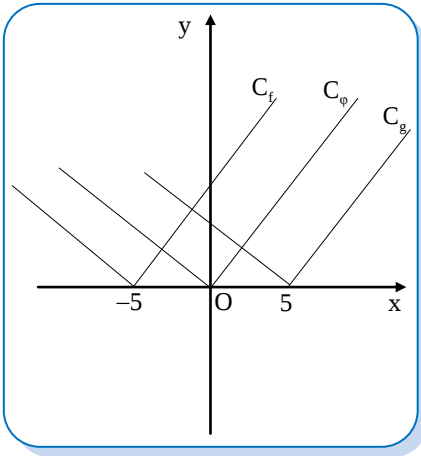
$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Κατακόρυφη - Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

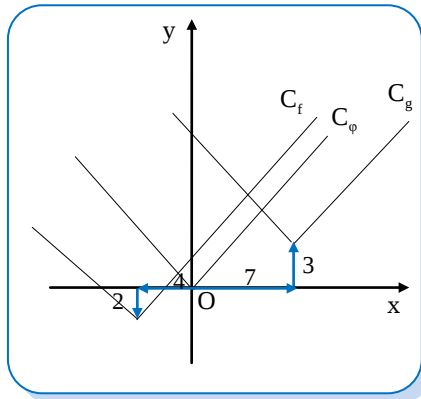
46.



47.



48.



49. i) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$
 ii) $g(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2x - 4, x \in \mathbb{R}.$

50. i) $g(x) = (x-3) \cdot |x-1|, x \in \mathbb{R}$
 ii) $g(x) = (x+3) \cdot |x+5|, x \in \mathbb{R}$

51. i) $f(x) = \varphi(x-2) + 1$
 $= x^2 - 10x + 24$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 ii) $f(x) = \varphi(x-1) - 4$
 $= x^2 - 8x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 iii) $f(x) = \varphi(x+3) + 2$
 $= x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 iv) $f(x) = \varphi(x+4) - 7$
 $= x^2 + 2x - 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

52. i) $g(x) = \sqrt{(x-3)^2 + 1} - (x-3) + 5$
 $= \sqrt{x^2 - 6x + 10} - x + 8, x \in \mathbb{R}$
 ii) $g(x) = \sqrt{(x-4)^2 + 1} - (x-4) + 2$
 $= \sqrt{x^2 - 8x + 17} - x + 2, x \in \mathbb{R}$
 iii) $g(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 1} - (x+1) + 8$
 $= \sqrt{x^2 + 2x + 2} - x + 7, x \in \mathbb{R}$
 iv) $g(x) = \sqrt{(x+2)^2 + 1} - (x+2) - 6$
 $= \sqrt{x^2 + 4x + 5} - x - 8, x \in \mathbb{R}.$

53. i) $f(x) = 2(x-3)^2 + 4, x \in \mathbb{R}.$

ii) Οριζόντια, κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφη κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Βλ. σελ. 87
2. Βλ. σελ. 87
3. Βλ. σελ. 88
4. Βλ. σελ. 88
5. Βλ. σελ. 89
6. Βλ. σελ. 89
7. Βλ. σελ. 90
8. Βλ. σελ. 90

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Λ
2. Λ
3. Σ
4. Σ
5. Λ
6. Σ
7. Σ

8. Σ
9. Σ
10. Σ
11. Σ
12. Λ
13. Λ

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

- A1. Βλέπε θεωρία
A2. Βλέπε θεωρία
A3. Βλέπε θεωρία
A4. α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό.

Θέμα Β

- B1. Με τον ορισμό.
B2. $f(x) > 10 \Leftrightarrow f(x) > f(4) \Leftrightarrow x > 4$.
B3. Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$f(x^2 + 1) \geq f(2x) \text{ για κάθε } x \geq 0$$
 που ισχύει αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και

$$x^2 + 1 \geq 2x \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Θέμα Γ

- Γ1. Έχουμε

$$\begin{aligned} \bullet \quad f(-x) &= (-x)^2 - 10|-x| + 26 \\ &= x^2 - 10|x| + 26 \\ &= f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
 και

$$\begin{aligned} \bullet \quad g(-x) &= \frac{10(-x)}{(-x)^2 + 25} = -\frac{10x}{x^2 + 25} \\ &= -g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Γ2. Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) \geq 1 &\Leftrightarrow x^2 - 10|x| + 26 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow |x|^2 - 10|x| + 25 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - 5)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $x = \pm 5$.

Γ3. Έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) \leq g(5) &\Leftrightarrow \frac{10x}{x^2 + 25} \leq \frac{10 \cdot 5}{5^2 + 25} \\ &\Leftrightarrow \frac{10x}{x^2 + 25} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 10x \leq x^2 + 25 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει για $x = 5$.

Γ4. Από τα ερωτήματα i) και ii) προκύπτει ότι

$$f(x) \geq g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 5$.

Άρα,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 5.$$

Θέμα Δ

$$\begin{aligned} \Delta 1. \quad f(x) &= 3\left(x^2 - 2x + \frac{7}{3}\right) \\ &= 3\left(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{7}{3}\right) \\ &= 3\left[(x-1)^2 + \frac{4}{3}\right] = 3(x-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta 2. \quad f(x) \geq f(1) = 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ3. Οριζόντια μετατόπιση κατά 1 μονάδα δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.

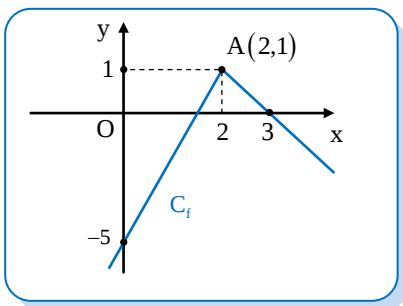
Διαγώνισμα 2

Θέμα Α

- A1.** Βλέπε θεωρία
A2. Βλέπε θεωρία
A3. Βλέπε θεωρία
A4. α) Λάθος
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό.

Θέμα Β

B1.

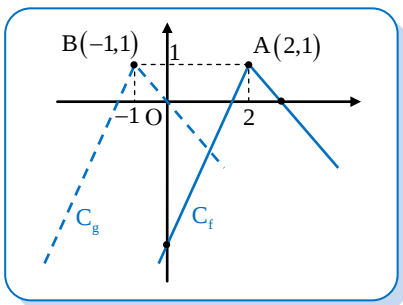


B2. $f \uparrow (-\infty, 2]$ και $f \downarrow [2, +\infty)$

B3. $\max f = f(2) = 1$.

Η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο.

B4. Μετατοπίζουμε τη C_f κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.



Θέμα Γ

Γ1. Με απαγωγή σε άτοπο, παρατηρώντας ότι $1 < 5$ και $f(1) > f(5)$.

Γ2. α) $f(f(x) - 2) > -f(5)$

$$\Leftrightarrow f(f(x) - 2) > f(-5)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 2 < -5$$

$$\Leftrightarrow f(x) < -3$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow x > 1.$$

β) Έχουμε

$$f(x^2 - 2|x|) \leq -f(1)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 - 2|x|) \leq f(-1) \text{ (f περιττή)}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2|x| \geq -1 \quad (f \downarrow \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε

$$g(x) = [f(x)^2 - 6f(x) + 9] + 2$$

$$= (f(x) - 3)^2 + 2 \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ2. α) Έχουμε

$$g(4) = (f(4) - 3)^2 + 2 = 2$$

και

$$g(x) \geq 2 \Leftrightarrow g(x) \geq g(4)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Θετούμε $x = 0$ στη δοθείσα σχέση.

Οπότε, έχουμε

$$g(0) = (f(0))^2 - 6f(0) + 11$$

$$\Leftrightarrow (f(0))^2 - 6f(0) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = -2 \text{ ή } f(0) = 8.$$

Όμως, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς

$$f(0) < f(4) \Leftrightarrow f(0) < 3.$$

Άρα, $f(0) = -2$.

γ) Έχουμε

$$f(g(x)) > -2 \Leftrightarrow f(g(x)) > f(0)$$

$$\Leftrightarrow g(x) > 0$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, λόγω του ερωτήματος **Δ1**.

Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας Τριγωνομετρικός Κύκλος

1. i) $x = 4$ και $y = 4\sqrt{2}$

ii) $\omega = 45^\circ$.

2. i) $(B\Gamma) = (B\Delta) + (\Delta\Gamma)$

$$= (AB) \cdot \sigma\upsilon\nu B + (A\Gamma) \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$= 17 \cdot \frac{15}{17} + 10 \cdot \frac{3}{5} = 15 + 6 = 21$$

ii) $(A\Delta) = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

iii) $\eta\mu\Gamma = \frac{(A\Delta)}{(A\Gamma)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

3. $(A\Gamma) = 20$ και $(AB) = 10\sqrt{3}$

4. i) $\omega = 4^{\text{rad}}$ ii) $\omega = 3^{\text{rad}}$

iii) $\omega = 2^{\text{rad}}$ iv) $\omega = \frac{1}{2}^{\text{rad}}$

5. $(B\Gamma) = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$.

Άρα, $\eta\mu B = \frac{5}{13}$, $\sigma\upsilon\nu B = \frac{12}{13}$, $\epsilon\phi B = \frac{5}{12}$

και $\sigma\phi B = \frac{12}{5}$.

6. i) $\frac{7\pi}{6}^{\text{rad}}$ ii) $\frac{91\pi}{6}^{\text{rad}}$

iii) $-\frac{25\pi}{6}^{\text{rad}}$ iv) $-\frac{13\pi}{2}^{\text{rad}}$.

7. i) 450° ii) 20°

iii) 15° iv) -50° .

8. i) $\eta\mu 450^\circ = \eta\mu(360 + 90^\circ) = \eta\mu 90^\circ = 1$

$$\sigma\upsilon\nu 450^\circ = \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$$

$$\epsilon\phi 450^\circ, \text{ δεν ορίζεται}$$

$$\sigma\phi 450^\circ = 0.$$

ii) $\eta\mu 1470^\circ = \eta\mu(4 \cdot 360^\circ + 30^\circ)$

$$= \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1470^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 1470^\circ = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\phi 1470^\circ = \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3}.$$

iii) $\eta\mu 1860^\circ = \eta\mu(5 \cdot 360^\circ + 60^\circ)$

$$= \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1860^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi 1860^\circ = \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sigma\phi 1860^\circ = \sigma\phi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

iv) $\eta\mu(3645^\circ) = \eta\mu(10 \cdot 360^\circ + 45^\circ)$

$$= \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu(3645^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\epsilon\phi(3645^\circ) = \epsilon\phi 45^\circ = 1$$

$$\sigma\phi(3645^\circ) = \sigma\phi 45^\circ = 1.$$

9. i) $\eta\mu 28\pi = \eta\mu(14 \cdot 2\pi + 0) = \eta\mu 0 = 0$

$$\sigma\upsilon\nu 28\pi = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

$$\epsilon\phi 28\pi = \epsilon\phi 0 = 0$$

$$\sigma\phi 28\pi \text{ δεν ορίζεται}$$

ii) $\eta\mu \frac{5\pi}{2} = \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\epsilon\phi \frac{5\pi}{2} \text{ δεν ορίζεται}$$

$$\sigma\phi \frac{5\pi}{2} = \sigma\phi \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\text{iii)} \quad \eta\mu \frac{25\pi}{6} = \eta\mu \left(4\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{25\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{25\pi}{6} = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi \frac{25\pi}{6} = \sigma\varphi \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\text{iv)} \quad \eta\mu \frac{33\pi}{4} = \eta\mu \left(8\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{33\pi}{4} = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{33\pi}{4} = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sigma\varphi \frac{33\pi}{4} = \sigma\varphi \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$10. \quad A\Gamma = 12\sqrt{3} \quad \text{και} \quad B\Delta = 12.$$

$$11. \text{ i)} \quad \upsilon = 3\sqrt{3}$$

$$\text{ii)} \quad AB = 10.$$

$$12. \text{ i)} \quad \eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\text{ii)} \quad \frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu\Gamma} = \frac{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{2\frac{\beta}{\alpha}}{2\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\beta}{\gamma} = \varepsilon\varphi B.$$

$$13. \text{ i)} \quad \alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Επομένως,

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3}{5}$$

και

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{ii)} \quad (\beta + \gamma)^4 - (\beta - \gamma)^4 = 2\alpha^4$$

$$\Leftrightarrow [(\beta + \gamma)^2 - (\beta - \gamma)^2] \cdot [(\beta + \gamma)^2 + (\beta - \gamma)^2]$$

$$= 2\alpha^4$$

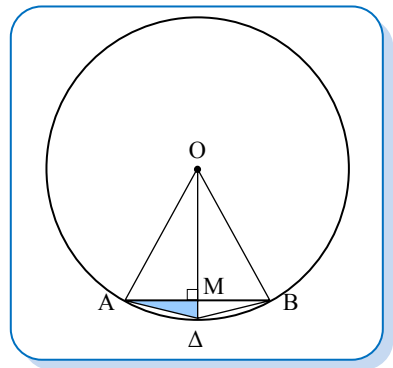
$$\Leftrightarrow 4\beta\gamma \cdot (2\beta^2 + 2\gamma^2) = 2\alpha^4$$

$$\Leftrightarrow 8\beta\gamma \cdot (\beta^2 + \gamma^2) = 2\alpha^4$$

$$\Leftrightarrow 8\beta\gamma \cdot \alpha^2 = 2\alpha^4 \Leftrightarrow 4 \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma = 1.$$

14. i) Το μικρό τόξο AB είναι 60° . Άρα, το αντίστοιχο μεγάλο τόξο είναι 300° . Επομένως, η γωνία $\widehat{ADB}$ ως εγγεγραμμένη σ' αυτό είναι ίση με $\frac{300^\circ}{2} = 150^\circ$.



$$\text{ii)} \quad (M\Delta) = (O\Delta) - (OM)$$

$$= 1 - (OA) \sigma\upsilon\nu 30^\circ$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

- iii) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A\Delta M$ η γωνία $\widehat{ADM}$ είναι ίση με $\frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$. Επομένως,

$$\varepsilon\varphi 75^\circ = \frac{(AM)}{(M\Delta)} = \frac{\frac{1}{2}(AB)}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

15. i) Αξιοποιούμε τις σχέσεις

$$\eta\mu x \leq 1 \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu y \geq -1.$$

- ii) Με απαγωγή σε άτοπο.

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες Εξισώσεις

16. $\eta\mu x = -\frac{1}{3}, \quad \varepsilon\varphi x = -\frac{1}{\sqrt{8}}$
και $\sigma\varphi x = -\sqrt{8}$.

17. $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{15}{17}, \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{8}{15}$ και $\sigma\varphi\theta = \frac{15}{8}$.

18. $\eta\mu\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ και $\sigma\varphi\theta = -\frac{1}{2}$.

19. i) Όχι, λόγω της ταυτότητας
 $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

ii) Όχι, λόγω της ταυτότητας
 $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

iii) Όχι, αφού από τη σχέση
 $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2$

προκύπτει ότι

$$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 1,$$

που είναι αδύνατον λόγω της ταυτότητας $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

20. $\frac{x}{5} = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $\frac{y}{4} = \eta\mu\theta$.

Όμως, $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$.

21. i) Από τη δοθείσα σχέση υψώνοντας στο τετράγωνο.

ii) $\frac{25}{12}$.

22. i) $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = \frac{1}{25}$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{25}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{25}$$

ii) $-\frac{5}{12}$

iii) $\eta\mu^3\omega + \sigma\upsilon\nu^3\omega = (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega) \cdot$
 $(\eta\mu^2\omega - \eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)$

$$= \frac{1}{5} \left(1 + \frac{12}{25} \right) = \frac{37}{125}.$$

23. i) $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x$
 $= (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) \cdot (\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)$
 $= \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x.$

ii) $\eta\mu^2 x \cdot (1 + \sigma\varphi^2 x) = \eta\mu^2 x \cdot \left(1 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} \right)$
 $= \eta\mu^2 x \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x}$
 $= \sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x = 1.$

iii) $\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu x \right) \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x \right)$
 $= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 1 + \eta\mu^2 x$
 $= \eta\mu^2 x + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \eta\mu^2 x + \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
 $= \eta\mu^2 x + \varepsilon\varphi^2 x.$

24. i) $\frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$
 $= \frac{\eta\mu^2 x + (1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}{(1 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \eta\mu x}$
 $= \frac{\eta\mu^2 x + 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \eta\mu x}$
 $= \frac{2 + 2\sigma\upsilon\nu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \eta\mu x} = \frac{2(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{(1 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \eta\mu x}$
 $= \frac{2}{\eta\mu x}.$

ii) $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \frac{1 + \eta\mu x - (1 - \eta\mu^2 x)}{1 + \eta\mu x}$
 $= \frac{\eta\mu x + \eta\mu^2 x}{1 + \eta\mu x} = \frac{\eta\mu x \cdot (1 + \eta\mu x)}{1 + \eta\mu x} = \eta\mu x.$

iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \varepsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\varphi x}$
 $= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu x}{1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}}$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi} + \frac{\eta\mu^2\chi}{\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi.$$

25. $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ και $\sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

26. i) $\varepsilon\varphi^2\theta - \eta\mu^2\theta = \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - \eta\mu^2\theta$

$$= \eta\mu^2\theta \cdot \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} - 1 \right)$$

$$= \eta\mu^2\theta \cdot \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \eta\mu^2\theta \cdot \frac{\eta\mu^2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

$$= \varepsilon\varphi^2\theta \cdot \eta\mu^2\theta.$$

ii) $\sigma\varphi^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} - \sigma\upsilon\nu^2\theta$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \left(\frac{1}{\eta\mu^2\theta} - 1 \right)$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \frac{1 - \eta\mu^2\theta}{\eta\mu^2\theta} = \sigma\upsilon\nu^2\theta \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu^2\theta}$$

$$= \sigma\varphi^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta.$$

27. i) $\eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

$$= \eta\mu^2\alpha \cdot (1 - \eta\mu^2\beta) - \eta\mu^2\beta \cdot (1 - \eta\mu^2\alpha)$$

$$= \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta.$$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\beta$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha \cdot (1 - \eta\mu^2\beta) - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \cdot \eta\mu^2\beta$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta.$$

28. i) $\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} + \varepsilon\varphi\beta}$

$$= \frac{\frac{\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta + 1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha}} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}.$$

ii) $\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}}$

$$= \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\frac{\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}} = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta.$$

29. i) $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

ii) $\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha - 1}{\varepsilon\varphi^2\alpha + 1} = \frac{\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - 1}{\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + 1}$

$$= \frac{\frac{\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \frac{\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

iii) $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1 + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}$

$$= \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot 1}$$

$$= \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha.$$

30. i) $(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 1) \cdot (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + 1)$

$$= (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 - 1$$

$$= \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - 1$$

$$= 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

ii) Από το πρώτο μέλος εκτελώντας τις πράξεις.

31. i) $(\eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\chi) \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\varphi\chi)$

$$= \left(\eta\mu\chi + \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} \right) \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} \right)$$

$$= \eta\mu\chi \cdot \left(1 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \cdot \left(1 + \frac{1}{\eta\mu\chi} \right)$$

$$= \eta\mu\chi \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\chi + 1}{\sigma\upsilon\nu\chi} \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \cdot \frac{\eta\mu\chi + 1}{\eta\mu\chi}$$

$$= (\sigma\upsilon\nu\chi + 1) \cdot (\eta\mu\chi + 1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} & (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\epsilon\phi x + \sigma\phi x) \\
 &= (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \right) \\
 &= (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \\
 &= (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot \frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \\
 &= \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \\
 &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{\eta\mu x}.
 \end{aligned}$$

- 32. i)** Η ζητούμενη ταυτότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \right)^2 + \left(1 - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} \right)^2 = \left(\frac{\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta} \right)^2 \\
 & \Leftrightarrow (\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 + (\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 \\
 &= (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 \\
 & \Leftrightarrow \eta\mu^2\theta(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 \\
 &= (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 \\
 & \Leftrightarrow (\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 \\
 &= (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 \\
 & \Leftrightarrow 1 \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2 = (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2,
 \end{aligned}$$

που ισχύει.

- ii)** Η ζητούμενη ταυτότητα ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \left(\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + 1 \right)^2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + 1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{(\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} \\
 & \Leftrightarrow 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta + 1 \\
 &= \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta + 2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta \\
 & \Leftrightarrow 1 = \eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta, \text{ που ισχύει.}
 \end{aligned}$$

- 33. i)** Από το πρώτο μέλος γράφοντας

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

- ii)** Από το πρώτο μέλος πολλαπλασιάζοντας τους όρους του κλάσματος με $\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta$.

- 34. i)** Από το πρώτο μέλος, γράφοντας

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \text{ και } \sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

- ii)** Από το πρώτο μέλος, γράφοντας

$$1 = \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

- 35. i)** Το κάθε μέλος είναι ίσο με $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$.

- ii)** Με απαγωγή σε άτοπο και αξιοποίηση του ερωτήματος **i)**.

- 36. i)** Από το πρώτο μέλος γράφοντας

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \text{ και } \sigma\phi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

- ii)** Από το πρώτο μέλος γράφοντας

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}.$$

- 37. i)** Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
 & \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \right)^2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \left(\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x \eta\mu x} \right)^2 \\
 & \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 x},
 \end{aligned}$$

που ισχύει.

- ii)** Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned}
 & \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{\eta\mu^2 x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} \\
 & \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}
 \end{aligned}$$

- 38. i)** $\epsilon\phi^2\alpha + 1 = 2 + 2\epsilon\phi^2\beta$

$$= 2(1 + \epsilon\phi^2\beta) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \sin^2 \beta &= \frac{2}{\varepsilon \varphi^2 \alpha + 1} = \frac{2}{\frac{\eta \mu^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1} \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha}{\eta \mu^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 2 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \sin^2 \alpha - \eta \mu^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1 = \sin^2 \beta - 1.$$

39. • Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{3\varepsilon\varphi\beta - 2\varepsilon\varphi\alpha}{2 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} &= \frac{6\varepsilon\varphi\alpha - 2\varepsilon\varphi\alpha}{2 + 2\varepsilon\varphi^2\alpha} \\ &= \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{2 \frac{\eta\mu\alpha}{\sin\alpha}}{1 + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sin^2\alpha}} \\ &= \frac{2 \frac{\eta\mu\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = 2\eta\mu\alpha\sin\alpha. \end{aligned}$$

• Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} &(\eta\mu\alpha + \sin\alpha)^2 - 1 \\ &= \eta\mu^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\sin\alpha - 1 \\ &= 2\eta\mu\alpha\sin\alpha. \end{aligned}$$

40. Έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu^2\alpha &= \frac{1 + 2\sin^2\beta}{1 + 3\eta\mu^2\beta} \\ \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + 3\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta &= 1 + 2\sin^2\beta \\ \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha + 3\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta &= 1 + 2 - 2\eta\mu^2\beta \\ \Leftrightarrow 3\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta + 2\eta\mu^2\beta &= 2 + (1 - \eta\mu^2\alpha) \\ \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta(3\eta\mu^2\alpha + 2) &= 2 + \sin^2\alpha \\ \Leftrightarrow \eta\mu^2\beta &= \frac{2 + \sin^2\alpha}{2 + 3\eta\mu^2\alpha}. \end{aligned}$$

41. i) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$1 + \varepsilon\varphi^2\alpha = 2 + 2\varepsilon\varphi^2\beta$$

ii) Αξιοποιούμε το ερώτημα i) παρατηρώντας ότι

$$1 + \varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

και

$$1 + \varepsilon\varphi^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta}.$$

$$\begin{aligned} \text{42. i)} \quad \eta\mu^4 x + \sin^4 x &= (\eta\mu^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \sin^2 x \\ &= 1 - 2\eta\mu^2 x \sin^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \eta\mu^6 x + \sin^6 x &= (\eta\mu^2 x)^3 + (\sin^2 x)^3 \\ &= (\eta\mu^2 x + \sin^2 x) \\ &\quad \cdot (\eta\mu^4 x - \eta\mu^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \eta\mu^4 x + \sin^4 x - \eta\mu^2 x \sin^2 x \\ &= 1 - 2\eta\mu^2 x \sin^2 x - \eta\mu^2 x \sin^2 x \\ &= 1 - 3\eta\mu^2 x \sin^2 x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \eta\mu^6 x + \sin^6 x - 2\eta\mu^4 x - \sin^4 x + \eta\mu^2 x &= (\eta\mu^6 x + \sin^6 x) - (\eta\mu^4 x + \sin^4 x) \\ &\quad - \eta\mu^4 x + \eta\mu^2 x \\ &= 1 - 3\eta\mu^2 x \sin^2 x - 1 + 2\eta\mu^2 x \sin^2 x \\ &\quad + \eta\mu^2 x (1 - \eta\mu^2 x) \\ &= -\eta\mu^2 x \sin^2 x + \eta\mu^2 x \sin^2 x = 0. \end{aligned}$$

43. i) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 2\eta\mu x \sin x &\leq \eta\mu^2 x + \sin^2 x \\ \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + \sin^2 x - 2\eta\mu x \sin x &\geq 0 \\ (\eta\mu x - \sin x)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad (\eta\mu x + \sin x)^2 &= \eta\mu^2 x + \sin^2 x + 2\eta\mu x \sin x \\ &= 1 + 2\eta\mu x \sin x \leq 1 + 1 \\ &= 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

$$\begin{aligned} \text{44. i)} \quad \eta\mu(-30^\circ) &= -\frac{1}{2} \\ \sin(-30^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\varepsilon\varphi(-30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi(-30^\circ) = -\sqrt{3}.$$

$$\text{ii) } \eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 120^\circ = -\sqrt{3} \quad \sigma\varphi 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{iii) } \eta\mu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{5\pi}{4} = 1$$

$$\sigma\varphi \frac{5\pi}{4} = 1.$$

$$\text{45. i) } \eta\mu \frac{11\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{11\pi}{4} = -1$$

$$\sigma\varphi \frac{11\pi}{4} = -1.$$

$$\text{ii) } \eta\mu \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{7\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi \frac{7\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{iii) } \eta\mu \left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu \left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi \left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi \left(-\frac{23\pi}{6}\right) = \sqrt{3}.$$

$$\text{46. i) } \eta\mu 120^\circ \cdot \eta\mu 135^\circ \cdot \eta\mu 150^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

$$\text{ii) } \varepsilon\varphi 210^\circ \cdot \varepsilon\varphi 225^\circ \cdot \varepsilon\varphi 240^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = 1.$$

$$\text{47. i) } \eta\mu \frac{3\pi}{10} = \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5}$$

$$\text{ii) } \varepsilon\varphi \frac{9\pi}{14} = \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right) = -\sigma\varphi \frac{\pi}{7}.$$

$$\text{48. i) } \eta\mu 450^\circ = \eta\mu (360^\circ + 90^\circ) = \eta\mu 90^\circ = 1$$

$$\varepsilon\varphi 190^\circ = \varepsilon\varphi (180^\circ + 10^\circ) = \varepsilon\varphi 10^\circ$$

$$\sigma\varphi 80^\circ = \sigma\varphi (90^\circ - 10^\circ) = \varepsilon\varphi 10^\circ$$

$$\text{ii) } \eta\mu 220^\circ = \eta\mu (180^\circ + 40^\circ) = -\eta\mu 40^\circ$$

$$\sigma\upsilon\nu 50^\circ = \sigma\upsilon\nu (90^\circ - 40^\circ) = \eta\mu 40^\circ$$

$$\varepsilon\varphi 240^\circ = \varepsilon\varphi (180^\circ + 60^\circ) = \varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}.$$

$$\text{49. i) } \sigma\upsilon\nu 120^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 150^\circ =$$

$$\sigma\upsilon\nu (180^\circ - 60^\circ) \cdot \sigma\upsilon\nu (180^\circ - 45^\circ)$$

$$\cdot \sigma\upsilon\nu (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\sigma\upsilon\nu 60^\circ \cdot (-\sigma\upsilon\nu 45^\circ) \cdot (-\sigma\upsilon\nu 30^\circ)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{8}.$$

$$\text{ii) } \varepsilon\varphi 120^\circ \cdot \varepsilon\varphi 135^\circ \cdot \varepsilon\varphi 150^\circ =$$

$$\varepsilon\varphi (180^\circ - 60^\circ) \cdot \varepsilon\varphi (180^\circ - 45^\circ)$$

$$\cdot \varepsilon\varphi (180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -\varepsilon\varphi 60^\circ \cdot (-\varepsilon\varphi 45^\circ) \cdot (-\varepsilon\varphi 30^\circ)$$

$$= -\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -1.$$

$$\text{50. i) } \sigma\varphi 75^\circ = \frac{1}{\varepsilon\varphi 75^\circ} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{ii) } \sigma\varphi 15^\circ = \sigma\varphi (90^\circ - 75^\circ) = \varepsilon\varphi 75^\circ$$

$$= 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{iii) } \varepsilon\varphi 15^\circ = \varepsilon\varphi (90^\circ - 75^\circ) = \sigma\varphi 75^\circ$$

$$= 2 - \sqrt{3}.$$

51. i) • $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right)$
 $= \sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$

• $\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$

• $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \omega\right)$
 $= -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-\omega)\right)$
 $= -\sigma\upsilon\nu(-\omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega.$

ii) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{-\eta\mu\omega - 1}{-\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{-\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \eta\mu\omega)(1 - \eta\mu\omega) - \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 - \eta\mu\omega)} = 0$$

$$\frac{1 - \eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega(1 - \eta\mu\omega)} = 0, \text{ που ισχύει.}$$

52. i) $\eta\mu(\pi + x) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
 $+ \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$
 $= -\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)$
 $+ \sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)$
 $= -\eta\mu x \cdot \eta\mu(-x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
 $= -\eta\mu x \cdot (-\eta\mu x) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$
 $= \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1.$

ii) Έχουμε

$$1 - \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \epsilon\varphi(\pi + x)$$

$$= 1 - (-\epsilon\varphi x) \cdot \epsilon\varphi x = 1 + \epsilon\varphi^2 x.$$

Επίσης, $\frac{1}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(18\pi + x)}$
 $= \frac{1}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(9 \cdot 2\pi + x)}$
 $= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(-x) \cdot \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}$
 $= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την ταυτότητα

$$1 + \epsilon\varphi^2 x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

53. i) $\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^2 \frac{3\pi}{8} = \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$
 $= \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{8} = 1.$

ii) Παρατηρούμε ότι

$$\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Άρα,

$$\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) = \sigma\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).$$

Επομένως

$$\epsilon\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$$

$$= \epsilon\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sigma\varphi\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

54. Το α' μέλος είναι ίσο με

$$\frac{\epsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot (-\eta\mu\theta)}{\epsilon\varphi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot (-\eta\mu\theta)} = 1.$$

55. Έχουμε $A + B + \Gamma = 180^\circ$.

Άρα,

i) $B + \Gamma = 180^\circ - A.$

Επομένως

$$\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu(180^\circ - A) = \eta\mu A.$$

ii) $\frac{B + \Gamma}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}.$

Επομένως

$$\varepsilon\varphi \frac{B+\Gamma}{2} = \varepsilon\varphi \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right) = \sigma\varphi \frac{A}{2}.$$

$$\text{iii)} \quad 2A + B + \Gamma = 180^\circ + A.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu(2A + B + \Gamma) &= \sigma\upsilon\nu(180^\circ + A) \\ &= -\sigma\upsilon\nu A. \end{aligned}$$

56. Έχουμε

$$\alpha = \pi + \beta.$$

Επομένως,

$$\eta\mu(\alpha + \gamma) = \eta\mu(\pi + \beta + \gamma) = -\eta\mu(\beta + \gamma)$$

και

$$\eta\mu(\alpha + \delta) = \eta\mu(\pi + \beta + \delta) = -\eta\mu(\beta + \delta).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \gamma) \cdot \eta\mu(\alpha + \delta) \\ = \eta\mu(\beta + \gamma) \cdot \eta\mu(\beta + \delta). \end{aligned}$$

$$57. \text{ i)} \quad \varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{2}$$

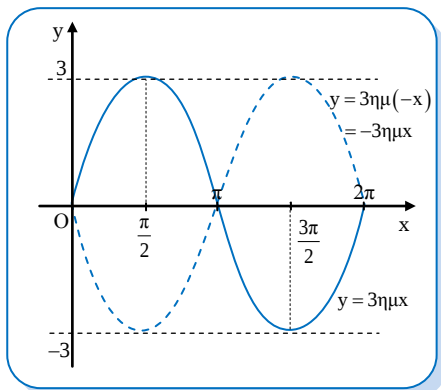
$$\text{και } \varepsilon\varphi\left(\gamma + \frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

ii) Η εξωτερική γωνία του τριγώνου που έχει γωνίες $\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}$ είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$.

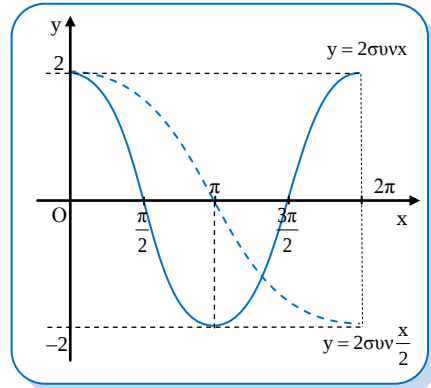
$$\text{iii)} \quad 2\hat{\beta} + 2\hat{\gamma} = \frac{\pi}{2}.$$

Τριγωνομετρικές Συνάρτησεις

58.



59.



60. i) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{7}$.

$$\text{Άρα, } f\left(\frac{\pi}{8}\right) < f\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και $\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{9}$.

$$\text{Άρα, } f\left(\frac{\pi}{10}\right) > f\left(\frac{\pi}{9}\right).$$

iii) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\frac{2\pi}{5} > \frac{3\pi}{10}$.

$$\text{Άρα, } f\left(\frac{2\pi}{5}\right) > f\left(\frac{3\pi}{10}\right).$$

$$61. \text{ i)} \quad \eta\mu 2x_1 < \eta\mu 2x_2$$

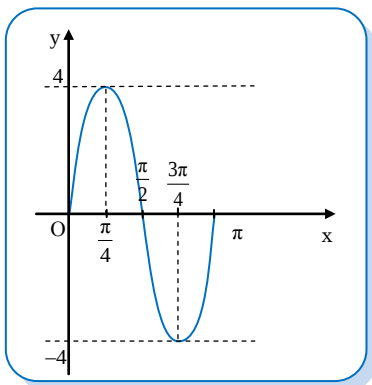
$$\text{ii)} \quad \sigma\upsilon\nu\left(3x_1 - \frac{\pi}{4}\right) > \sigma\upsilon\nu\left(3x_2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{iii)} \quad \varepsilon\varphi\left(x_1 - \frac{\pi}{3}\right) < \varepsilon\varphi\left(x_2 - \frac{\pi}{3}\right).$$

62. i) Μέγιστη τιμή 4.
και ελάχιστη τιμή -4 .

$$\text{ii)} \quad T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

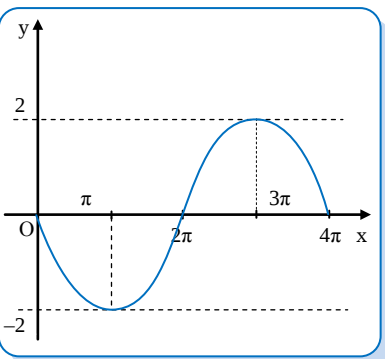
iii)



63. i) Μέγιστη τιμή 2
και ελάχιστη τιμή -2.

ii) $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

iii)



64. i) Έχουμε διαδοχικά
 $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$
 $-4 \leq 4\eta\mu x \leq 4$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$
 $-5 \leq 4\eta\mu x - 1 \leq 3$ για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

ii) Παρατηρούμε ότι

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \quad \text{και} \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -5.$$

Άρα, σύμφωνα με το ερώτημα i), η συνάρτηση f έχει μέγιστη τιμή

το $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ και ελάχιστη τιμή το

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -5.$$

65. i) $f(x + \pi) = |\eta\mu(x + \pi)|$
 $= |-\eta\mu x| = |\eta\mu x| = f(x)$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Μέγιστη τιμή 1 και ελάχιστη τιμή 0.

66. i) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

ii) $f(x) \geq f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$
για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

67. i) Έχουμε

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \left|\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &= |\sigma\upsilon\nu x| + |-\eta\mu x| \\ &= |\sigma\upsilon\nu x| + |\eta\mu x| \\ &= f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) $0 \leq |\eta\mu x| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
και $0 \leq |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Η εξίσωση $f(x) = 0$ ισοδύναμα
γράφεται $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 0$
 $\Leftrightarrow \eta\mu x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu x = 0$, αδύνατον.

iv) Η εξίσωση $f(x) = 2$ ισοδύναμα
γράφεται $|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x| = 2$
 $\Leftrightarrow |\eta\mu x| = 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x| = 1$,
αδύνατον.

68. i) $\alpha = -3$ και $\beta = 4$

ii) Έχουμε

$$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x + 4 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επίσης,

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu 2x \leq 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ή ισοδύναμα

$$-3 \leq -3\sigma\upsilon\nu 2x \leq 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και τελικά

$$1 \leq -3\sigma\upsilon\nu 2x + 4 \leq 7 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Από το ερώτημα i) παρατηρώντας

$$\text{ότι } f(0) = 1 \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7.$$

69. i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$

έχουμε

$$\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \Leftrightarrow 2\eta\mu x_1 < 2\eta\mu x_2$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu x_1 + 5 < 2\eta\mu x_2 + 5$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

ii) Αξιοποιώντας τη μονοτονία της συ-

νάρτησης f βρίσκουμε $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$.

70. i) $\alpha = 2$ και $\beta = -1$.

ii) Με τον ορισμό.

iii) Αξιοποιώντας τη μονοτονία της συ-

νάρτησης f βρίσκουμε $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \pi\right]$.

71. i) $\varepsilon\varphi A = 2$ και $\varepsilon\varphi B = 3$

ii) $\varepsilon\varphi A > \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}$

iii) $\frac{\pi}{2} > A > \frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{2} > B > \frac{\pi}{4}$.

Οπότε, $A + B > \frac{\pi}{2}$.

72. i) Σύμφωνα με τους τύπους Vieta έχουμε

$$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = 1 \text{ και } \varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B = -11$$

ii) $\varepsilon\varphi A \varepsilon\varphi B = -11 < 0$.

Οπότε, $\varepsilon\varphi A < 0$ ή $\varepsilon\varphi B < 0$.

iii) Αν η γωνία A είναι αμβλεία έχουμε $\varepsilon\varphi A < 0$.

Οπότε, από τη σχέση

$$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = 1$$

έχουμε

$$\varepsilon\varphi B = 1 - \varepsilon\varphi A > 1 = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4}.$$

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

73. i) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

iv) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

74. i) $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iv) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

75. i) $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}$

ή $x = (2\kappa + 1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iv) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$

$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$

ή $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

76. i) $x = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \frac{\kappa\pi}{2} - \frac{7\pi}{24}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iii) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z}$

iv) $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.

77. i) $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sigma\upsilon\nu 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 3x = \sigma\upsilon\nu 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2k\pi \pm 2x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \quad \text{ή} \quad x = \frac{2k\pi}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ii)} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \eta\mu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + x\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi - \frac{3\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{78. i)} \quad x = 2k\pi - \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{11\pi}{12}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii)} \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{79. i)} \quad \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ii)} \quad \varepsilon\varphi 3x - \varepsilon\varphi x = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 3x = \varepsilon\varphi x$$

$$\Leftrightarrow 3x = k\pi + x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{80. i)} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii)} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{81. i)} \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii)} \quad x = (2k+1)\pi \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{82. i)} \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή}$$

$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ii)} \quad x = 4k\pi + \pi \quad \text{ή} \quad x = 4k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ή} \quad x = 4k\pi + \frac{5\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{83. i)} \quad \text{Έστω ότι υπάρχει } x \text{ τέτοιος, ώστε}$$

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2.$$

$$\text{Όμως, } \eta\mu x \leq 1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επομένως, } \eta\mu x = 1 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x = 1$$

$$\text{που είναι αδύνατον.}$$

$$\text{ii)} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{84. i)} \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii)} \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{85. i)} \quad (2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x) = 1 - \eta\mu^2 x$$

$$\Leftrightarrow (2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(1 - \eta\mu x)$$

$$-(1 - \eta\mu x)(1 + \eta\mu x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \eta\mu x)(2\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ή} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{ii)} \quad \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - \eta\mu^4 x$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^4 x = (1 - \eta\mu^2 x)(1 + \eta\mu^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x - \sin^2 x (1 + \eta \mu^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^2 x - 1 - \eta \mu^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (2\sin^2 x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ ή } \sin x = 1 \text{ ή } \sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

86. i) $x = (2\kappa + 1)\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$

87. i) $x = \kappa\pi \text{ ή } x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

88. i) $2\eta\mu x \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu x$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \left(2\eta\mu \frac{x}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \text{ ή } \eta\mu \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \text{ ή } x = 4\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{ή } x = 4\kappa\pi + \frac{5\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

ii) Η εξίσωση ορίζεται για εκείνα τα x ώστε $\sin x \neq 0$.

$$4\eta\mu x \sin x = 3\epsilon\phi x$$

$$\Leftrightarrow 4\eta\mu x \sin x = 3 \frac{\eta\mu x}{\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \left(4\sin x - \frac{3}{\sin x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \text{ ή } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ή } \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \text{ ή } x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } x = 2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

89. i) $x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

90. i) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \kappa\pi \text{ ή } x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$

91. i) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

92. i) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{5}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = \kappa\pi + \frac{5\pi}{14}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

93. $x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \text{ ή } x = 3\pi - \frac{\pi}{4}$

$$\text{ή } x = 4\pi - \frac{\pi}{4}.$$

94. $x = \frac{\pi}{8} \text{ ή } x = \frac{5\pi}{8}.$

95. $x = 0 \text{ ή } x = \pi \text{ ή } x = 2\pi.$

96. Θέτουμε

$$\epsilon\phi x = u.$$

Οπότε, η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$3u^2 - u - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = -1 \text{ ή } u = \frac{4}{3}.$$

Έχουμε λοιπόν:

- $\epsilon\phi x = -1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi \left(-\frac{\pi}{4} \right)$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \right)$

συμπεραίνουμε ότι $x = -\frac{\pi}{4}.$

- $\epsilon\phi x = \frac{4}{3}$, αδύνατη αφού για κάθε

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ ισχύει}$$

$$\varepsilon\varphi x < \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1 < \frac{4}{3}.$$

Άρα, η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$x = -\frac{\pi}{4}.$$

97. i) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2$

$$= \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \\ = 1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) $2 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 1 + (1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)$

i) $= 1 + (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Έχουμε

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \cdot \eta\mu^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x (1 + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x) = 0.$$

Και επειδή, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα i) ισχύει

$$1 + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

η τελευταία εξίσωση ισοδύναμα γράφεται, $\eta\mu x = 0$ δηλαδή

$$x = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

98. $x = 0.$

99. Η εξίσωση γράφεται

$$\eta\mu \frac{\pi x}{2} = 2^{(x-1)^2}.$$

Τελικά $x = 1.$

100. i) $x = \frac{\pi}{6}$

ii) $\lambda = \frac{\alpha_5}{\alpha_6} = \frac{\eta\mu \frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}}{1}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

iii) $\alpha_1 = \left(\frac{2}{1+\sqrt{3}}\right)^4.$

101. i) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{B\Delta}{A\Delta} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$

Επομένως

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{B\Delta}{AB} \cdot \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{B\Delta}{B\Gamma}.$$

ii) $\omega = \frac{\pi}{3}.$

102. i) $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

ii) α) $\alpha = 3$

β) $M = 8$

iii) $x = 2\kappa + \frac{1}{6}$ ή $x = 2\kappa + \frac{5}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

103. i) $\alpha = 0$ και $\beta = 4$

ii) $x = \frac{\kappa\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

104. i) $\mathbb{R}$

ii) Έχουμε

$$f(x) \leq f(\pi) = \sqrt{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

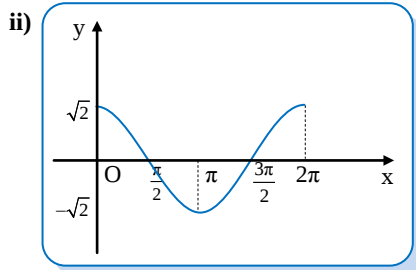
και

$$f(x) \geq f(0) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

iii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

iv) $x = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\pi.$

105. i) $\min f = -\sqrt{2}$
 $\max f = \sqrt{2}$



iii) α) $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

$$\beta) \Gamma\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \text{ και } \Delta\left(\frac{7\pi}{4}, 1\right).$$

$$106. \text{ i) } A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ και } B\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$$

$$\text{ii) } x = 0$$

$$\text{iii) } f(x) - 3 = 2\sin^2 x + \sin x - 3 \\ = 2(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{3}{2}\right) \leq 0$$

για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

iv) Από το ερώτημα iii) προκύπτει ότι η f έχει μέγιστη τιμή την $f(0) = 3$.

$$107. \text{ i) Έχουμε } f(x) = \Phi\left(x - \frac{\pi}{5}\right).$$

Άρα, η C_f προκύπτει με οριζόντια μετατόπιση της C_Φ κατά $\frac{\pi}{5}$ μονά-

δες προς τα δεξιά.

ii) Η φ έχει περίοδο $T = 2\pi$, μέγιστη τιμή το 4 και ελάχιστη το -4. Σύμφωνα με το ερώτημα i) τα παραπάνω ισχύουν και για την f .

iii) Έχουμε:

$$\bullet \quad f(x) = 4 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{10}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet \quad f(x) = -4 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{10}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$108. \text{ i) } A\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$$

$$\text{ii) } f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \eta\mu x \sin x - 2\eta\mu x - \sin x + 2$$

$$= (\eta\mu x - 1)(\sin x - 2) \geq 0$$

για κάθε $x \in [0, 2\pi]$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{\pi}{2}$.

$$109. \text{ i) } O(0, 0), A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \text{ και } B\left(-\frac{\pi}{4}, 1\right)$$

$$\text{ii) } A\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$$

$$\text{iii) } g(x) < 1 \Leftrightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4},$$

αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{Δηλαδή, } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος Γωνιών

$$110. \text{ i) Το πρώτο μέλος είναι ίσο με } \sin(70^\circ - 10^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

$$\text{ii) Το πρώτο μέλος είναι ίσο με } \frac{\sin 70^\circ \sin 10^\circ + \eta\mu 10^\circ \eta\mu 70^\circ}{\sin 50^\circ \sin 10^\circ - \eta\mu 10^\circ \eta\mu 50^\circ} \\ = \frac{\sin(70^\circ - 10^\circ)}{\sin(50^\circ + 10^\circ)} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 60^\circ} = 1.$$

$$111. \text{ i) Το πρώτο μέλος είναι ίσο με } \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii) Το πρώτο μέλος είναι ίσο με } \eta\mu\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$112. \text{ i) } \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ii) } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{iii) } 1 \quad \text{iv) } \sqrt{3}.$$

$$113. \text{ Παρατηρούμε ότι } 75^\circ = 45^\circ + 30^\circ \text{ και } 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ.$$

$$\text{i)} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{ii)} 2 + \sqrt{3}$$

$$\text{iii)} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

114. i) Έχουμε

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin\frac{\pi}{3}\sin x - \eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu x$$

και

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{\pi}{3}\sin x + \eta\mu\frac{\pi}{3}\eta\mu x.$$

ii) Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος είναι διαφορά τετραγώνων και αξιοποιούμε το ερώτημα **i)**.

115. i) Αξιοποιούμε τις ταυτότητες για το ημίτονο και συνημίτονο διαφοράς.

ii) Αξιοποιούμε τις ταυτότητες για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος.

$$\text{116. i)} \quad \sigma\upsilon\alpha = -\frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \eta\mu\beta = -\frac{3}{5}.$$

ii) 0

iii) -1

iv) 0.

117. i) Αξιοποιώντας τον τύπο για το $\eta\mu(\alpha + \beta)$ αποδεικνύουμε ότι

$$\sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\eta x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{ii)} \quad x = k\pi - \frac{3\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{118. i)} \quad \frac{4}{5} \quad \text{ii)} \quad \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$

$$\text{iii)} \quad -\frac{1}{7}.$$

119. i) Χρησιμοποιούμε τους τύπους αθροίσματος και διαιρούμε τους όρους του κλάσματος με $\sigma\upsilon\alpha \cdot \sigma\upsilon\eta\beta$.

ii) Το πρώτο μέλος είναι ίσο με

$$\frac{\sigma\upsilon\alpha - \eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\phi\alpha - 1$$

$$= \frac{1}{\epsilon\phi\alpha} - 1 = \frac{1 - \epsilon\phi\alpha}{\epsilon\phi\alpha}.$$

120. i) Κάθε όρος του κλάσματος είναι διαφορά τετραγώνων.

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \epsilon\phi 105^\circ \cdot \epsilon\phi 15^\circ \\ &= \epsilon\phi(60^\circ + 45^\circ) \cdot \epsilon\phi(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \frac{\epsilon\phi^2 60^\circ - \epsilon\phi^2 45^\circ}{1 - \epsilon\phi^2 60^\circ \cdot \epsilon\phi^2 45^\circ} = \frac{3 - 1}{1 - 3 \cdot 1} = -1. \end{aligned}$$

121. i) Αξιοποιούμε τους τύπους αθροίσματος.

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\alpha \cdot \sigma\upsilon\eta\beta} \\ &= \frac{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\eta\beta - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\alpha}{\sigma\upsilon\alpha \cdot \sigma\upsilon\eta\beta} = \epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta. \end{aligned}$$

Ομοίως για τα άλλα δύο κλάσματα και στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη.

$$\begin{aligned} \text{122. i)} \quad & \epsilon\phi^2\alpha - \epsilon\phi^2\beta = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\eta^2\alpha} - \frac{\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\eta^2\beta} \\ &= \frac{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\eta^2\beta - \eta\mu^2\beta\sigma\upsilon\eta^2\alpha}{\sigma\upsilon\eta^2\alpha \cdot \sigma\upsilon\eta^2\beta} \\ &= \frac{(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\eta\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha)(\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\eta\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\alpha)}{\sigma\upsilon\eta^2\alpha\sigma\upsilon\eta^2\beta} \\ &= \frac{\eta\mu(\alpha - \beta) \cdot \eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\eta^2\alpha\sigma\upsilon\eta^2\beta}. \end{aligned}$$

ii) Αξιοποιούμε τους σχετικούς τύπους για $\epsilon\phi(\alpha + \beta)$ και $\epsilon\phi(\alpha - \beta)$.

$$\text{123. i)} \quad \frac{3}{5} \quad \text{ii)} \quad \frac{5}{13}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{56}{65}.$$

124. i) Από τις δοθείσες ισότητες, υψώνοντας στο τετράγωνο και στη συνέχεια προσθέτοντας κατά μέλη.

ii) Από το δεύτερο μέλος, παρατηρώντας ότι

$$\frac{4}{5} = \sigma\upsilon\alpha + \sigma\upsilon\eta\beta$$

και

$$\frac{8}{5} = \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta.$$

125. Έχουμε

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha + \beta) &< \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta \\ \Leftrightarrow \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta &< \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta \\ \Leftrightarrow \eta\mu\alpha(\sigma\upsilon\nu\beta - 1) + \eta\mu\beta(\sigma\upsilon\nu\alpha - 1) &< 0 \end{aligned}$$

η οποία ισχύει αφού $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

και συνεπώς

$$\eta\mu\alpha > 0, \eta\mu\beta > 0, \sigma\upsilon\nu\beta - 1 < 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu\alpha - 1 < 0.$$

126. i) $\sigma\upsilon\nu\beta = \frac{12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{12}{13}$

και

$$\eta\mu\beta = \frac{5}{13}.$$

ii) Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\frac{12}{13}\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{5}{13}\eta\mu\alpha = 1.$$

Δηλαδή,

$$\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\beta\eta\mu\alpha = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = 1.$$

127. Έχουμε

$$\begin{aligned} &(\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta)^2 \\ &= \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta - 2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta + \\ &\quad + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\beta + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta \\ &= 1 + 1 + 2(\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta) \\ &= 2 + 2\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \\ &= 2 + 2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

128. Έχουμε

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = -1$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = -1 + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta + 1 = 2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha(1 + \varepsilon\varphi\beta) + (1 + \varepsilon\varphi\beta) = 2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi\alpha + 1)(1 + \varepsilon\varphi\beta) = 2\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta.$$

129. i) $\frac{\varepsilon\varphi(\alpha - \beta)}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi(\alpha - \beta)}{\varepsilon\varphi\alpha} = -\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = -1.$$

ii) Από το ερώτημα **i)** προκύπτει

$$\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = -\sigma\varphi\alpha$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Επομένως,

$$\beta = -\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως, $\beta \in (0, \pi)$.

130. i) $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = \sigma\varphi\gamma.$$

ii) Αξιοποιούμε το ερώτημα **i)** γράφο-

ντας $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\sigma\varphi\alpha}, \varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{\sigma\varphi\beta}$ και

$$\varepsilon\varphi\gamma = \frac{1}{\sigma\varphi\gamma}.$$

131. i) Αξιοποιούμε τον τύπο

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta.$$

ii) $x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

132. i) $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{5}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{7}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

133. i) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

134. i) $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = \kappa\pi$ ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$

135. $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

136. $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

137. i) Έχουμε

$$A + B + \Gamma = \pi.$$

Επομένως,

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}$$

και συνεπώς

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}\right).$$

ii) $\sigma\varphi(A + B) = \sigma\varphi(\pi - \Gamma).$

138. i) 1 ii) $\frac{3\pi}{4}.$

129. i) -1 ii) $\frac{\pi}{4}.$

140. Έχουμε

$$\frac{\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B} = 2\varepsilon\varphi A$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} + \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = 2\varepsilon\varphi A$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = 2\varepsilon\varphi A$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi A.$$

141. i) Έχουμε

$$\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma - \sigma\upsilon\nu B \eta\mu \Gamma = 1 - 2\sigma\upsilon\nu B \eta\mu \Gamma$$

δηλαδή

$$\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma + \sigma\upsilon\nu B \eta\mu \Gamma = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\eta\mu(B + \Gamma) = \eta\mu \frac{\pi}{2}.$$

ii) Η δοθείσα σχέση γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu B \eta\mu \Gamma = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, από τη σχέση

$$\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma + \sigma\upsilon\nu B \eta\mu \Gamma = 1$$

βρίσκουμε

$$\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\eta\mu B \sigma\upsilon\nu \Gamma - \sigma\upsilon\nu B \eta\mu \Gamma = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\eta\mu(B - \Gamma) = \eta\mu 0.$$

142. i) Από τη δοθείσα σχέση προκύπτει τελικά

$$\sigma\upsilon\nu(A + B) = 0$$

δηλαδή

$$\sigma\upsilon\nu(A + B) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}.$$

ii) $A = 60^\circ$ και $B = 30^\circ.$

143. i) Έχουμε

$$f(x) = 2 + 2\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{7}\right)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

Επίσης,

$$\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{7}\right) \leq 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

ii) Έχει και είναι ίση με 4.

144. i) Έχουμε

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{\frac{AB}{2}} = 2 \frac{A\Gamma}{AB} = 2\varepsilon\varphi B.$$

ii) Έχουμε

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3} \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{2}{3} \varepsilon\varphi B.$$

iii) Παρατηρούμε ότι $\varphi = \omega + \theta.$

Άρα, $\omega = \varphi - \theta$ και συνεπώς

$$\varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi(\varphi - \theta) = \frac{\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\theta}{1 + \varepsilon\varphi\varphi \cdot \varepsilon\varphi\theta}.$$

iv) Η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$\frac{4}{3} \sqrt{3} \varepsilon\varphi^2 B - 4\varepsilon\varphi B + \sqrt{3} \geq 0$$

η οποία είναι αληθής (τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 0$).

Η ισότητα ισχύει όταν

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- ν) Η συνάρτηση $\varepsilon\phi\chi$ είναι γνησίως
αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Έχουμε λοιπόν

$$\varepsilon\phi\omega \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega \leq \varepsilon\phi 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \omega \leq 30^\circ.$$

Σύμφωνα με το ερώτημα **iv)** η
ισότητα ισχύει όταν

$$\varepsilon\phi B = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

145. i) Έχουμε $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$
 $= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \eta\mu^2 \alpha \eta\mu^2 \beta$
 $= (1 - \eta\mu^2 \alpha) \cdot (1 - \eta\mu^2 \beta) - \eta\mu^2 \alpha \eta\mu^2 \beta.$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα **i)** έχουμε
 $f(x) = \sin\left(x + x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x - x - \frac{\pi}{3}\right)$
 $= \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
 $= \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$

Επομένως,

$$\max f = \frac{1}{2} \text{ και } \min f = -\frac{1}{2}.$$

- 146. i)** Αξιοποιώντας τον τύπο για το
 $\eta\mu(\alpha - \beta)$ αποδεικνύουμε ότι

$$2\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu x - \sqrt{3}\sin x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- 147. i)** Αξιοποιώντας τον τύπο για το
 $\eta\mu(\alpha + \beta)$ αποδεικνύουμε ότι

$$\sqrt{2}\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu x + \sin x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $x = \kappa\pi - \frac{3\pi}{8}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί της Γωνίας 2α

148. i) $\frac{1}{2}$ **ii)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
iii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **iv)** 1.

149. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta\mu^2 \frac{\pi}{12}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{12}} &= \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12} + \eta\mu^2 \frac{\pi}{12}}{\eta\mu^2 \frac{\pi}{12} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{12}} \\ &= \frac{1}{\eta\mu^2 \frac{\pi}{12} \sin^2 \frac{\pi}{12}} = \frac{4}{\left(2\eta\mu \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}\right)^2} \\ &= \frac{4}{\left(\eta\mu \frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 16. \end{aligned}$$

150. i) $\eta\mu 20^\circ = \eta\mu(30^\circ - 10^\circ).$

ii) $\frac{1}{\eta\mu 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 10^\circ} = \frac{\sin 10^\circ - \sqrt{3}\eta\mu 10^\circ}{\eta\mu 10^\circ \cdot \sin 10^\circ}$
 $= \frac{1}{2} \frac{2\eta\mu 20^\circ}{(2\eta\mu 10^\circ \sin 10^\circ)}$
 $= 4 \frac{\eta\mu 20^\circ}{\eta\mu 20^\circ} = 4.$

151. i) $\sin \frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{8}$

ii) $\eta\mu \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(2\eta\mu \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}\right)$
 $= \frac{1}{2} \eta\mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

iii) $\eta\mu^2 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{3\pi}{8} = \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} - \eta\mu^4 \frac{\pi}{8}$
 $= \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} \left(1 - \eta\mu^2 \frac{\pi}{8}\right)$
 $= \eta\mu^2 \frac{\pi}{8} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{8}$

$$= \frac{1}{4} \left(2\eta\mu\frac{\pi}{8} \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{1}{8}.$$

152. i) $\eta\mu\Gamma = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

και $\eta\mu 2\Gamma = \frac{1}{2}.$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\eta\mu 2\Gamma = \frac{1}{2}$$

δηλαδή

$$\eta\mu 2\Gamma = \eta\mu 30^\circ.$$

153. i) $\frac{9}{13}$ **ii)** $\frac{13\sqrt{10}}{50}$

iii) $\frac{44}{125}.$

154. i) $\frac{-3\sqrt{7}}{8}$ **ii)** $3\sqrt{7}.$

155. i) $\frac{33}{65}$ **ii)** $\frac{323}{325}.$

156. i) Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$5(2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1) + 3\sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 10\sigma\upsilon\nu^2\theta + 3\sigma\upsilon\nu\theta - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{5} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{2}, \text{ απορ.}$$

ii) $\eta\mu 2\theta = \frac{24}{25}, \sigma\upsilon\nu 2\theta = \frac{7}{25}$

και $\eta\mu 4\theta = \frac{336}{625}.$

157. i) Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$10\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{2}, \text{ απορ. ή } \sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}.$$

ii) $\eta\mu\alpha = \frac{4}{5}, \eta\mu 2\alpha = -\frac{24}{25},$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = -\frac{7}{25} \text{ και } \epsilon\varphi 2\alpha = \frac{24}{7}.$$

158. i) Από τη δοθείσα σχέση υψώνοντας στο τετράγωνο.

ii) $\frac{25}{12}.$

159. i) $-\frac{4}{3}$ **ii)** $-\frac{1}{7}$

iii) $\frac{31}{17}.$

160. i) Η δοθείσα σχέση γράφεται
 $(\epsilon\varphi\alpha + 1)^2 + (\epsilon\varphi\beta - 2)^2 = 0$

ii) $\epsilon\varphi 2\beta = -\frac{4}{3}$ και $\epsilon\varphi(\alpha + 2\beta) = 7.$

161. i) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ **ii)** $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

162. i) Από το πρώτο μέλος γράφοντας
 $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$

και $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$

ii) Έχουμε

$$\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\epsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi\frac{\pi}{4}\epsilon\varphi\alpha} = \frac{1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1 - \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \eta\mu 2\alpha}.$$

163. i) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha$

$$= (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha)$$

$$= \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu 2\alpha.$$

ii) $\frac{\eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)} = \frac{-\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2 \cdot 2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}}{4\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}} = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}.$$

164. i) $\frac{1 - 2\eta\mu^2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} \\
 &= \frac{1 - \epsilon\varphi\alpha}{1 + \epsilon\varphi\alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) &= \frac{1 + \epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi\alpha} \\
 &= \frac{1 + \eta\mu 2\alpha}{1 - 2\eta\mu^2\alpha} = \frac{1 + \eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}.
 \end{aligned}$$

165. i) Από το β' μέλος
 $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha.$

ii) Από το β' μέλος

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}.$$

166. i)
$$\frac{\eta\mu 2\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{2\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu^2\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)}$$

$$= \frac{2\eta\mu\frac{\theta}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}} = \epsilon\varphi\frac{\theta}{2}.$$

ii) Αξιοποιούμε τον τύπο

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}.$$

167. i) $\eta\mu\alpha = \eta\mu(2\alpha - \alpha)$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha + \alpha)$

168. i) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$2\epsilon\varphi\alpha = \epsilon\varphi 2\alpha \cdot (1 - \epsilon\varphi^2\alpha)$$

που ισχύει αφού

$$\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha}.$$

ii) Έχουμε

$$\epsilon\varphi 3\alpha = \epsilon\varphi(2\alpha + \alpha) = \frac{\epsilon\varphi 2\alpha + \epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi 2\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha}$$

Οπότε,

$$\epsilon\varphi 3\alpha(1 - \epsilon\varphi 2\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha) = \epsilon\varphi 2\alpha + \epsilon\varphi\alpha$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi 3\alpha - \epsilon\varphi 3\alpha \cdot \epsilon\varphi 2\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha$$

$$= \epsilon\varphi 2\alpha + \epsilon\varphi\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \epsilon\varphi 3\alpha - \epsilon\varphi 2\alpha - \epsilon\varphi\alpha \\
 &= \epsilon\varphi 3\alpha \cdot \epsilon\varphi 2\alpha \cdot \epsilon\varphi\alpha.
 \end{aligned}$$

169. i)
$$\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu 4\alpha - 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 3 &= 1 - 2\eta\mu^2 2\alpha - 4(1 - 2\eta\mu^2\alpha) + 3 \\ &= -2\eta\mu^2 2\alpha + 8\eta\mu^2\alpha \\ &= -2 \cdot 4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 8\eta\mu^2\alpha \\ &= 8\eta\mu^2\alpha \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \\ &= 8\eta\mu^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha = 8\eta\mu^4\alpha. \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} \frac{1}{\eta\mu 2\alpha} + \sigma\varphi 2\alpha &= \frac{1}{\eta\mu 2\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} \\ &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\varphi\alpha. \end{aligned}$$

170. i)
$$\begin{aligned} 1 - \epsilon\varphi^2\alpha &= 1 - \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned} \epsilon\varphi 2\alpha - \epsilon\varphi\alpha &= \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \\ &= \frac{\eta\mu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha} \\ &= \frac{\eta\mu(2\alpha - \alpha)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}. \end{aligned}$$

171. i)
$$\begin{aligned} \frac{2\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} &= \frac{2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha + 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} \\ &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2}} = \epsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

ii) Από το δεύτερο μέλος γράφοντας

$$\epsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}.$$

172. i)
$$\begin{aligned} \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \frac{\epsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \epsilon\varphi\alpha}{1 + \epsilon\varphi\frac{\pi}{4}\epsilon\varphi\alpha} = \frac{1 - \epsilon\varphi\alpha}{1 + \epsilon\varphi\alpha} \\ &= \frac{1 - \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1 + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}. \end{aligned}$$

ii) Αξιοποιούμε το ερώτημα i).

$$173. \text{ i) } \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}}{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}.$$

ii) Ομοίως με το ερώτημα i).

$$\Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu^2 x, \text{ που ισχύει.}$$

174. i) Αξιοποιούμε αρχικά την ταυτότητα «διαφορά κύβων».

$$\begin{aligned} \text{ii) } & (\sqrt{\epsilon\varphi\alpha} + \sqrt{\sigma\varphi\alpha})^2 \\ &= \epsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha + 2 \\ &= \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} + 2 \\ &= \frac{(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}. \end{aligned}$$

175. i) Έχουμε

$$\bullet \quad x \leq \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x \leq \frac{\pi}{4}, \text{ ισχύει}$$

$$\bullet \quad \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \geq 0, \text{ ισχύει.}$$

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως,

$$f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \leq \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu x.$$

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \eta\mu 2x} &= \sqrt{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= |\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x| \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \eta\mu 2x} &= \sqrt{(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2} \\ &= |\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, αξιοποιούμε το ερώτημα ii).

$$\begin{aligned} 176. \text{ i) } & \frac{1 + \eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} \\ &= \frac{1 + 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} - 1 + 2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + 2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} + 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\alpha}{2} - 1} \\ &= \frac{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} + \eta\mu \frac{\alpha}{2} \right)}{2\eta\mu \frac{\alpha}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} + \eta\mu \frac{\alpha}{2} \right)} = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

ii) Από το ερώτημα i) θέτοντας $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\text{βρίσκουμε } \epsilon\varphi \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

$$\begin{aligned} 177. \text{ i) } & \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{2\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha} \\ &= \frac{1 - 1 + 2\eta\mu^2 2\alpha}{2\eta\mu 2\alpha + 2\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \\ &= \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \epsilon\varphi\alpha. \end{aligned}$$

ii) Από το ερώτημα i) θέτοντας $\alpha = 15^\circ$ βρίσκουμε $\epsilon\varphi 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

178. i) α) Από το δεύτερο μέλος γράφοντας

$$\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu \frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2}}.$$

β) Ομοίως με το ερώτημα α).

ii) Από τη δοθείσα σχέση και αξιοποιώντας τα ερωτήματα α) και β) βρίσκουμε

$$\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = 1.$$

179. i) Έχουμε

$$\epsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \text{ και } \epsilon\varphi\beta = \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}.$$

ii) Η σχέση του ερωτήματος i) γράφεται

$$\begin{aligned}\sin^2\beta - 1 &= 2\sin^2\alpha - 1 \\ \Leftrightarrow -\eta\mu^2\beta &= \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

180. i) $\sin 4\beta = 1 - 2\eta\mu^2 2\beta$

$$\begin{aligned}&= 1 - 8\eta\mu^2\beta \cdot \sin^2\beta \\ &= 1 - 8\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu^2\beta) \\ &= 1 - 8\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu\alpha) \\ &= 1 - 8\eta\mu\alpha + 8\eta\mu^2\alpha.\end{aligned}$$

ii) $4(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$

$$\begin{aligned}&= 4(1 - 2\eta\mu^2\alpha - 1 + 2\eta\mu^2\beta) \\ &= 8(\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\alpha) \\ &= 8(\eta\mu\alpha - \eta\mu^2\alpha) \\ &= 8\eta\mu\alpha - 8\eta\mu^2\alpha \\ &\stackrel{i)}{=} 1 - \sin 4\beta.\end{aligned}$$

181. i) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4}$

ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$

182. i) $x = \kappa\pi$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = 4\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$

183. i) $x = 2\kappa\pi + \pi$ ή $x = 4\kappa\pi \pm \frac{4\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = 4\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$ ή $x = 4\kappa\pi + \frac{5\pi}{3}$

ή $x = 4\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z}.$

184. i) $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ή $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

185. i) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$ ή $2\kappa\pi \pm \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

186. i) $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = 2\kappa\pi$ ή $2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

187. i) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$

ii) $x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

188. i) $x = \kappa\pi$ ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

189. i) $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = \kappa\pi$ ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

190. i) $x = 2\kappa\pi$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$

ή $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = \kappa\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

191. i) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$4 + 2\eta\mu x \sin x + 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + \eta\mu^2 x + \sin^2 x +$$

$$+ 2\eta\mu x \sin x + 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + (\eta\mu x + \sin x)^2 + 2\sin^2 x = 0$$

ii) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

192. i) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$

ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ii) $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$

$$\text{ή } x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- 193. i)** Το πρώτο μέλος γράφεται

$$\begin{aligned} & 4 \left[(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \right] \\ &= 4(1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x) \\ &= 4 - 8\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x \\ &= 4 - 2(2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x)^2 \\ &= 4 - 2(\eta\mu 2x)^2 \\ &= 4 - (1 - \sigma\upsilon\nu 4x) \\ &= 3 + \sigma\upsilon\nu 4x. \end{aligned}$$

- ii)** Αξιοποιούμε το ερώτημα **i)** και βρίσκουμε

$$x = \kappa \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

194. i) $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2$
 $= \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$
 $= 1 + \eta\mu 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$

- ii)** Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} & 1 + \eta\mu 2x = 2\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x \\ & \stackrel{i)}{\Leftrightarrow} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 = 2(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \\ & \Leftrightarrow (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \\ & \text{ή } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 2, \text{ αδύνατη} \\ & \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -1 \\ & \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- 195. i)** Από το δεύτερο μέλος γράφοντας

$$\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 2\alpha$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 \alpha.$$

- ii)** Από το δεύτερο μέλος γράφοντας

$$\sigma\upsilon\nu 4\alpha = 1 - 2\eta\mu^2 2\alpha$$

$$\text{και } \sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1.$$

- iii)** Αξιοποιώντας τα ερωτήματα **i)** και **ii)** διαπιστώνουμε ότι η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sigma\upsilon\nu 4x = \frac{11}{10}$$

που είναι αδύνατη, αφού $\frac{11}{10} > 1$.

196. i) $\epsilon\phi 2\beta = \frac{2\epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi^2\beta}$

- ii)** Έχουμε

$$\epsilon\phi(\alpha + 2\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{4},$$

$$\kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Όμως, } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ και } 0 < 2\beta < \pi$$

$$\text{Άρα, } \frac{\pi}{2} < \alpha + 2\beta < 2\pi.$$

$$\text{Οπότε βρίσκουμε } \kappa = 1.$$

- 197. i)** Αρκεί να αποδείξουμε

$$\alpha_1 \cdot \alpha_3 = \alpha_2^2$$

ii) $\alpha = \frac{\pi}{4}.$

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Βλ. σελ. 144
2. Βλ. σελ. 144
3. Βλ. σελ. 146
4. Βλ. σελ. 146
5. Βλ. σελ. 162
6. Βλ. σελ. 162-163
7. Βλ. σελ. 177
8. Βλ. σελ. 177
9. Βλ. σελ. 178
10. Βλ. σελ. 179
11. Βλ. σελ. 186
12. Βλ. σελ. 205
13. Βλ. σελ. 205
14. Βλ. σελ. 205
15. Βλ. σελ. 235

16. Βλ. σελ. 235

17. Βλ. σελ. 235

18. Βλ. σελ. 261

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Λ
2. Λ
3. Σ
4. Σ
5. Λ
6. Λ
7. Σ
8. Σ
9. Λ
10. Λ
11. Σ
12. Σ
13. Λ
14. Σ
15. Σ
16. Σ
17. Σ
18. Σ
19. Λ
20. Σ
21. Λ
22. Σ
23. Λ
24. Λ
25. Λ
26. Σ
27. Σ

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

Α1. Βλ. θεωρία.

Α2. Βλ. θεωρία.

Α3. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος.

Θέμα Β

Β1. Έχουμε

$$3\sigma\upsilon\nu 2\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1) - 2\sigma\upsilon\nu\omega - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\sigma\upsilon\nu^2\omega - 2\sigma\upsilon\nu\omega - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = 1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{2}{3}$$

Όμως, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$.Β2. $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{5}}{3}$

και

$$\eta\mu 2\omega = 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

Β3. $\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu\omega$,

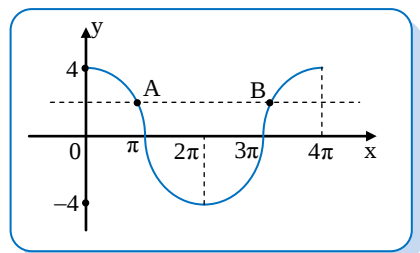
$$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \varepsilon\varphi\omega \text{ και}$$

$$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega.$$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε $8\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$.Γ2. Για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}$

με γραφική παράσταση



Γ3. Έχουμε

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 4k\pi + \frac{2\pi}{3} \text{ ή }$$

$$x = 4k\pi - \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Όμως, $x \in [0, 4\pi]$ και συνεπώς

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ ή } x = \frac{10\pi}{3}.$$

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι

$$\text{τα } A\left(\frac{2\pi}{3}, 2\right) \text{ και } B\left(\frac{10\pi}{3}, 2\right).$$

Γ4. Η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία

$$y = 2 \text{ στα διαστήματα } \left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ και}$$

$$\left(\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right]. \text{ Επομένως}$$

$$f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{10\pi}{3}, 4\pi\right].$$

Θέμα Δ**Δ1.** Έχουμε

$$x + y + \omega = 180^\circ \Leftrightarrow x + y = 180^\circ - \omega$$

Οπότε,

$$\varepsilon\varphi(x + y) = \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega.$$

Δ2. α) Έχουμε

$$\varepsilon\varphi\omega = -\varepsilon\varphi(x + y)$$

$$= -\frac{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y}{1 - \varepsilon\varphi x \varepsilon\varphi y} = \frac{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y}{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y - 1}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + 7}{\frac{4}{3} + 7 - 1} = 1.$$

Επομένως

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$$

και $\sin^2 x > 0$.

$$\text{Άρα } \sin x = \frac{3}{5}.$$

β) Έχουμε

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$$

και $\sin x > 0$.

$$\text{Άρα, } \sin x = \frac{3}{5}.$$

γ) Έχουμε $x = \varphi + \varphi = 2\varphi$ και συνεπώς

$$\sin 2\varphi = \sin x = \frac{3}{5}.$$

Όμως,

$$\eta\mu^2 \varphi = \frac{1 - \sin 2\varphi}{2} = \frac{1 - \frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5}.$$

Και επειδή $\eta\mu\varphi > 0$, συμπεραίνου-

$$\text{με ότι } \eta\mu\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Διαγώνισμα 2**Θέμα Α****A1.** Βλ. Θεωρία**A2.** Βλ. θεωρία.**A3.** Βλ. θεωρία.**A4. α)** Λάθος**β)** Λάθος**γ)** Σωστό**δ)** Λάθος**ε)** Λάθος.**Θέμα Β****B1.** $\eta\mu(\pi - \alpha) = \eta\mu\alpha$

$$\text{και } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \eta\mu\alpha.$$

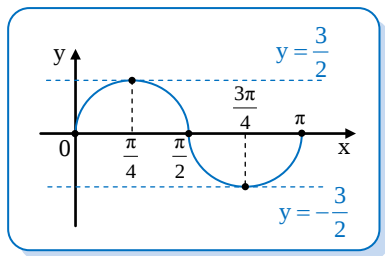
B2. $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{4}{3}$ **B3.** $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sin \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5}$ **B4.** $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Θέμα Γ**Γ1.** Έχουμε

$$T = \frac{2\pi}{\beta} \Leftrightarrow \beta = 2$$

και

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2}.$$

Γ2. Έχουμε $f(x) = \frac{3}{2} \eta \mu 2x$.**Γ3.** Δύο ρίζες (γραφικά).**Γ4.** Έχουμε

$$\frac{3\pi}{12} < \frac{5\pi}{12} < \frac{7\pi}{12} < \frac{9\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{5\pi}{12} < \frac{7\pi}{12} < \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{και } f \downarrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right].$$

$$\text{Άρα, } f\left(\frac{5\pi}{12}\right) > f\left(\frac{7\pi}{12}\right).$$

Θέμα Δ

$$\Delta 1. \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \eta \quad x = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\Delta 2. \quad \text{Έχουμε } \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{και } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{3}\right).$$

$$\Delta 3. \quad f(x) = (2\sin x - 1)^2 + 1 \geq 1$$

για κάθε $x \in (0, 2\pi)$.

$$\Delta 4. \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Πολυώνυμα

Πολυώνυμα

1. i) $\alpha = \beta = 0$
 ii) $\alpha = 0$ και $\beta = -4$
 iii) $\alpha = 5$ και $\beta = 1$.
2. $\kappa = 1$ και $\lambda = 3$.
3. i) $\mu = -1$
 ii) $\mu = 0$ ή $\mu = 1$.
4. $\alpha = -2$ και $\beta = 1$.
5. i) $\alpha = 7$ και $\beta = -3$.
 ii) $P(-2) = -17$.
6. i) $P(1) = 0$.
 ii) $\lambda = 4$ και $\mu = -3$.
7. i) • 3ου βαθμού, αν $\mu \neq 0, -2, 2$.
 • 1ου βαθμού, αν $\mu = 2$.
 • 0ου βαθμού, αν $\mu = 0$ ή $\mu = -2$.
 ii) α) $Q(x) = 8x^2 - 5x - 3$
 β) $\alpha = 8, \beta = 3$ και $\gamma = -3$.
8. i) • 2ου βαθμού, αν $\mu \neq 0$
 • 1ου βαθμού, αν $\mu = 0$
 ii) $P(x) = x^2 - 2x + 2$
9. i) $\alpha = 2$ και $\beta = 3$.
 ii) $\alpha = 1$ και $\beta = 1$.
10. $Q(4) = P(P(4)) = P(4) = 4$.
11. i) Από τις δοθείσες σχέσεις βρίσκουμε
 $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = -\frac{1}{2}$.
 ii) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$
 και $P(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)$.
 iii) $P(2) - P(1) = 1$
 $P(3) - P(2) = 2$
 $\dots$
 $P(v+1) - P(v) = v$.

Από τις παραπάνω σχέσεις προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

12. i) $P(x) = x^2$
 ii) $P(1) - P(0) = 1$
 $P(2) - P(1) = 3$
 $P(3) - P(2) = 5$
 $\dots$
 $P(v+1) - P(v) = 2v + 1$

Από τις παραπάνω σχέσεις προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

13. i) $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

$$= \frac{x(2x-1)(x-1)}{6}$$

 ii) $\frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$.

Διαίρεση Πολυωνύμων

14. i) $5x^3 + 3x^2 - 8x + 12$
 $= (x^2 + 2) \cdot (5x + 3) - 18x + 6$
 ii) $x^4 - 20 = (x+2) \cdot (x^3 - 2x^2 + 4x - 8) + 4$
 iii) $x^4 - 32 = (x-2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) - 16$
 iv) $x^6 = (x^2 - 1)^2 \cdot (x^2 + 2) + 3x^2 - 2$.
15. i) $8x^3 - 11x^2 + 7x - 3$
 $= (x-2)(8x^2 + 5x + 17) + 31$
 ii) $6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 2x + 7$
 $= (3x^2 - 4x)(2x^3 + x^2) - 2x + 7$
16. i) $\pi(x) = x^4 + 1$ και $\nu(x) = 4x + 3$.
 ii) $\pi(x) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5}$

και $v(x) = 4x + 3$.

iii) $\pi(x) = x^2 + x - 2$

και $v(x) = 4x + 3$.

17. i) $P(-1) = -17$

ii) $P(1) = 3$

iii) $P(0) = -2$.

18. i) $P(x) = x^4 + 3x^2 + 5 > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) $P(x) = -2x^6 - 4x^2 - 1 < 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) $P(x) = x^4 + x^2 - 2x + 3$
 $= x^4 + (x^2 - 2x + 1) + 2$
 $= x^4 + (x - 1)^2 + 2 > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. i) $P(2) = 1$

ii) Παρατηρούμε ότι
 $P(x) < 0$ για κάθε $x < 0$.

20. i) $\pi(x) = x^2 + 6x + 5$ και $v = 21$

ii) $\pi(x) = x^3 + x^2 + x - 6$ και $v = 14$

iii) $\pi(x) = x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 24x + 72$
και $v = 216$

iv) $\pi(x) = 12x^2 + x - \frac{8}{3}$ και $v = -\frac{25}{9}$.

21. i) $P(1) = 0$

ii) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε
 $P(1 - \sqrt{2}) = 0$ και $P(1 + \sqrt{2}) = 0$.

22. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε

$$\pi(x) = x^4 + \sqrt{2}x^3 + 4x^2 + (5 + 4\sqrt{2})x + 5\sqrt{2}$$

και

$$v = -1.$$

23. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε

$$P(3 + \sqrt{7}) = 4.$$

24. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε

$$P(1 - \sqrt{2}) = 4 + \kappa.$$

Όμως,

$$P(1 - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 4 + \kappa = 0$$

$$\Leftrightarrow \kappa = -4.$$

25. i) $P(x) = (x - 1) \cdot (4x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)$

ii) Παρατηρούμε ότι $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Επίσης, το πηλίκο

$$\pi(x) = 4x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$$

της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$

διαίρεται με το $x - 1$.

iii) $\pi_1(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

26. i) $P(-1) = 0$.

ii) Το πηλίκο $\pi(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ διαιρείται με το $x - 3$.

iii) $\pi_1(x) = x^2 - 1$.

27. i) Με απαγωγή σε άτοπο.

ii) $\rho = 2$.

iii) $P(0) = -20$

iv) Από τις σχέσεις $P(1) = -21$ και
 $\alpha + 10 = 2\beta$ βρίσκουμε $\alpha = 4$ και
 $\beta = 7$. Επομένως

$$P(x) = 4x^3 - x^2 - 4x - 20$$

$$= (x - 2)(4x^2 + 7x + 10).$$

28. $P(1) = \alpha - 1$

και $Q(2) = 2(\alpha - 1)(\alpha + 1)$.

Επομένως, αν $P(1) = 0$, τότε $\alpha = 1$ και συνεπώς $Q(2) = 0$. Αν $Q(2) = 0$, τότε $\alpha = 1$ ή $\alpha = -1$. Προφανώς, αν $\alpha = -1$, τότε $P(1) \neq 0$. Δηλαδή, το αντίστροφο δεν ισχύει.

29. i) $\lambda = -8$

ii) $P(4) = 0$

και $\pi(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 8$.

$$\text{iii)} \pi(x) = (x-4)(x^2+2).$$

$$\text{Επομένως, } P(x) = (x-4)^2 \cdot (x^2+2).$$

$$30. \text{ i)} P(2) = 0$$

$$\text{ii)} \alpha = -4 \text{ και } \beta = 5.$$

$$\begin{aligned} \beta) P(x) &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \\ &= (x-1) \cdot (x^2 - 3x + 2) \\ &= (x-1)^2 \cdot (x-2) \end{aligned}$$

$$31. \text{ i)} P(2) = 25 \text{ και } P(-2) = -3.$$

$$\text{ii)} \alpha = 3 \text{ και } \beta = -25.$$

$$\text{iii)} \pi(x) = x^2 + x + 9.$$

$$32. v(x) = 2x - 2.$$

$$33. \text{ i)} P(2) = 0 \text{ και } P(3) = 1.$$

$$\text{ii)} v(x) = x - 2.$$

$$34. \text{ i)} \lambda = -1.$$

$$\text{ii)} Q(x) = P(x) \cdot (2x - 3)$$

$$35. \text{ i)} v(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\text{ii)} v(x) = (x-2)^2 + 1 \geq 0 + 1 = 1$$

$$\text{iii)} \alpha = 2.$$

$$36. \text{ i)} P(\sin^2 \alpha) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} P(-1) &= -1 - 2 - \sin^2 \alpha (2 + \eta^2 \alpha) - \sin^4 \alpha \\ &= -3 - \sin^2 \alpha (2 + 1 - \sin^2 \alpha) - \sin^4 \alpha \\ &= -3 - 3\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^4 \alpha \\ &= -3 - 3\sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \max v = -3 \text{ και } \min v = -6.$$

$$37. \text{ i)} P(1) = 0$$

$$\text{ii)} v(x) = (\alpha + 3)x + (\beta - 2)$$

$$\text{iii)} \alpha = -3 \text{ και } \beta = 2.$$

$$38. \text{ i)} \pi(x) = \alpha x^3 + (\alpha + \beta)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha + \beta$$

$$\text{και } v = \alpha + \beta + 1$$

$$\text{ii)} \alpha = 3 \text{ και } \beta = -4.$$

$$39. \text{ i)} P(2) = 8$$

$$\text{ii)} v = 72$$

$$\text{iii)} \alpha) P(1) = 0$$

$$\beta) \text{ Εκτελούμε τη διαίρεση}$$

$$P(x) : (x-1) \text{ με τη βοήθεια}$$

$$\text{του σχήματος Horner.}$$

$$\text{iv)} \alpha = 1, \beta = 5 \text{ και } \gamma = 4.$$

$$40. \text{ i)} \alpha = 1 \text{ και } \beta = 4.$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} x^3 - 4x^2 + 4x - 4 \\ = (x^2 - 5x + 4)(x + 1) + 5x - 8 \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \text{ Αξιολογούμε αρχικά το ερώτημα ii) και στη συνέχεια το ερώτημα i).}$$

$$41. \text{ Έχουμε}$$

$$Q(2) = P(P(2)) - 2 = P(3) - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{και}$$

$$Q(3) = P(P(3)) - 3 = P(2) - 3 = 3 - 3 = 0.$$

$$42. \text{ i)} P(x) = x^2 - x$$

$$\text{ii)} \alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$43. \text{ i)} \text{ Έχουμε}$$

$$P(2) = (-1)^{2\mu} + 0^\mu - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{και } P(3) = 0^{2\mu} + 1^\mu - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{ii)} \pi(x) = x^2 - 7x + 14.$$

$$44. \text{ i)} P(1) = v - (v + 1) + 1 = 0$$

$$\text{ii)} \pi(x) = 3x^3 - x^2 - x - 1.$$

$$45. \text{ Έχουμε } x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

$$\text{Επίσης, } P(1) = 0 \text{ και } P(-1) = 0.$$

$$46. \text{ Έχουμε}$$

$$P(x) = x^{v+1}(x-1) + (x-1)(x-2)$$

$$= (x-1)(x^{v+1} + x - 2)$$

$$= (x-1)Q(x)$$

$$\text{όπου } Q(x) = x^{v+1} + x - 2.$$

$$\text{Επίσης, } Q(1) = 0.$$

Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

$$47. \text{ i)} P(-1) = 6$$

$$\text{ii)} P(2) = 0$$

$$\text{iii)} x = 2 \text{ ή } x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$48. \text{ i)} \pi(x) = 2x - 1 \text{ και } v(x) = 2x - 1$$

$$\text{ii)} x = \frac{1}{2}.$$

$$49. \text{ i)} P(x) = (x^2 - 1)(3x - 2) - 3x + 2$$

$$\text{ii)} P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(3x - 2) - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(3x - 2) - (3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \text{ ή } x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ή } x = \pm\sqrt{2}$$

$$50. \text{ i)} P(x) = (x^2 - 2)(x^2 + x - 1) + x$$

$$\text{ii)} x = \pm\sqrt{2} \text{ ή } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$51. \text{ i)} \alpha = 2$$

$$\text{ii)} x = 2.$$

$$52. \text{ i)} \lambda = \pm 1 \text{ ή } \lambda = \pm 2$$

$$\text{ii)} x = \pm 1 \text{ ή } x = \pm 2.$$

$$53. \text{ i)} \alpha = 2 \text{ και } \beta = -5$$

$$\text{ii)} x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = 1.$$

$$54. \text{ i)} P(1) = 7 \Leftrightarrow 1 + \alpha - 2 + 3 = 7 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

$$\text{ii)} P(x) = (x^2 - x)(x^2 + 6x + 6) + 4x + 3$$

$$\text{iii)} P(x) = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)(x^2 + 6x + 6) +$$

$$+ 4x + 3 = 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x)(x^2 + 6x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

$$\text{ή } x = -3 + \sqrt{3} \text{ ή } x = -3 - \sqrt{3}$$

$$55. \text{ i)} \text{ Από τη σχέση } P(-1) = 0 \text{ προκύπτει}$$

ότι

$$\alpha - \beta = -5 \quad (1)$$

Η σχέση $\alpha^2 - \beta^2 = 15$ γράφεται

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 15$$

$$\Leftrightarrow -5(\alpha + \beta) = 15$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -3 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\alpha = -4 \text{ και } \beta = 1.$$

$$\text{ii)} x = -1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3.$$

$$56. \text{ i)} \alpha = 3 \text{ και } \beta = 1$$

$$\text{ii)} x = 1 \text{ ή } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$55. \text{ i)} P(1) = 1.$$

$$\text{ii)} x = -1.$$

$$58. \text{ i)} \alpha = -1 \text{ και } \beta = -3.$$

$$\text{ii)} x = \pm 1 \text{ ή } x = \frac{5}{2}.$$

$$59. \text{ i)} P(0) = v.$$

$$\text{ii)} x = -1 \text{ ή } x = 2.$$

$$60. \text{ i)} \alpha = 1 \text{ και } \beta = 2$$

$$\text{ii)} P(x) = x^4 + (x + 1)^4 > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$61. \text{ i)} \alpha = -1, \beta = -2 \text{ και } \gamma = -1$$

$$\text{ii)} \alpha) \text{ Έχουμε } P(-1) = 9$$

$$\text{και } G(2) = 0.$$

$$\beta) P(x) = (2x + 1)(-x^2 + x - 4) + 3$$

$$\gamma) x = -\frac{1}{2}.$$

$$62. \text{ i)} \alpha = 5 \text{ και } \beta = 1.$$

$$\text{ii)} P(x) = x^2(x - 2)(x + 6) + 17x^2 + 1$$

$$\text{iii)} P(x) = x^2(x^2 + 4x + 5) + 1 > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$63. \text{ i)} \alpha = -20 \text{ και } \beta = -9$$

$$\text{ii)} \text{ Αξιολογούμε το ερώτημα i)}$$

$$\text{iii)} x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

64. i) $\alpha = 9$ και $\beta = 0$
 ii) $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = \pm 3$
 iii) $Q(x) = x^2 - x - 2$.
65. i) $x = 1$ ή $x = 2$
 ii) $x = -5$ ή $x = -4$ ή $x = -2$
 ή $x = -1$.
66. i) $P(x) = (x^2 + x + 1)(\alpha x + \beta)$.
 Από τις σχέσεις $P(0) = 2$ και $P(2) = 0$ βρίσκουμε $\alpha = -1$ και $\beta = 2$. Επομένως
 $P(x) = (x^2 + x + 1)(-x + 2)$.
 ii) $x = 0$ ή $x = -1$.
67. i) $x = 1 \pm \sqrt{2}$
 ii) Έχουμε
 $x - P(1 + \sqrt{2}) + 3 + \sqrt{2}$
 $= x - 4 + 3 + \sqrt{2}$
 $= x - 1 + \sqrt{2} = x - (1 - \sqrt{2})$
 Άρα, το ζητούμενο υπόλοιπο είναι
 $u = P(1 - \sqrt{2}) = 4$.
68. i) $P(1) = 0$
 ii) $P(x) = (x - 1)(2x^2 + 4x + \eta\mu\alpha)$.
 Το τριώνυμο $2x^2 + 4x + \eta\mu\alpha$ έχει διακρίνουσα
 $\Delta = 16 - 8\eta\mu\alpha = 8(2 - \eta\mu\alpha) > 0$.
69. i) $P(0) = P(2) = 2$
 ii) α) Το σημείο $A(2, 2)$
 β) $u(x) = 2$.
70. Έχουμε
 $P(x) = (x^3 - 9)\pi(x) + \pi(x)$
 $= (x^3 - 8)\pi(x)$.
 Άρα, η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, την $x = 2$.
71. i) $x = -3$.
 ii) $x = -1$ ή $x = 2$.
72. i) $x = 1$ ή $x = -2$
 ii) $x = -3$.
73. i) Με απαγωγή σε άτοπο
 ii) Με απαγωγή σε άτοπο.
74. i) Για κάθε $x < 0$ έχουμε
 $P(x) < -6 < 0$.
 ii) 2 και 3
75. i) $\alpha = 1$
 ii) $x = -1$.
76. i) $P(-1) = P(1) = 0$
 ii) $x = \frac{1}{4}$ ή $x = \pm 1$.
77. i) Οι αριθμοί -1 και -2
 ii) $\alpha = 2$ και $\beta = 7$
 iii) $x = -2$ ή $x = -1$ ή $x = -\frac{1}{2}$.
78. i) $\kappa = -2$ και $\lambda = 2$
 ii) $x = -2$
79. i) $\alpha = -2$ και $\beta = 2$
 ii) $x = \pm 1$ ή $x = 1 \pm \sqrt{2}$.
80. i) $P(0) = 3$ και $Q(0) = 2$.
 ii) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $P(x) = 0$ και $Q(x) = 0$.
 Άρα, οι πιθανές ακέραιες ρίζες της είναι οι πιθανές κοινές ακέραιες ρίζες των πολωνύμων $P(x)$ και $Q(x)$. Δηλαδή, οι κοινοί διαιρέτες των σταθερών όρων τους 3 και 2.
81. i) Με απαγωγή σε άτοπο, παρατηρώντας ότι το 2 δεν διαιρεί το 3.
 ii) $\alpha = \frac{3}{4}$ και $\beta = 3$.
82. i) $P(x) = (x - \rho)\Pi(x)$.
 Επομένως,
 $P(1) = (1 - \rho)\Pi(1)$
 και $P(2) = (2 - \rho)\Pi(2)$.

- Άρα, $P(1) \cdot P(2)$
 $= (1-p)(2-p)\Pi(1)\Pi(2)$
δηλαδή, $3 = (p-1)(p-2)\Pi(1)\Pi(2)$.
- ii)** Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι ο p είναι ακέραιος. Επομένως, από τη σχέση που αποδείξαμε στο ερώτημα **i)** συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $p-1$ και $p-2$ είναι διαιρέτες του 3. Αυτό όμως είναι αδύνατον, αφού οι αριθμοί $p-1$ και $p-2$ είναι διαδοχικοί αριθμοί.
- 83.** $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$
και
 $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (2, +\infty)$.
- 84.** $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$
και
 $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
- 85.** $P(x) < 0$
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, 3) \cup (3, 5) \cup \left(\frac{17}{3}, +\infty\right)$
και
 $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[5, \frac{17}{3}\right)$.
- 86.** $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$
και
 $P(x) > 0$
 $\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup \left[0, \frac{1}{2}\right)$.
- 87.** $P(x) < 0$
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 3) \cup (4, +\infty)$
και
 $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1) \cup (3, 4)$.
- 88. i)** $x \in \left(2, \frac{7}{3}\right) \cup (8, +\infty)$
ii) $x \in \left(-\frac{1}{4}, 3\right) \cup (3, 5) \cup (5, +\infty)$.
- 89. i)** $x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$
ii) $x \in \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)$.
- 90. i)** $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$
ii) $x \in (-3, 1)$.
- 91. i)** $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$
ii) $x \in (3, +\infty)$.
- 92. i)** $x \in (1, 8)$.
ii) $x \in (-2, -1) \cup (0, 1)$.
- 93. i)** $x^3 + 3x^2 - 3x + 4 > 0$
 $\Leftrightarrow (x+4)(x^2 - x + 1) > 0$
 $\Leftrightarrow x \in (-4, +\infty)$.
ii) $x^3 < 5x^2 - 7x + 3$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x^2 - 2x + 1) < 0$
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3)$.
- 94. i)** $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 > 0$
 $\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(x - 2) > 0$
 $\Leftrightarrow x \in (1 - \sqrt{2}, 2) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$.
ii) $x^5 \leq 3x^4 - x + 3$
 $\Leftrightarrow (x-3)(x^4 + 1) \leq 0$
 $\Leftrightarrow x \in (-\infty, 3]$.
- 95. i)** $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
ii) $x \in (1, 2)$.
- 96. i)** $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{3}, 4\right]$
ii) $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$.
- 97. i)** $x \in (-5, 0) \cup (1, 3) \cup (5, +\infty)$
ii) $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 3] \cup [4, 5]$.
- 98.** $x \in (1, +\infty)$.
- 99. i)** $|a| + |\beta| = |\alpha + \beta|$
 $\Leftrightarrow (|a| + |\beta|)^2 = |\alpha + \beta|^2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| = (\alpha + \beta)^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \\ &\Leftrightarrow 2|\alpha\beta| = 2\alpha\beta \Leftrightarrow |\alpha\beta| = \alpha\beta \\ &\Leftrightarrow \alpha\beta \geq 0. \end{aligned}$$

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} &|x-2| + |x+2| = 2|x| \\ &\Leftrightarrow |x-2| + |x+2| = |2x| \\ &\Leftrightarrow |x-2| + |x+2| = |(x-2) + (x+2)| \\ &\stackrel{i)}{\Leftrightarrow} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty). \end{aligned}$$

100. i) Αν $\lambda \neq 1$, το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού. Αν $\lambda = 1$, $P(x) = 2x - 1$ και είναι 1ου βαθμού.

ii) Για $\lambda = 2$ έχουμε

$$P(x) = x^3 + 3x + 1$$

και

$$\begin{aligned} &x^2(x-\alpha) + x(x+\beta) + x + 1. \\ &= x^3 + (1-\alpha)x^2 + (\beta+1)x + 1 \end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{cases} 1-\alpha=0 \\ \beta+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

iii) $P(x) < 3 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x + 3 < 3$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 4x < 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0, \text{ αφού } 2x^2 + 4 > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

101. i) $P(1) = 0$ και $P(2) = 6$.

ii) $x = 2 - \sqrt{3}$ ή $x = 1$

$$\text{ή } x = 2 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 4.$$

iii) $x \in (2 - \sqrt{3}, 1) \cup (2 + \sqrt{3}, 4)$

102. i) Έχουμε

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4 \quad (1)$$

και

$$P(2) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = 2 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε

$$\alpha = -2 \text{ και } \beta = 6.$$

ii) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$.

Γνωρίζουμε ότι $P(1) = 0$.

1	-2	-2	6	-3	1
	1	-1	-3	3	
1	-1	-3	3	0	

Άρα

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^3 - x^2 - 3x + 3) \\ &= (x-1)[x^2(x-1) - 3(x-1)] \\ &= (x-1)(x-1)(x^2 - 3) \\ &= (x-1)^2(x^2 - 3) \end{aligned}$$

Οπότε,

$$P(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (διπλή ρίζα)} \text{ ή } x = \pm\sqrt{3}$$

iii) $x \in (-\sqrt{3}, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

103. i) $P(2) = 8 - 4\alpha + 4\alpha - 8 = 0$.

ii) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε

$$P(x) = (x-2)[x^2 + (2-\alpha)x + 4]$$

Οπότε, οι ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 + (2-\alpha)x + 4$. Αξιοποιώντας τους τύπους του Vieta η σχέση

$$\rho_1 + \rho_2 = 5$$

γράφεται

$$-\frac{(2-\alpha)}{1} = 5$$

$$\Leftrightarrow -2 + \alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 7.$$

Επομένως,

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 5x + 4).$$

Άρα,

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 5x + 4) > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (1, 2) \cup (4, +\infty).$$

104. i) $P(1) = -20, P(0) = 5$ και $P(-1) = 12$.

ii) $\alpha = -10, \beta = -16$ και $\gamma = 5$.

iii) $P(x) + 4(2x+1)^2 = x^4 + 6x^2 + 9 > 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Σύμφωνα με το ερώτημα **iii)** έχουμε

$$P(x) = (x^2 + 3)^2 - 4(2x + 1)^2$$

$$= (x^2 + 3)^2 - (4x + 2)^2$$

$$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 + 4x + 5)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως,

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{ή } x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

105. i) $P(2) = 0$

ii) $\alpha = -5$ και $\beta = 8$

iii) $x \in (-\infty, 1)$.

106. i) Εκτελούμε τη διαίρεση

$$P(x) : (x^2 - 4x + 1)$$

και διαπιστώνουμε ότι είναι τέλεια.

Μάλιστα, ισχύει

$$P(x) = (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1).$$

ii) $x \in (1 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{3})$.

107. i) Εκτελούμε τη διαίρεση

$$P(x) : (x^2 - 6x + 8)$$

και βρίσκουμε πηλίκο

$$\pi(x) = 2x + 1$$

και υπόλοιπο

$$v(x) = (2 - 2\beta) + (\alpha - \beta).$$

Το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x^2 - 6x + \beta$ αν και μόνο αν το $v(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Δηλαδή $2 - 2\beta = 0$ και

$$\alpha - \beta = 0. \text{ Επομένως, } \beta = 1 \text{ και } \alpha = 1.$$

ii) Αξιοποιώντας το ερώτημα **i)** έχουμε

$$P(x) = (2x + 1)(x^2 - 6x + 1).$$

Τελικά, οι λύσεις της ανίσωσης

$$P(x) < 0 \text{ είναι οι αριθμοί}$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3 - \sqrt{8}, 3 + \sqrt{8}).$$

108. i) $P(x) = (x^2 + x) \cdot [x^2 + (a-1)x + 2] + a + 2$

ii) $\alpha = -2$

iii) $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x^2 + x)(x^2 - 3x + 2) < 0$

$$\Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, 2).$$

109. i) $\alpha = -2$ και $\beta = -1$

ii) $x = \pm 1$ ή $x = 2$.

iii) $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

110. i) $P(x) = (x^2 - 6x + 9)(x^6 - 1) + (a-6)x + \beta + 9$

ii) $\alpha = 6$ και $\beta = -9$

iii) α) $x = -1$ ή $x = 1$ ή $x = 3$

β) $x \in (-1, 1)$.

111. i) $\alpha = -5$ και $\beta = 7$

ii) $x = 2$ ή $x = 3$

iii) $x \in (2, 3)$.

112. i) $\pi(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$$\text{και } v = 4$$

ii) $\pi(-1) = 0$ και $\pi_1(x) = x^2 - 5x + 6$

iii) $x \in (-2, -1) \cup (2, 3)$.

113. i) Με απαγωγή σε άτοπο

ii) α) $P(-1) = P(-2) = 0$

β) $x \in (-\infty, 0)$.

114. i) $\alpha = -7$ ή $\alpha = 3$

ii) $x \in (-\infty, 1)$.

115. i) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Τότε το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 3$$

έχει ακέραιους συντελεστές και πιθανές ακέραιες ρίζες $\pm 1, \pm 3$ που

είναι άτοπο, αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+2$ και συνεπώς έχει ρίζα το -2 .

ii) α) Έχουμε

$$P(-2)=0 \text{ και } P(1)=6.$$

β) $x = -2$ ή $x = -3$ ή $x = \frac{1}{2}$.

γ) $x < 1$.

**Εξισώσεις και Ανισώσεις
που ανάγονται σε πολυωνυμικές**

116. i) $x=1$ ή $x=-2 \pm \sqrt{7}$

ii) $x=1$.

117. i) $x=5$

ii) $x=-1$ ή $x=2$ ή $x=2 \pm \sqrt{2}$.

118. i) $x=3$ ή $x=6$

ii) Αδύνατη.

119. i) $x = -\frac{1}{3}$ ή $x=2$

ii) $x=-3$ ή $x=1$.

120. i) $x=3$

ii) $x=0$ ή $x=\pm\sqrt{5}$.

121. i) $x=6$

ii) $x=2$.

122. i) $x=3$

ii) $x=1$ ή $x=\pm 2$.

123. i) $x=1$ ή $x=5$

ii) $x=-7$ ή $x=-2$.

124. i) $x=5$

ii) $x=4$.

125. i) $x=20$

ii) $x=3$.

126. i) $x=3$ ή $x=4$

ii) $x=5$.

127. i) $x=4$

ii) $x=9$.

128. i) $x=1$ ή $x=4$

ii) $x=1$ ή $x=9$.

129. i) $x=0$

ii) $x=1$ ή $x=8$.

130. i) $x=2$

ii) $x=8$.

131. i) $x=1$

ii) $x=1$ ή $x=4$.

132. i) $x \in (1,3)$

ii) $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (0, +\infty)$.

133. i) $x \in (-4, -3) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$

ii) $x \in (-3, -1] \cup \{2\} \cup (3, +\infty)$.

134. i) $x \in (-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$

ii) $x \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty)$.

135. i) $x \in (-\infty, -6) \cup (4, +\infty)$

ii) $x \in \left(-\frac{11}{2}, -3\right) \cup (2, +\infty)$.

136. i) $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$

ii) $x \in (-2 - \sqrt{2}, -2) \cup (-1, -2 + \sqrt{2}) \cup (0, +\infty)$.

137. i) $x \in (-5, -1) \cup (1, 4)$

ii) $x \in (1, 2)$.

138. i) $x \in (0, 2)$

ii) $x \in (2, 5)$.

139. i) $x \in (-\infty, 3) \cup (3, 4]$

ii) $x \in (0, 3)$.

140. i) $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

ii) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$.

141. i) $x \in (-\infty, -13) \cup (-2, 0) \cup (0, 2)$

ii) $x \in (-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

142. i) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$

ii) $x \in (-2, -1] \cup \{0\}$.

143. i) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

ii) $x \in (-2, +\infty)$.

144. $x \in [1, 2)$.

145. $x \in [1, 4]$.

$$146. x \in (-\infty, -1) \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right).$$

$$147. x \in \left[-1, \frac{11}{5}\right).$$

$$148. \text{ i) } x \in (-\infty, -2) \cup \left[-2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{ ii) } x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

$$149. \text{ i) } x \in (1, +\infty)$$

$$\text{ ii) } x \in (1, 3) \cup (3, 4).$$

150. Έχουμε

$$\bullet \frac{2}{|x-3|} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-3| < 4$$

$$\text{ και } x \neq 3 \Leftrightarrow x \in (-1, 3) \cup (3, 7).$$

$$\bullet \frac{2}{|x-3|} < 1 \Leftrightarrow |x-3| > 2$$

$$\text{ και } x \neq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty).$$

Άρα, η δοθείσα ανίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς

$$x \in (-1, 1) \cup (5, 7).$$

151. Έχουμε

$$\bullet \left| \frac{2x-3}{x+2} \right| > 1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2} > 1$$

$$\text{ ή } \frac{2x-3}{x+2} < -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-5}{x+2} > 0 \quad \text{ ή } \quad \frac{3x-1}{x+2} < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup \left(-2, \frac{1}{3}\right) \cup (5, +\infty)$$

$$\bullet \left| \frac{2x-3}{x+2} \right| \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+2} \geq -2$$

$$\text{ και } \frac{2x-3}{x+2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x+1}{x+2} \geq 0 \quad \text{ και } \quad \frac{-7}{x+2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

Επομένως, η αρχική ανίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς

$$x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right) \cup (5, +\infty).$$

$$152. \text{ i) } x \in (-3, -1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$$

$$\text{ ii) } x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty).$$

$$153. \lambda \in (1, 3).$$

$$154. \lambda \in (-1, 2).$$

$$155. \text{ i) } x \in (3, +\infty)$$

$$\text{ ii) } x \in [-1, 3).$$

$$156. \text{ i) } x \in (-\infty, 1)$$

$$\text{ ii) } x \in (3, 4).$$

$$157. \text{ i) } x \in [0, 2)$$

ii) Αδύνατη.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Βλ. σελ. 297

2. Βλ. σελ. 297

3. Βλ. σελ. 297

4. Βλ. σελ. 297

5. Βλ. σελ. 297

6. Βλ. σελ. 298

7. Βλ. σελ. 298

8. Βλ. σελ. 310

9. Βλ. σελ. 311-312

10. Βλ. σελ. 312-313

11. Βλ. σελ. 337

12. Βλ. σελ. 338

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Σ

2. Σ

3. Λ

4. Σ

5. Σ

6. Σ

7. Λ

8. Λ

9. Λ

10. Λ

11. Σ

12. Λ

13. Λ

14. Σ

15. Σ

16. Λ

Διαγώνισμα 1

Θέμα Α

Α1. Βλ. θεωρία.

Α2. Βλ. θεωρία.

Α3. Βλ. θεωρία.

Α4. α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος.

Θέμα Β

Β1. • Για $\lambda \neq 0$ 2ου βαθμού• Για $\lambda = 0$ 1ου βαθμού

Β2. Εκτελώντας τη διαίρεση

$$\begin{aligned} & (\lambda x^4 + (\lambda - 3)x^3 + (\lambda - 1)x^2 - x + 2) \\ & : (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι $P(x) = \lambda x^2 - 3x + 2$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Β3. Έχουμε

$$\frac{-3x+2}{x-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (-3x+2)(x-2) \leq 0 \text{ και } x \neq 2$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \text{ ή } x > 2.$$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε

$$P(-1) = 0 \text{ και } P(3) = -8.$$

Γ2. $x = -1$ ή $x = 1$ ή $x = 7$.Γ3. $x \in (-1, 2) \cup (5, +\infty)$.

Θέμα Δ

Δ1. Οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$ είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου -5 . Δηλαδή, οι αριθμοί

$$\pm 1, \pm 5.$$

Δ2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ και 5.Δ3. $x < 5$.

Διαγώνισμα 2

Θέμα 1

Α1. Βλ. θεωρία.

Α2. Βλ. θεωρία.

Α3. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος.

Θέμα Β

Β1. $P(2) = 0$.

Β2. Αποδεικνύουμε ότι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x-2)$ έχει παράγοντα το $x-2$.

Β3. Έχουμε $P(x) = (x-2)^2(2x-1)$.
Οπότε

$$\begin{aligned}P(x) > 0 &\Leftrightarrow (x-2)^2(2x-1) > 0 \\&\Leftrightarrow 2x-1 > 0 \text{ και } x \neq 2 \\&\Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty).\end{aligned}$$

Θέμα Γ

Γ1. $\alpha = -3$

Γ2. $x = 1$ ή $x = -2 \pm \sqrt{3}$

Γ3. $\theta = \frac{5\pi}{4}.$

Θέμα Δ

Γ1. $\alpha = -4$ και $\beta = 1$

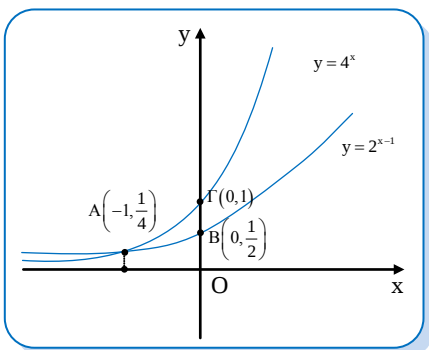
Γ2. $Q(x) = x^2 + 1$

Γ3. $x \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}).$

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

Εκθετική Συνάρτηση

1. i)



Πίνακες τιμών:

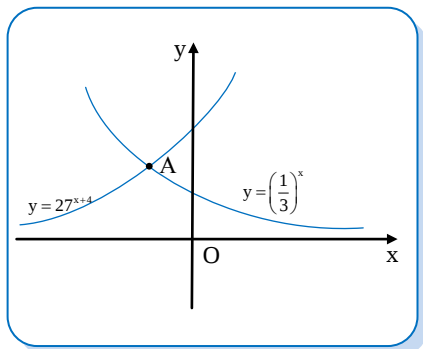
x	-2	-1	0	1	2
f(x)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

- Η καμπύλη $y = 2^{x-1}$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης $y = 2^x$ κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά.

ii) $x \in (-1, +\infty)$.

2. i)



Πίνακες τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

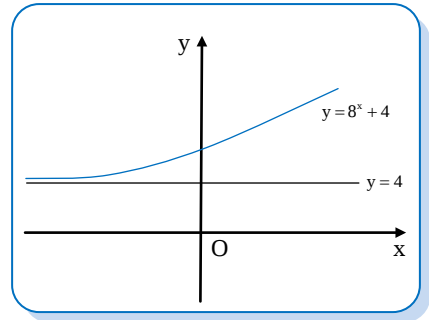
x	-5	-4	-3	-2
g(x)	$\frac{1}{27}$	1	27	729

- Η καμπύλη $y = 27^{x+4}$ προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης $y = 27^x$ κατά 4 μονάδες προς τ' αριστερά.

ii) $A(-3, 27)$.3. i) $x = 4$ ii) $x = -4$ iii) $x = 3$ iv) $x = -\frac{5}{2}$.4. i) $x = 0$ ή $x = 1$ ii) $x = -2$.5. i) $x = 2$ ή $x = 4$ ii) $x = 1$ iii) $x = 1$ ή $x = 3$ iv) $x = -1$.6. i) $x = -\frac{6}{5}$ ii) $x = 0$ iii) $x = 0$ ή $x = 6$ iv) $x = -1$ ή $x = 1$ ή $x = 2$.7. i) $x = 0$ ii) $x = 1$.

8. i) $x = 1$
 ii) $x = 0$.
9. i) $x = 2$
 ii) $x = 0$ ή $x = 1$.
10. i) $(x, y) = (2, 3)$
 ii) $(x, y) = (1, -2)$.
11. i) $(x, y) = (2, 1)$ ή $(x, y) = (1, 2)$
 ii) $(x, y) = (2, 1)$ ή $(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
 iii) $(x, y) = (2, 1)$.
12. i) $(x, y) = (1, 2)$
 ii) $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ή $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
13. i) $(x, y) = (2, 3)$
 ii) $(x, y) = (4, 2)$.
14. i) $(x, y) = (4, 3)$
 ii) $(x, y) = (2, 1)$.
15. i) $x < 2$
 ii) $x > 1$
 iii) $x > 1$
 iv) $x \in \mathbb{R}$.
16. i) $x \in (-4, 0)$
 ii) $x \in (-3, 3)$
 iii) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 iv) $x \in (-\sqrt{10}, 0) \cup (\sqrt{10}, +\infty)$.
17. i) $x \in (1, 2)$
 ii) $x \in (1, +\infty)$.
18. i) $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$
 ii) $(-\infty, 0]$.

19. i) Κατακόρυφη μετατόπιση της καμπύλης $y = 8^x$ κατά 4 μονάδες προς τα πάνω.



Πίνακας τιμών

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
f(x)	5	6	8	12

- ii) $A(0, 5)$
 iii) $x < 0$.
20. i) $\alpha > -3$
 ii) $-3 < \alpha < -1$
 iii) $x = 0$ ή $x = 1$.
21. i) Έχουμε
 $-1 \leq \eta_{\mu x} < 1$
 για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
 Οπότε,
 $e^{-1} \leq e^{\eta_{\mu x}} < e^1$
 για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
 ii) Με τον ορισμό.
 iii) $A\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{e}\right)$.
22. i) $x = 0$
 ii) $x = 0$.

23. $f^2(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\gamma)$

$$\Leftrightarrow e^{2\beta} = e^{\alpha+\gamma}$$

$$\Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma.$$

24. i) $\alpha \in (-5, -1) \cup (-1, +\infty)$

ii) $\alpha \in (-1, +\infty)$

iii) $x = 1$.

25. i) Με τον ορισμό.

ii) $e^{x+1} + x + 1 < 1 \Leftrightarrow f(x+1) < f(0)$

$$\Leftrightarrow x + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow x < -1.$$

26. i) $\alpha \in (1, +\infty)$

ii) α) $\alpha = 2$

β) $x \in (-\infty, 2)$.

27. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$0 < \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} < 1 \text{ για κάθε } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ii) $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

28. i) $f(x) - f(y) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$

ii) Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

iii) $x < 0$.

29. i) $f\left(\frac{1}{3}\right) = 11$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

ii) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{1}{2}\right)$

iii) $x \geq \frac{1}{2}$.

30. i) Με τον ορισμό

ii) $x \in (0, +\infty)$

iii) $f(2) = 1$

iv) $x = 2$.

31. i) Με τον ορισμό

ii) $x = 1$

iii) $A(0, 2)$

iv) $x \in (0, +\infty)$.

32. i) $A(2, 6)$ και $B(3, 11)$ αντίστοιχα.

ii) Γνησίως αύξουσα

iii) $x = 3$

iv) $x < 2$.

33. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq f\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

Δηλαδή, ότι

$$e^{\frac{\alpha}{2}} \neq e^{\frac{\beta}{2}},$$

που ισχύει αφού

$$\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\beta}{2}.$$

ii) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta)$$

$$\Leftrightarrow 2e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} < e^{\alpha} + e^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 + \left(e^{\frac{\beta}{2}}\right)^2 - 2e^{\frac{\alpha}{2}} \cdot e^{\frac{\beta}{2}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[f\left(\frac{\alpha}{2}\right) - f\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]^2 > 0,$$

που ισχύει από το ερώτημα i).

34. i) Έχουμε

$$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η σχέση

$$f(2) - f(1) < f(3) - f(2)$$

ισοδύναμα γράφεται

$$a^2 - a < a^3 - a^2$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2a^2 + a > 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-1)^2 > 0, \text{ που ισχύει.}$$

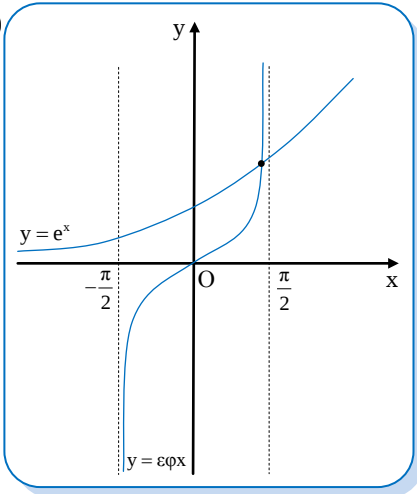
ii) α) $\alpha = 2$

β) $x = 3$.

35. i) $A\left(-1, \frac{17}{2}\right)$ και $B(3, 136)$

ii) $x \in (-1, 3)$.

36. i)



ii) Ακριβώς μια ρίζα.

37. i) Έχουμε

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 \geq 2e^x$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

ii) $x = 0$.

38. i) Παρατηρούμε ότι

$$4 - \sqrt{15} = \frac{16 - 15}{4 + \sqrt{15}} = \frac{1}{4 + \sqrt{15}}.$$

ii) $x = 0$ iii) $f(0) = 2$.39. i) $A = [0, 2]$ ii) Η εξίσωση $f(x) = 1$

ισοδύναμα γράφεται

$$5 - 2^x - 2^{2-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2^x - 4 \cdot 2^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 4 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 + 4 - 4 \cdot 2^x = 0$$

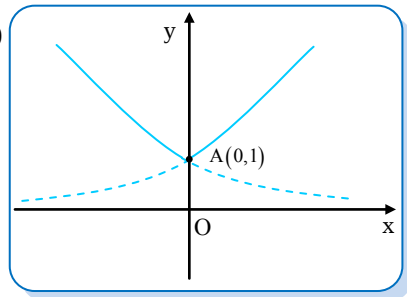
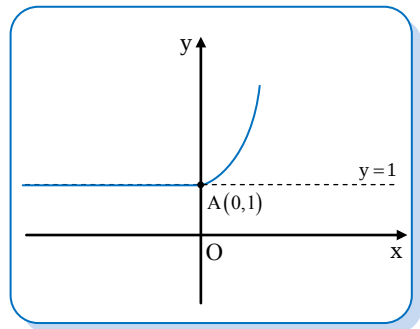
$$\Leftrightarrow (2^x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

ii) $x = 0$ ή $x = 2$.iii) Με απαγωγή σε άτοπο παρατηρούμε ότι $f(0) = f(2) = 0$.iv) $f(x) \geq f(0) = f(2) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

40. i)

ii) $f(x) \geq f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ iii) $e^{|x|} \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.Επίσης, $\eta\mu^2 x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\eta\mu^2 0 = 0 \neq 1$.41. i) $f(x) = e^{|x|+x} = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ (e^2)^x, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$ ii) $f(x) \geq f(0) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λογάριθμοι

42. i) 6 ii) -4

iii) $\frac{3}{2}$ iv) -2.

43. i) $x=8$ ii) $x=\frac{1}{9}$

iii) $x=\frac{1}{2}$ iv) $x=10$.

44. i) $\alpha=2$ ii) $\alpha=8$

iii) $\alpha=\frac{1}{25}$ iv) $\alpha=5$.

45. Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\log \alpha + \log \beta = \log \alpha \cdot \log \beta + 1$$

$$\Leftrightarrow \log \alpha + \log \beta - \log \alpha \cdot \log \beta - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log \alpha \cdot (1 - \log \beta) - (1 - \log \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \log \beta)(\log \alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \log \beta = 0 \quad \text{ή} \quad \log \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log \beta = 1 \quad \text{ή} \quad \log \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \beta = 10 \quad \text{ή} \quad \alpha = 10.$$

46. i) $\frac{1}{2} \log_2 16 + \log_2 10 - \log_2 5$

$$= \log_2 \sqrt{16} + \log_2 10 - \log_2 5$$

$$= \log_2 \frac{4 \cdot 10}{5} = \log_2 2^3 = 3.$$

ii) $\log 5 + 3 \log 2 - \log 4$

$$= \log 5 + \log 2^3 - \log 4$$

$$= \log \frac{5 \cdot 8}{4} = \log 10 = 1.$$

iii) $\ln(9 + 4\sqrt{5}) + 2 \ln(\sqrt{5} - 2)$

$$= \ln(9 + 4\sqrt{5}) + \ln(\sqrt{5} - 2)^2$$

$$= \ln(9 + 4\sqrt{5}) + \ln(9 - 4\sqrt{5})$$

$$= \ln(9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})$$

$$= \ln(81 - 80) = \ln 1 = 0.$$

iv) $e^{\ln 5 + 2 \ln 2} = e^{\ln 5 + \ln 4} = e^{\ln 20} = 20.$

47. i) 27 ii) 49

iii) 25 iv) 2.

48. i) 30 ii) -1.

49. i) 14 ii) 5.

50. Έχουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 4\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta.$$

Οπότε,

$$\log\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \log(\alpha\beta)$$

$$\Leftrightarrow 2 \log\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \log \alpha + \log \beta$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta).$$

51. Έχουμε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 9\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right)^2 = \alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \log\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right)^2 = \log(\alpha\beta)$$

$$\Leftrightarrow 2 \log\left(\frac{\alpha + \beta}{3}\right) = \log \alpha + \log \beta.$$

52. Έχουμε $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$. Οπότε

$$\ln \beta^2 = \ln(\alpha\gamma) \Leftrightarrow 2 \ln \beta = \ln \alpha + \ln \gamma.$$

$$\text{Είναι } \omega = \ln \beta - \ln \alpha = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

53. i) $\gamma = 10^{\beta^2}$.

$$\text{Άρα, } \log \gamma = \log 10^{\beta^2}$$

$$\Leftrightarrow \log \gamma = \beta^2$$

$$\Leftrightarrow \beta = \sqrt{\log \gamma}, \text{ αφού } \beta = 10^{a^2} > 0.$$

ii) $\beta = 10^{a^2}$.

$$\text{Άρα, } \log \beta = \log 10^{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \log \sqrt{\log \gamma} = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log(\log \gamma) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\log(\log \gamma)}{2}} = |a|.$$

54. Θέτουμε $\frac{\log \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\log \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\log \gamma}{\alpha - \beta} = \lambda$.

Επομένως,

$$\begin{cases} \log \alpha = \lambda(\beta - \gamma) \Leftrightarrow \alpha = 10^{\lambda(\beta - \gamma)} \\ \log \beta = \lambda(\gamma - \alpha) \Leftrightarrow \beta = 10^{\lambda(\gamma - \alpha)} \\ \log \gamma = \lambda(\alpha - \beta) \Leftrightarrow \gamma = 10^{\lambda(\alpha - \beta)} \end{cases}$$

Άρα:

i) $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 10^{\lambda(\beta - \gamma + \gamma - \alpha + \alpha - \beta)} = 10^0 = 1$.

ii) $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 10^{\lambda(\alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma - \beta\alpha + \gamma\alpha - \beta\gamma)} = 10^0 = 1$.

55. i) $\frac{1}{2}$ ii) 4 iii) 3 iv) $\frac{1}{3}$.

56. i) $\ln 10 \cdot \log e = \log e^{\ln 10} = \log 10 = 1$

ii) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{aligned} 1 + \log e + \ln 10 + 1 \\ = \ln 10 + 1 + \log e \cdot \ln 10 + \log e \\ \Leftrightarrow 1 = \log e \cdot \ln 10, \text{ που ισχύει σύμφωνα με το ερώτημα i).} \end{aligned}$$

57. $\log 10^\alpha = \log e^\beta$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \cdot \log e \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\log e} = \beta.$$

Άρα, $\left(\frac{\alpha}{\log e}\right)^{10} = \beta^{10}$ (1)

Επίσης, $\ln 10^\alpha = \ln e^\beta$

$$\Leftrightarrow \alpha \cdot \ln 10 = \beta \Leftrightarrow \frac{\beta}{\ln 10} = \alpha.$$

Άρα, $\left(\frac{\beta}{\ln 10}\right)^e = \alpha^e$ (2)

Όμως,

$$\alpha^e = \beta^{10}.$$

Επομένως, από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη.

58. i) $\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log(2 \cdot 3)}{\log\left(\frac{10}{2}\right)}$

ii) $\log_2 20 = \frac{\log 20}{\log 2} = \frac{\log(4 \cdot 5)}{\log\left(\frac{10}{5}\right)}$.

59. i) Αξιοποιούμε τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων.

ii) Αξιοποιούμε τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων.

60. Αξιοποιώντας τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων βρίσκουμε ότι το κάθε μέλος της ζητούμενης ισότητας είναι ίσο με

$$\frac{4 \log 2}{\log x}.$$

61. Έχουμε

$$\log_{e^3} \alpha = \frac{1}{3} \ln \alpha, \log_{e^4} \alpha = \frac{1}{4} \ln \alpha$$

$$\log_{e^2} \alpha = \frac{1}{2} \ln \alpha \text{ και } \log_{e^6} \alpha = \frac{1}{6} \ln \alpha.$$

62. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $P(2) = 0$.

ii) $x = 2$.

63. i) $P(1) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha + \ln \beta = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(\alpha\beta) = \ln 1$$

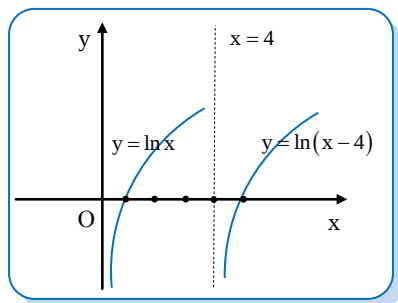
$$\Leftrightarrow \alpha\beta = 1.$$

ii) $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$.

Λογαριθμική Συνάρτηση

64. i) $A = (4, +\infty)$

ii) Προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης $y = \ln x$ κατά 4 μονάδες προς τα δεξιά.



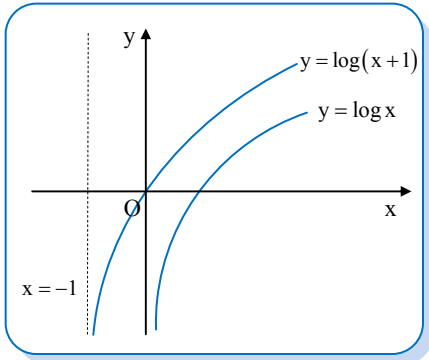
iii) $4 < x < 5$.

65. i) $A = (-1, +\infty)$

iii) $4 < x < 5$.

65. i) $A = (-1, +\infty)$

ii) Προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της καμπύλης $y = \log x$ κατά 1 μονάδα προς τ' αριστερά.



iii) $x = 999$.

66. i) Έχουμε

$$2e^{2x} - e^x + 2 = 2\omega^2 - \omega + 2,$$

όπου $\omega = e^x$.

Το τριώνυμο $2\omega^2 - \omega + 2$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -15 < 0$ και συνεπώς παίρνει μόνο θετικές τιμές.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(2e^{2x} - e^x + 2) > \ln 1$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x + 2 > 1$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x + 1 > 0$$

Όμως, η τελευταία σχέση είναι αληθής, αφού το τριώνυμο

$$2\omega^2 - \omega + 1$$

έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$.

iii) $A(\ln 2, 3 \ln 2)$.

67. i) Με τον ορισμό.

ii) $x^2 + 2 \ln x < x + \ln x$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \ln x < (\sqrt{x})^2 + 2 \ln \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) < f(\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow x < \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x \in (0, 1).$$

68. i) $A = (e, +\infty)$

ii) Με τον ορισμό.

iii) $f(x) < f(e^2) \Leftrightarrow x > e^2$.

69. i) $f(0) = e^0 + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

ii) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε:

• $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow x < 0$.

• $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x > 0$.

iii) $\mathbb{R}^*$.

iv) Αξιοποιούμε τα ερωτήματα ii) και iii).

70. i) $x = 10$ ii) $x = 1$.

71. i) $x = 4$ ii) $x = \frac{4}{3}$.

72. i) $x = 4$
ii) $x = 100$ ή $x = 1000$.

73. i) $x = 1$ ii) $x = 2$.

74. i) $x = 10$
ii) $x = \frac{1}{10}$ ή $x = 5$.

75. i) $x = 1$ ii) $x = 100$.

76. i) $x = 0$
ii) $x = -1 + \sqrt{2}$ ή $x = -1$.

77. i) $x = 0$ ή $x = 3$

ii) $x = -1$ ή $x = 0$.

78. i) $x = 2$

ii) $x = 1$

iii) $x = \frac{1}{10}$ ή $x = 100$

iv) $x = e^2$ ή $x = \sqrt{e}$.

79. i) $x = 1$

ii) $x = \frac{1}{10}$ ή $x = 100$.

80. i) $x = \frac{\ln 5}{\ln 2}$

$$\text{ii)} \quad x = \frac{\ln 4}{3 \ln 4 - \ln 3}$$

$$\text{iii)} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\ln 8}{\ln 9}$$

$$\text{iv)} \quad x = \ln 2.$$

$$81. \text{ i)} \quad x = 1 \quad \text{ή} \quad x = \frac{\log 3}{\log 2}.$$

$$\text{ii)} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = \log 4.$$

$$82. \text{ i)} \quad x = 4 \quad \text{ή} \quad x = 8$$

$$\text{ii)} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\text{iii)} \quad x = 0.$$

$$83. \text{ i)} \quad x = 11$$

$$\text{ii)} \quad x = \frac{1}{e} \quad \text{ή} \quad x = e^2.$$

$$84. \text{ i)} \quad x = \frac{1}{e} \quad \text{ή} \quad x = e$$

$$\text{ii)} \quad x = -2 \quad \text{ή} \quad x = 1.$$

85. Αξιοποιώντας τον τύπο αλλαγής βάσης των λογαρίθμων βρίσκουμε

$$\log_2 \theta = 6$$

δηλαδή,

$$\theta = 2^6 = 64.$$

$$86. \quad x = \frac{\pi}{12} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{12}.$$

87. i) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\log(a^{\log b}) = \log(b^{\log a})$$

$$\Leftrightarrow \log b \cdot \log a = \log a \cdot \log b,$$

που ισχύει.

ii) Αξιοποιώντας το ερώτημα i) η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$5^{\log x} = 50 - 5^{\log x}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 5^{\log x} = 50$$

$$\Leftrightarrow 5^{\log x} = 5^2$$

$$\Leftrightarrow \log x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 10^2 = 100.$$

88. i) • Για $\kappa < -\frac{1}{4}$ η εξίσωση είναι αδύ-

νατη

• Για $\kappa = -\frac{1}{4}$ η εξίσωση έχει μία ρίζα

• Για $\kappa > -\frac{1}{4}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

$$\text{ii)} \quad x = e^{-4} \quad \text{ή} \quad x = e^3.$$

$$89. \text{ i)} \quad (x, y) = \left(1000, \frac{1}{10}\right)$$

$$\text{ii)} \quad (x, y) = \left(10\sqrt{e}, \frac{10}{\sqrt{e}}\right).$$

$$90. \text{ i)} \quad (x, y) = (1, 10) \quad \text{ή} \quad (x, y) = (10, 1)$$

$$\text{ii)} \quad (x, y) = (e^2, e).$$

$$91. \text{ i)} \quad (x, y) = (\log 2, 1 + \log 2)$$

$$\text{ii)} \quad (x, y) = (2, 3) \quad \text{ή} \quad \left(\frac{\log 2}{\log 3}, 0\right).$$

$$92. \text{ i)} \quad \log a^2 \geq \log 10\beta.$$

Δηλαδή,

$$2 \log a \geq \log 10 + \log \beta \\ = 1 + \log \beta.$$

Επίσης, $1 + \log \beta$

$$= 1^2 + \left(\sqrt{\log \beta}\right)^2 \geq 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{\log \beta}.$$

$$\text{ii)} \quad a^2 \beta^2 \geq 100a\beta.$$

Δηλαδή, $a\beta \geq 100$, αφού $a\beta > 0$.

Επομένως,

$$\log(a\beta) \geq \log 100$$

$$\Leftrightarrow \log a + \log \beta \geq 2.$$

$$\text{iii)} \text{ Αποδείξαμε ότι } 2 \log a \geq 1 + \log \beta > 0.$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι

$$2 \log \beta \geq 1 + \log a > 0.$$

Επομένως,

$$4 \log a \log \beta \geq 1 + \log a + \log \beta + \log a \log \beta.$$

Άρα,

$$3 \log a \log \beta \geq 1 + \log a + \log \beta \geq 1 + 2 = 3.$$

$$93. \text{ i)} \quad \bullet \text{ Η σχέση}$$

$$2\sqrt{\log 11 \cdot \log 9} < \log 11 + \log 9$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\left(\sqrt{\log 11} - \sqrt{\log 9}\right)^2 > 0.$$

$$\bullet \log 11 + \log 9 = \log 99 < \log 100 = 2.$$

ii) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\log 11 < \frac{\log 10}{\log 9} \Leftrightarrow \sqrt{\log 11 \cdot \log 9} < 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\log 11 \cdot \log 9} < 2, \text{ που ισχύει.}$$

$$\begin{aligned} 94. \text{ i)} \quad & \frac{1}{\log_5 6} + \frac{1}{\log_7 6} = \frac{\log 5}{\log 6} + \frac{\log 7}{\log 6} \\ & = \frac{\log 5 + \log 7}{\log 6} = \frac{\log 35}{\log 6} < \frac{\log 6^2}{\log 6} \\ & = \frac{2\log 6}{\log 6} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad & \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} + \frac{1}{\log \pi} \\ & = \frac{\log 2}{\log \pi} + \frac{\log 5}{\log \pi} + \frac{\log 10}{\log \pi} \\ & = \frac{\log 100}{\log \pi} > \frac{\log \pi^4}{\log \pi} = 4. \end{aligned}$$

95. i) Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + y^2 + 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0,$$

ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα i) έχουμε

$$\begin{aligned} & (\log \alpha)^2 + (\log \beta)^2 \geq \frac{(\log \alpha + \log \beta)^2}{2} \\ & = \frac{(\log \alpha \beta)^2}{2} = \frac{(\log 100)^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2. \end{aligned}$$

$$96. \text{ i)} \quad \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2} \text{ και } \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2}.$$

Άρα,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ii) Αποδείξαμε ότι

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} < 1$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha + \beta < \alpha\beta.$$

Επομένως,

$$\ln(\alpha + \beta) < \ln(\alpha\beta) = \ln \alpha + \ln \beta.$$

97. Η ζητούμενη σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\log(1 + \alpha^3)^2 < \log(1 + \alpha^2)^3$$

$$\Leftrightarrow (1 + \alpha^3)^2 < (1 + \alpha^2)^3$$

$$\Leftrightarrow 1 + \alpha^6 + 2\alpha^3 < 1 + 3\alpha^2 + 3\alpha^4 + \alpha^6$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^4 - 2\alpha^3 + 3\alpha^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha^2 - 2\alpha + 3 > 0,$$

που ισχύει αφού το πρώτο μέλος είναι τριώνυμο του α με διακρίνουσα

$$\Delta = -32 < 0.$$

$$98. \text{ i)} \quad x > \frac{\log 8}{\log 7}$$

$$\text{ii)} \quad x > \frac{\log 3}{\log 3 - \log 2}.$$

$$99. \text{ i)} \quad x > 5 \quad \text{ii)} \quad \frac{3}{2} < x < 2.$$

$$100. \text{ i)} \quad x \in \left(0, \frac{1}{10}\right) \cup (100, +\infty)$$

$$\text{ii)} \quad x \in (1, 2).$$

$$101. \text{ i)} \quad x \in (1, 10) \quad \text{ii)} \quad x \in (1, 3).$$

$$102. \text{ i)} \quad x \in \left(0, \frac{1}{e}\right) \cup (e^2, +\infty)$$

$$\text{ii)} \quad x \in (1, e^3).$$

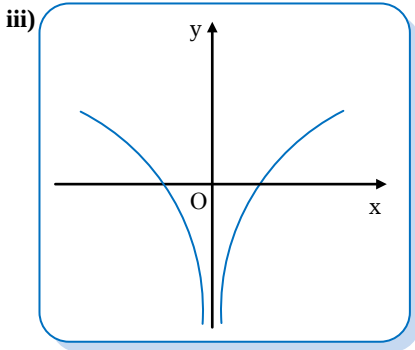
$$103. \alpha = \sqrt{10} \text{ ή } \alpha = 100.$$

$$104. \text{ i)} \quad A = [1, 4) \quad \text{ii)} \quad A = (4, +\infty).$$

$$105. \text{ i)} \quad A = \mathbb{R}^*$$

ii) Ισχύει η σχέση

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$



Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2} 2 \ln x = \ln x.$$

Και επειδή η f είναι άρτια συμπεραίνουμε ότι η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$. Άρα, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από την καμπύλη $y = \ln x$ και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα $y'y$.

106. i) Έχουμε

$$g(x) = \ln x^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{1}{\ln x} \ln x = 1$$

για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii) Αποδείξαμε ότι

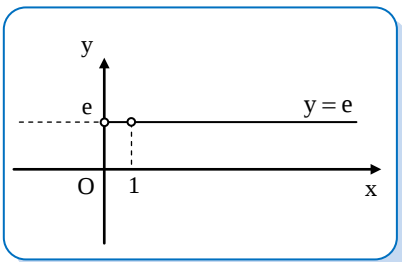
$$\ln f(x) = 1$$

για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Επομένως,

$$f(x) = e \text{ για κάθε } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f είναι το σύνολο των σημείων της ευθείας $y = e$ με $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.



107. i) $A = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

ii) $f(1) + f(2) + \dots + f(99)$

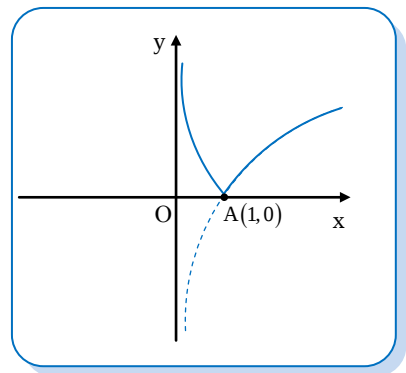
$$= \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{100}{99}$$

$$= \ln \left(2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} \right) = \ln 100.$$

108. i) $A = (0, +\infty)$

ii) $f(x) = \sqrt{\ln^2 x}$

$$= |\ln x| = \begin{cases} \ln x, & \text{αν } x \geq 1 \\ -\ln x, & \text{αν } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f συμπίπτει με την καμπύλη $y = \ln x$ στο διάστημα $[1, +\infty)$ ενώ συμπίπτει με τη συμμετρική της καμπύλης $y = \ln x$, ως προς τον άξονα $x'x$, στο διάστημα $(0, 1]$.

iii) Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

109. i) $A = [1, +\infty)$

ii) $x = 10$.

110. i) $A = [1, +\infty)$

ii) $x = e^4$.

111. i) $A = (-\infty, 0)$

ii) $x = -e^3$.

112. i) $A = (-4, 4)$

ii) $f(-x) = \ln\left(\frac{4+x}{4-x}\right)$
 $= \ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right) = -f(x)$
για κάθε $x \in (-4, 4)$.

iii) $x = -1$.

113. i) $\alpha = 1$

ii) $x + \sqrt{x^2 + 1} > x + \sqrt{x^2}$
 $= x + |x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) $x = \frac{3}{4}$.

114. i) $A = (0, 2) \cup (2, +\infty)$

ii) $A\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 0\right), B(1, 0)$

και $\Gamma\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

iii) Όχι, αφού $0 \notin A$.

iv) $x = 3$.

115. i) $A = \mathbb{R}$

ii) $A\left(\ln(1+\sqrt{2}), \ln(1+\sqrt{2})\right)$.

116. i) $\alpha = -2$ ii) $x = e$.

117. i) $\alpha = 1$

ii) Έχουμε

$$f(x) = \ln^4 x + (\ln^2 x) \cdot (1 - 2 \ln x)$$

$$= \ln^4 x + \ln^2 x - 2 \ln^3 x$$

$$= (\ln^2 x - \ln x)^2 \text{ για κάθε } x > 0$$

iii) $x = \frac{1}{e}$ ή $x = e^2$.

118. i) $A = \mathbb{R}^*$ και $B = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

ii) Για κάθε $y \in B$ έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x}{1-e^x} = y$$

$$\Leftrightarrow e^x = y(1-e^x)$$

$$\Leftrightarrow e^x(1+y) = y$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1+y}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x = g(y)$$

iii) Από το προηγούμενο ερώτημα.

119. i) $\alpha = e$ ή $\alpha = \sqrt{e}$

ii) α) $\pi(x) = x^2 + 2x$ και $v(x) = 7x - 1$

β) $x = 0$ ή $x = -2$ ή $x = \pm\sqrt{3}$.

120. i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

έχουμε $e^{x_1} < e^{x_2}$.

Επομένως, $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$

ή ισοδύναμα $e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1$.

Δηλαδή, $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $x = 0$

iii) $A = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

iv) Η εξίσωση

$$g(x) = h(x)$$

είναι αδύνατη.

121. i) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2$$

έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2} \text{ και } e^{-x_1} > e^{-x_2}$$

άρα,

$$-e^{-x_1} < -e^{-x_2}.$$

Επομένως,

$$e^{x_1} - e^{-x_1} < e^{x_2} - e^{-x_2}$$

και τελικά

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} < \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2}.$$

Δηλαδή,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad f(x) = y &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y \\
 &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 2ye^x \\
 &\Leftrightarrow e^{2x} - 2ye^x + y^2 = y^2 + 1 \\
 &\Leftrightarrow (e^x - y)^2 = y^2 + 1 \\
 &\Leftrightarrow e^x - y = \pm \sqrt{y^2 + 1} \\
 &\Leftrightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}, \\
 \text{αφού } y - \sqrt{y^2 + 1} &< 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right).
 \end{aligned}$$

$$122. \text{ i)} \quad A = (-\infty, 2)$$

$$\text{ii)} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$$

$$\text{iii)} \quad x = -1.$$

$$123. \text{ i)} \quad \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε}$$

$$e^x > 0 \Leftrightarrow 4e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 4e^x + 1 > 1 \Leftrightarrow f(x) > 1.$$

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $f(a) = \beta$, τότε $g(\beta) = a$ και αντι-στρόφως.

iii) Τα σημεία $M(a, \beta)$ και $M'(\beta, a)$ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$.

$$124. \text{ i)} \quad \alpha) \quad \text{Για κάθε } x_1, x_2 \in (0, +\infty) \text{ με}$$

$$x_1 < x_2 \text{ έχουμε } \ln x_1 < \ln x_2.$$

Επομένως,

$$\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2$$

$$\Leftrightarrow \ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\beta) \quad f(1) = \ln 1 + 1 - 1 = 0.$$

$$\text{ii)} \quad x > 1.$$

$$125. \text{ i)} \quad A = (0, 1) \quad \text{ii)} \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$126. \text{ i)} \quad A = (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{10}, +\infty\right)$$

$$\text{ii)} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (10, +\infty).$$

$$127. \text{ i)} \quad A = (-\infty, \ln 2)$$

$$\text{ii)} \quad f(0) = \ln(2 - e^0) = \ln 1 = 0$$

$$\text{iii)} \quad \text{Για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με } x_1 < x_2$$

$$\text{έχουμε } e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow 2 - e^{x_1} > 2 - e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 - e^{x_1}) > \ln(2 - e^{x_2})$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

$$\text{iv)} \bullet \quad f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0)$$

$$\bullet \quad f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \ln 2)$$

$$\text{v)} \quad x = 0.$$

$$128. \text{ i)} \quad f(0) = \ln 6 - \ln 6 = 0 \text{ και}$$

$$f(1) = \ln 30 - \ln 5 - \ln 6$$

$$= \ln 30 - \ln 30 = 0$$

$$\text{ii)} \quad \text{Έχουμε } 0 < 1 \text{ και}$$

$$f(0) = f(1).$$

Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη.

$$\text{iii)} \quad x \in (0, 1).$$

$$129. \text{ i)} \quad A = (1, +\infty)$$

$$\text{ii)} \quad x = e$$

$$\text{iii)} \quad \text{Για κάθε } x_1, x_2 \in A \text{ με}$$

$$x_1 < x_2$$

έχουμε

$$\ln x_1 < \ln x_2$$

$$\Leftrightarrow \ln(\ln x_1) < \ln(\ln x_2)$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\text{iv)} \quad f(e^2) < f(e^e)$$

$$\text{v)} \quad x \in (e^2, e^e).$$

$$130. \text{ i)} \quad f(1) = 1 \text{ και } f(e) = \sqrt[4]{e}.$$

$$\text{Άρα } f(1) < f(e)$$

$$\text{ii)} \quad x \in \left(\frac{1}{e^2}, e^2\right).$$

131. i) $A_f = (0, +\infty)$ και $A_g = (0, +\infty)$

ii) Η εξίσωση

$$f(x) = g(x)$$

είναι αδύνατη

iii) $x > \ln 2$.

132. i) $A = (0, e^2)$ **ii)** $x = e$

iii) $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, e^2\right)$.

133. i) $A_f = (1, +\infty)$ και $A_g = (\sqrt[3]{e^2}, +\infty)$

ii) $x = e$

iii) $x \in (e, +\infty)$.

134. i) $A = [1, +\infty)$

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με

$$x_1 < x_2$$

έχουμε

$$\ln x_1 < \ln x_2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\ln x_1} < \sqrt{\ln x_2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\ln x_1} - \frac{1}{2} < \sqrt{\ln x_2} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

iii) $x \in (e, +\infty)$

iv) $x = e$.

135. i) Με τον ορισμό.

ii) Έχουμε

$$0 < \sin x \leq 1$$

$$\text{για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Οπότε,

$$\ln(\sin x) \leq \ln 1 = 0$$

$$\text{για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Δηλαδή,

$$f(x) \leq 0$$

$$\text{για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

iii) Έχουμε

$$f(0) = 0$$

$$\text{για κάθε } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

136. i) Με τον ορισμό

ii) $f(x) \geq f(1) = 0$ για κάθε $x > 0$.

137. i) $A = (0, +\infty)$

ii) $f(x) = \ln x \cdot (2 \ln x) = 2 \ln^2 x \geq 0$

για κάθε $x \in A$

iii) $f(x) \geq f(1) = 0$ για κάθε $x \in A$

iv) $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{3\pi}{4}$.

138. i) Έχουμε

$$0 < \eta \mu x \leq 1 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi).$$

Άρα,

$$\ln(\eta \mu x) \leq \ln 1 = 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi).$$

ii) $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

iii) $x = \frac{\pi}{2}$.

Ερωτήσεις Θεωρίας

1. Βλ. σελ. 417

2. Βλ. σελ. 417-418

3. Βλ. σελ. 417

4. Βλ. σελ. 446

5. Βλ. σελ. 447

6. Βλ. σελ. 447-448

7. Βλ. σελ. 450

8. Βλ. σελ. 462-463

9. Βλ. σελ. 464

Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Σ
2. Λ
3. Λ
4. Λ
5. Σ
6. Σ
7. Σ
8. Λ
9. Σ
10. Σ
11. Λ
12. Σ
13. Λ
14. Σ
15. Λ
16. Λ
17. Σ
18. Σ

Διαγώνισμα 1

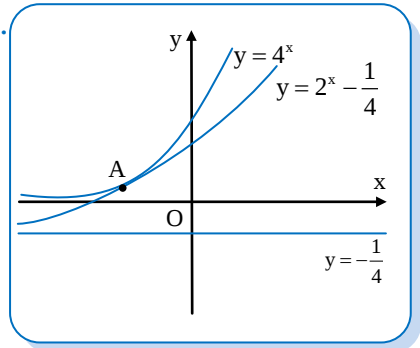
Θέμα Α

- A1. Βλ. θεωρία.
 A2. Βλ. θεωρία.
 A3. α) Σωστό
 γ) Λάθος
 ε) Σωστό.

- β) Σωστό
 δ) Λάθος

Θέμα Β

B1.



B2. Η εξίσωση

$$f(x) = g(x)$$

έχει μοναδική ρίζα, την $x = -1$.
 Άρα, οι γραφικές παραστάσεις των
 συναρτήσεων f και g έχουν μονα-
 δικό κοινό σημείο, το σημείο

$$A\left(-1, \frac{1}{4}\right).$$

B3. $f(x) - g(x) = 4^x - 2^x + \frac{1}{4}$

$$= \left(2^x - \frac{1}{2}\right)^x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = -1$.

Θέμα Γ

Γ1. $A = [\ln 3, \ln 4]$ Γ2. Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με

$$x_1 < x_2$$

έχουμε

$$e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - e^{x_1}} > \sqrt{1 - e^{x_2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - e^{x_1}} < 1 - \sqrt{1 - e^{x_2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^{x_1}}} < \sqrt{1 - \sqrt{1 - e^{x_2}}}$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως
 αύξουσα.

Γ3. $\max f = f(\ln 4) = 1$
 και $\min f = f(\ln 3) = 0$.

Θέμα Δ

Δ1. $A_f = (0, +\infty)$ και $A_g = \mathbb{R}^*$.

Δ2. α) $x \in (\ln 2, +\infty)$

β) $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Δ3. Από το ερώτημα ii) προκύπτει ότι
 $f(\ln 3) > 0$

και

$$g\left(\frac{2}{e}\right) < 0$$

Επομένως, $f(\ln 3) > g\left(\frac{2}{e}\right)$.

Δ4. $x = \ln(e - 2)$.

Διαγώνισμα 2**Θέμα Α**

A1. Βλ. Θεωρία

A2. Βλ. Θεωρία

A3. α) Σωστό β) Λάθος
 γ) Λάθος δ) Σωστό
 ε) Σωστό.

Θέμα Β

B1. Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$.

Τότε έχουμε $\log x_1 < \log x_2$.

Επομένως,

$$x_1 + \log x_1 < x_2 + \log x_2$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

B2. Έχουμε

$$f(2x) \leq 11 \Leftrightarrow f(2x) \leq f(10)$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq 5$$

B3. Έχουμε

$$(f(x))^2 = (x + \log x)^2$$

$$= x^2 + 2x \log x + (\log x)^2$$

και

$$f(x^2) = x^2 + \log x^2 = x^2 + 2 \log x.$$

Οπότε, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$x^2 + 2x \log x + (\log x)^2 - x^2 - 2 \log x = 3 + 2x \log x$$

$$\Leftrightarrow (\log x)^2 - 2 \log x - 3 = 0.$$

Θέτοντας, $\log x = \omega$, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = -1 \text{ ή } \omega = 3$$

$$\Leftrightarrow \log x = -1 \text{ ή } \log x = 3$$

$$= x = \frac{1}{10} \text{ ή } x = 1.000.$$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε

$$f(\ln 9) = \ln 16 - \ln 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{80}{18 + \alpha} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow \alpha = 7.$$

Γ2. Πρέπει

$$\frac{e^{2x} - 1}{2e^x + 7} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα, $A = (0, +\infty)$.

Γ3. Έχουμε

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{2e^x + 7}\right) > \ln 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 8 > 0.$$

Θέτοντας $\omega = e^x$ η παραπάνω ανίσωση γράφεται

$$\omega^2 - 2\omega - 8 > 0 \Leftrightarrow \omega < -2 \text{ ή } \omega > 4$$

$$\Leftrightarrow e^x < -2 \text{ αδύνατο ή } e^x > 4$$

$$\Leftrightarrow x > \ln 4.$$

Άρα, η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' για κάθε $x \in (\ln 4, +\infty)$.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε

$$1 - \left(\frac{4}{9}\right)^x \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x \leq \left(\frac{4}{9}\right)^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\left(\frac{4}{9} < 1\right).$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι

$$A_f = [0, +\infty).$$

Δ2. Έχουμε

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \geq 0$$

$$\omega = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 2\omega^2 - 5\omega + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \omega \leq 1 \quad \text{ή} \quad \omega \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 \quad \text{ή} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \quad \text{ή} \quad x \leq -1.$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της g είναι το

$$A_g = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty).$$

Δ3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 1.$

Άρα, τα κοινά σημεία είναι τα

$$A(0, 0) \quad \text{και} \quad B\left(1, \frac{\sqrt{5}}{3}\right).$$

Δ4. Έχουμε

$$f(x) < \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^x} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^x > \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

Όμως, $x \in [0, +\infty)$. Άρα το C_f

βρίσκεται κάτω από την ευθεία

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Ασκήσεις για Επανάληψη

1. i) $D = 1 \neq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

ii) Έχουμε

$$x = \frac{D_x}{D} = \alpha - 1$$

$$\text{και } y = \frac{D_y}{D} = \alpha + 1.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 \\ &= 2\alpha^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Η ισότητα ισχύει για $\alpha = 0$.

2. i) $D + D' = 2\lambda^2 + 4\lambda + 3$.

ii) Έχουμε $D + D' = 2\lambda^2 + 4\lambda + 3 \neq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Οπότε, μία τουλάχιστον από τις ορίζουσες D και D' είναι διαφορετική από το μηδέν.

iii) Από τη σχέση $D + D' = 1$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του λ διαπιστώνουμε ότι και τα δύο συστήματα έχουν μοναδική λύση
 $(x, y) = (-3, -1)$.

3. i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $D \neq 0$.
 Προς τούτο υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο) ότι $D = 0$. Οπότε, από τη δοθείσα σχέση προκύπτει ότι

$$D_x^2 + D_y^2 = 0,$$

και συνεπώς

$$D_x = D_y = 0,$$

που είναι άτοπο. Επομένως,
 $D \neq 0$.

- ii) Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$(D_x^2 - 2DD_x + D^2) + (D_y^2 + 2DD_y + D^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (D_x - D)^2 + (D_y + D)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow D_x = D \text{ και } D_y = -D.$$

Δηλαδή, $x = 1$ και $y = -1$.

$$4. \text{ i) } f(x) = \begin{cases} 8x - 6, & \text{αν } x \geq 2 \\ -2x + 14, & \text{αν } x \leq 2 \end{cases}$$

ii) Από το ερώτημα i) προκύπτει ότι
 $f(x) \geq f(2) = 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. i) Έχουμε

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και

$$f(1) = 2.$$

Δηλαδή,

$$f(x) \geq f(1) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) Έχουμε

$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \leq \frac{(1+1)^2}{1^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Από τα ερωτήματα i) και ii) προκύπτει ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$6. \text{ i) } f(x) = (x - 2)^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii) Ορίζοντια μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφη μετατόπιση κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

7. i) Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$x < 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0$$

ii) Με τον ορισμό.

iii) Έχουμε

$$f(2 - g(x)) > f(0) \Leftrightarrow 2 - g(x) < 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) > 2$$

$$\Leftrightarrow g(x) > g(0)$$

$$\Leftrightarrow x > 0.$$

8. i) α) Υποθέτουμε (απαγωγή σε άτοπο)

ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

Τότε, για κάθε $x_1 < x_2$ έχουμε

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ οπότε}$$

$$f(f(x_1)) < f(f(x_2))$$

και

$$-f(x_1) < -f(x_2).$$

Δηλαδή

$$f(f(x_1)) - f(x_1) < f(f(x_2)) - f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x_1}{4} < -\frac{x_2}{4} \Leftrightarrow x_1 > x_2,$$

που είναι αδύνατο.

β) Από τη δοθείσα σχέση για $x = 0$ παίρνουμε $f(f(0)) = f(0)$. Οπότε υποθέτοντας ότι $f(0) \neq 0$ και αξιοποιώντας τη μονοτονία της συνάρτησης f , καταλήγουμε σε άτοπο.

ii) Έχουμε

$$4f(x-1) > x-1 \Leftrightarrow f(x-1) > \frac{x-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(x-1) - \frac{x-1}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow f(f(x-1)) > f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x-1) > f(0)$$

$$\Leftrightarrow x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1.$$

9. i) $2\alpha \cdot 0 + 2\beta \cdot 0 = \beta + \gamma$

και

$$2\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\beta \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \beta + \gamma.$$

Δηλαδή,

$$0 = \beta + \gamma \text{ και } \alpha + \beta = \beta + \gamma.$$

ii) α) Με απαγωγή σε άτοπο.

β) Η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$-2\beta \eta \mu \chi \sigma \nu \chi + 2\beta \sigma \nu^2 \chi = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta \mu \chi \sigma \nu \chi - \sigma \nu^2 \chi = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma \nu \chi \cdot (\eta \mu \chi - \sigma \nu \chi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma \nu \chi = 0 \text{ ή } \eta \mu \chi = \sigma \nu \chi$$

$$\Leftrightarrow \sigma \nu \chi = 0 \text{ ή } \epsilon \phi \chi = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

10. i) $f(x) = 2\eta \mu \chi \sigma \nu \chi (\sigma \nu^2 \chi + \eta \mu^2 \chi) + 1$
 $= 2\eta \mu \chi \sigma \nu \chi + 1$
 $= \eta \mu^2 \chi + \sigma \nu^2 \chi + 2\eta \mu \chi \sigma \nu \chi$
 $= (\eta \mu \chi + \sigma \nu \chi)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$

$$\text{ii) } f(x) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\eta \mu \chi + \sigma \nu \chi)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta \mu \chi = -\sigma \nu \chi$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \phi \chi = -1$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \phi \chi = \epsilon \phi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

11. i) Πρόκειται για εξίσωση β' βαθμού με διακρίνουσα

$$\Delta = 4(\eta \mu \alpha + \sigma \nu \alpha)^2 - 4$$

$$= 4(\eta \mu^2 \alpha + \sigma \nu^2 \alpha + 2\eta \mu \alpha \sigma \nu \alpha - 1)$$

$$= 4 \cdot 2\eta \mu \alpha \sigma \nu \alpha < 0, \text{ αφού}$$

$$\eta \mu \alpha < 0 \text{ και } \sigma \nu \alpha > 0$$

για κάθε $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Άρα, η εξίσωση
 $f(x) = 0$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii) $f(1) = 2$

$$\Leftrightarrow 1 + 2(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\alpha = -\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\varphi\alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Όμως,

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Επομένως,

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

12. i) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = -\frac{7}{8}$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = -\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{4}, \quad \text{αφού } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

ii) $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{16}$.

Οπότε,

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{15}{16}$$

και συνεπώς

$$\epsilon\varphi^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = 15.$$

Άρα,

$$f(x) = 15\sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Προφανώς,

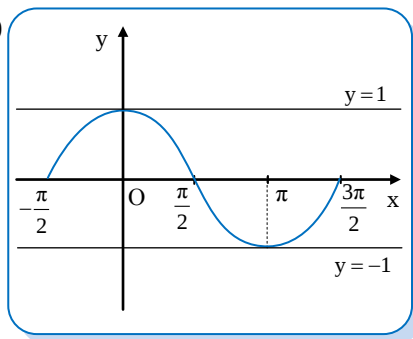
$$\min f = -15 \quad \text{και} \quad \max f = 15.$$

iii) $f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

$$\Leftrightarrow 15\sigma\upsilon\nu x = 16$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{16}{15} > 1, \text{ αδύνατη.}$$

13. i)



ii) • Αν $\kappa \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,

αδύνατη

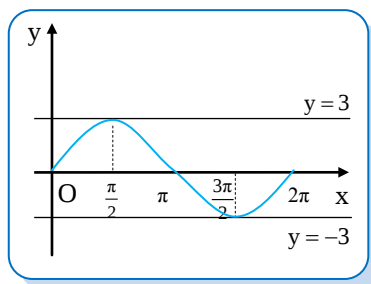
• Αν $\kappa = 1$ ή $\kappa = -1$, μία ρίζα.

• Αν $\kappa \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, δύο ρίζες.

• Αν $\kappa = 0$, τρεις ρίζες.

14. i) $\max f = 3$ και $\min f = -3$.

ii)



iii) Δύο ρίζες (γραφικά).

iv) $f\left(\frac{7\pi}{10}\right) > f\left(\frac{9\pi}{10}\right)$.

15. i) $f(0) = 4$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8$

ii) $T = \pi$

$$\text{iii)} f(x) = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Και επειδή $x \in [0, 2\pi]$ συμπεραίνου-

$$\text{με ότι } x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{ή} \quad x = \frac{11\pi}{6}.$$

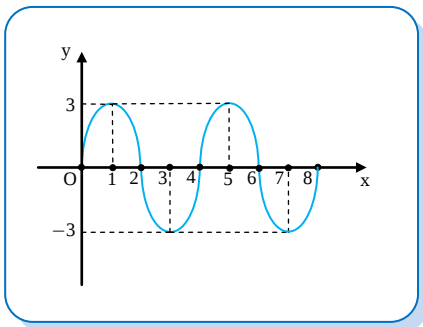
16. i) Έχουμε

$$\begin{cases} \alpha\beta + 2 = 3 \\ \frac{2\pi}{\beta\pi} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{ii)} f(x) = 3 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 4\kappa + 1, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

iii)



17. i) Έχουμε

$$2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu 2\chi$$

$$\eta\mu(\pi - 2\chi) = \eta\mu 2\chi$$

και

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - (-2\chi)\right)$$

$$= \eta\mu(-2\chi) = -\eta\mu 2\chi.$$

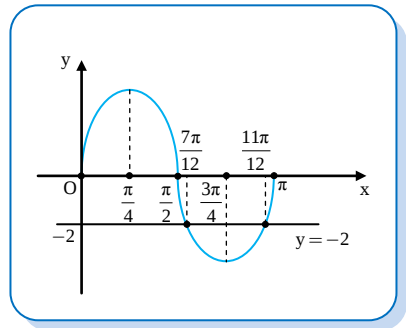
$$\text{ii)} f(x) = -2 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{12} \quad \text{ή} \quad x = \kappa\pi + \frac{7\pi}{12}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Τελικά, } x = \frac{7\pi}{12} \quad \text{ή} \quad x = \frac{11\pi}{12}.$$

iii) Έχουμε



$$f(x) < -2 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{12} < x < \frac{11\pi}{12} \quad (\text{γραφικά})$$

18. i) Θέτουμε $\epsilon\phi 2\alpha = \omega$. Οπότε

$$4\omega^2 - 5\omega - 6 = 0 \Leftrightarrow \omega = 2 \quad \text{ή} \quad \omega = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Όμως, } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \text{ και}$$

συνεπώς $\epsilon\phi 2\alpha < 0$.

ii) Έχουμε

$$\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 - \epsilon\phi^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 3\epsilon\phi^2\alpha - 8\epsilon\phi\alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi\alpha = 3 \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi\alpha = -\frac{1}{3}.$$

Και επειδή $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ συμπεραί-

νουμε ότι $\epsilon\phi\alpha > 0$ και συνεπώς $\epsilon\phi\alpha = 3$.

iii) Έχουμε

$$\eta\mu(x + \alpha) = \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\alpha$$

και

$$\eta\mu(x - \alpha) = \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\alpha.$$

Οπότε, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$(3 + \sqrt{3})\eta\mu x = -(1 + \sqrt{3})\sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi\alpha$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{-3(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- 19. i)** Παρατηρούμε ότι $2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\pi}{2} - 2x$.

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{1 + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} \\ &= \frac{1 - \eta\mu 2x}{1 + \eta\mu 2x}. \end{aligned}$$

- ii)** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu x \neq 0$. Με τον περιορισμό αυτό, η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{1 - \eta\mu 2x}{1 + \eta\mu 2x} = \sigma\phi^2 x \Leftrightarrow \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sigma\phi^2 x$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sigma\phi^2 x$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sigma\phi x$$

$$\text{ή } \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\sigma\phi x$$

$$\Leftrightarrow \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{ή } \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \epsilon\phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \kappa\pi + x - \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\kappa\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- 20. i)** Με τη βοήθεια του σχήματος Horner εκτελούμε τη διαίρεση

$$P(x) : (x + 12).$$

5	62	26	29	α	-12
	-60	-24	-24	-60	
5	2	2	5	$\alpha - 60$	

Άρα, το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 12$ αν και μόνο αν $\alpha - 60 = 0$,

δηλαδή,

$$\alpha = 60.$$

- ii)** Για $\alpha = 60$, η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

ισοδύναμα γράφεται

$$(x + 12) \cdot (5x^3 + 2x^2 + 2x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -12 \text{ ή } 5x^3 + 2x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -12$$

ή

$$5(x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -12 \text{ ή } (x + 1)(5x^2 - 3x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -12 \text{ ή } x = -1.$$

- 21. i)** $P(x) = x^4 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- ii)** Έχουμε

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 - \alpha x + 1)(x^2 + \beta x + \gamma) \\ &= x^4 + (\beta - \alpha)x^3 + (\gamma - \alpha\beta + 1)x^2 \\ &\quad + (\beta - \alpha\gamma)x + \gamma. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\beta - \alpha = 0$$

και

$$\gamma - \alpha\beta + 1 = 0$$

και

$$\beta - \alpha\gamma = 0$$

και

$$\gamma = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\beta = \alpha \quad \text{και} \quad \alpha^2 = 2 \quad \text{και} \quad \gamma = 1.$$

Τελικά

$$\alpha = \sqrt{2}, \quad \beta = \sqrt{2} \quad \text{και} \quad \gamma = 1.$$

iii) α' τρόπος:

Από το ερώτημα i) προκύπτει ότι

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

β' τρόπος:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x) \cdot (x^2 + 1 + \sqrt{2}x) \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

22. i) $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^{100} + \alpha + \beta = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -1.$$

ii) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε ότι

$$P(x) = (x-1)(x^{99} + x^{98} + \dots + x + \alpha + 1).$$

Επομένως, το $P(x)$ διαιρείται με το

$(x-1)^2$ αν και μόνο αν το πολυώνυμο $x^{99} + x^{98} + \dots + x + \alpha + 1$ διαιρείται με το $x-1$. Δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση

$$1^{99} + 1^{98} + \dots + 1 + \alpha + 1 = 0$$

και τελικά

$$\alpha = -100.$$

Επίσης, από τη σχέση

$$\alpha + \beta = -1$$

βρίσκουμε

$$\beta = 99.$$

iii) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner βρίσκουμε ότι

$$x^{99} + x^{98} + \dots + x - 99$$

$$= (x-1)(x^{98} + 2x^{97} + 3x^{96} + \dots + 99)$$

Άρα, το ζητούμενο πηλίκο είναι το πολυώνυμο

$$\pi(x) = x^{98} + 2x^{97} + 3x^{96} + \dots + 98x + 99.$$

iv) Προφανώς

$$\pi(1) \neq 0.$$

Άρα, η ζητούμενη τιμή του n είναι $n = 2$.

23. i) $P(x) = (x - \alpha)(x^2 + 5x) + P(\alpha).$

Άρα,

$$P(0) = -\alpha \cdot 0 + P(\alpha) \Leftrightarrow P(0) = P(\alpha).$$

Όμως, $P(0) = 2$.

Επομένως, $P(\alpha) = 2$.

ii) $P(x) = (x - \alpha)(x^2 + 5x) + P(\alpha)$
 $= (x - \alpha)(x^2 + 5x) + 2.$

iii) α) $P(x) = (x - \beta)(x^2 + x - 8) + P(\beta)$

Άρα, $P(0) = -\beta(-8) + P(\beta)$

δηλαδή $2 = 8\beta + P(\beta).$

β) Αποδείξαμε ότι

$$P(x) = x^3 + (5 - \alpha)x^2 - 5\alpha x + 2.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \beta)(x^2 + x - 8) + P(\beta) \\ &= x^3 + x^2 - 8x - \beta x^2 - \beta x + 8\beta + P(\beta) \\ &= x^3 + (1 - \beta)x^2 - (\beta + 8)x + 2. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$5 - \alpha = 1 - \beta \quad \text{και} \quad 5\alpha = \beta + 8$$

δηλαδή

$$\alpha = 1 \quad \text{και} \quad \beta = -3.$$

γ) $P(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 2.$

24. i) $\beta = 3.$

ii) α) Χρησιμοποιώντας το σχήμα του Horner προκύπτει ότι

$$P(x) = x^3 + (a-2)x^2 + (3-2a)x - 6$$

$$= (x-2)(x^2 + \alpha x + 3).$$

Επομένως, οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 + \alpha x + 3 = 0.$$

Άρα, σύμφωνα με τους τύπους του Vieta έχουμε

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\alpha}{1}$$

ή ισοδύναμα

$$4 = -\alpha$$

και τελικά

$$\alpha = -4.$$

$$\text{β)} P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 1 \\ \text{ή} \quad x = 3.$$

$$\text{25. i)} \alpha = 2, \beta = 1 \quad \text{και} \quad \gamma = -1$$

ii) Αξιοποιώντας το ερώτημα i) η εξίσωση $P(x) = 0$ ισοδύναμα γράφεται

$$(2x^2 + x - 1)^2 + (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{και} \quad 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{26. i)} P(x) = (x^2 - x + 1)(-x^2 + 5) + (\alpha + 5)x + (\beta - 5)$$

ii) Έχουμε $\alpha + 5 = 2 \Leftrightarrow \alpha = -3$
και $\beta - 5 = -3 \Leftrightarrow \beta = 2.$

iii) Για $\alpha = -3$ και $\beta = 2$ έχουμε

$$P(x) > (2x - 3)(x^2 - x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(-x^2 + 5) + (2x - 3)$$

$$> (2x - 3)(x^2 - x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(-x^2 + 5)$$

$$+ (2x - 3)(-x^2 + x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(-x^2 + 5)$$

$$- (2x - 3)(x^2 - x + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(-x^2 - 2x + 8) > 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x + 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow -4 < x < 2.$$

$$\text{27. i)} Q(2) = 0$$

$$\text{ii)} Q(x) = 2(x-2)(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{iii)} P(2) = 2 \neq 0, P(1) = -1 \neq 0$$

$$\text{και} \quad P\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$$

iv) Στη διαίρεση $P(x) : Q(x)$ ο διαιρέτης $Q(x)$ είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού. Επομένως, το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι πολυώνυμο της μορφής

$$v(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{όπου} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Από την ταυτότητα

$$P(x) = Q(x)\pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

της διαίρεσης αυτής, θέτοντας $x = 1$,

$$x = 2 \quad \text{και} \quad x = \frac{3}{2} \quad \text{παίρνουμε}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -1 \\ 4\alpha + 2\alpha + \gamma = 2 \\ \frac{9\alpha}{4} + \frac{3\beta}{2} + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha - \beta - 1 \\ 3\alpha + \beta - 1 = 2 \\ 9\alpha + 6\beta + 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \alpha - \beta - 1 \\ \beta = 3 - 3\alpha \\ -\alpha + 6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } v(x) = 2x^2 - 3x.$$

$$\text{28. i)} \text{ Έχουμε}$$

$$f(-1) = 8 \Leftrightarrow 6\beta - 4 = 8 \Leftrightarrow \beta = 2.$$

ii) α) Για $\beta = 2$ έχουμε

$$f(x) = \alpha x^3 + \alpha x^2 - 11x - 3$$

με $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Οι αριθμοί $\pm 1, \pm 3$ είναι οι πιθανές ακέραιες ρίζες της $f(x)$,

οπότε από τη σχέση

$$f(2) \cdot f(3) \cdot f(4) = 0$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f(3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

β) Για $\alpha = 1$ έχουμε

$$f(x) = x^3 + x^2 - 11x - 3.$$

Επομένως,

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 4x + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2 - \sqrt{3}) \cup (-2 + \sqrt{3}, 3).$$

- 29. i)** Η μοναδική περίπτωση να είναι οι αριθμοί ημβ και $2 + \text{συνβ}$ συγχρόνως θετικοί ακέραιοι είναι να ισχύουν ημβ = 1 και συνβ = 0.

Επομένως,

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + x + 2$$

και συνεπώς

$$P(0) = 2.$$

- ii)** Ας υποθέσουμε (απαγωγή σε άτοπο), ότι

$$P(-3) \cdot P(-4) \cdot P(-5) = 0.$$

Δηλαδή,

$$P(-3) = 0 \text{ ή } P(-4) = 0 \text{ ή } P(-5) = 0.$$

Άρα, ένας τουλάχιστον από τους ακέραιους αριθμούς $-3, -4$ και -5 είναι ρίζα του πολυώνυμου $P(x)$ το οποίο έχει ακέραιους συντελεστές. Επομένως, ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $-3, -4$ και -5 είναι διαιρέτης του σταθερού όρου 2, που είναι άτοπο.

- iii) α)** Είναι φανερό ότι η εξίσωση

$$P(x) = 0$$

δεν μπορεί να έχει θετική ρίζα.

Άρα, οι πιθανές ακέραιες ρίζες του είναι οι αρνητικοί διαιρέτες του σταθερού όρου 2. Δηλαδή, οι αριθμοί -1 και -2 . Όμως,

$$\bullet P(-1) = 0 \Leftrightarrow -1 + \alpha - 1 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0, \text{ αδύνατον}$$

$$\bullet P(-2) = 0 \Leftrightarrow -8 + 4\alpha - 2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Επομένως,

$$\rho = -2 \text{ και } \alpha = 2.$$

- β)** $P(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+2) + (x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

- 30. i)** $f(4) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha+4} - \sqrt{\alpha-4} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha+4} = 2 + \sqrt{\alpha-4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + 4 = 4 + \alpha - 4 + 4\sqrt{\alpha-4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\alpha-4} = 1 \Leftrightarrow \alpha - 4 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

- ii)** $A = [-5, 5]$

iii) Με τους ορισμούς.

- iv)** $f(x) > 2 \Leftrightarrow f(x) > f(4) \Leftrightarrow x > 4.$

Και επειδή $x \in [-5, 5]$ συμπεραίνουμε ότι $x \in (4, 5]$.

- 31. i)** $P(1) = 0$ και $P(2) = 0$

- ii)** $x \in [-3, 1] \cup [2, +\infty)$

- iii)** $\sqrt{P(x)} = x - 1$

$$\Leftrightarrow P(x) = (x-1)^2 \text{ και } x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-5) = 0 \text{ και } x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = \sqrt{5}.$$

32. i) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 2 \\ \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 + 1 &\geq 2 \cdot 2^x \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 + 1 - 2 \cdot 2^x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 1)^2 &\geq 0 \text{ ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

ii) Αποδεικνύουμε ότι

$$f(x) \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \text{συν}^2 x &\leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 4\text{συν}^2 x &\leq 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow 4\text{συν}^2 x - 2 &\leq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) = 4\text{συν}^2 x - 2$$

αν και μόνο αν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις

$$f(x) = 2 \text{ και } 4\text{συν}^2 x - 2 = 2.$$

Δηλαδή,

$$x = 0 \text{ και } 4\text{συν}^2 x = 4.$$

Τελικά

$$x = 0.$$

33. i) Αποδεικνύουμε ότι

$$f(x) \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

ii) $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Επίσης, } f(0) = 1 + 1 = 2.$$

Άρα,

$$f(x) \geq f(0) = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, το

$$f(0) = 2.$$

iii) Αποδεικνύουμε ότι

$$f(x) \geq 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επίσης,

$$\frac{2}{x^2 + 1} \leq \frac{2}{0^2 + 1} = 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα, η ισότητα

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

ισχύει μόνο για $x = 0$.

34. i) Έχουμε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα, οι C_f , C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(0, 2)$.

ii) Με τον ορισμό

iii) Έχουμε

$$f(x^2 - 3x) < f(0) \Leftrightarrow x^2 - 3x < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (0, 3).$$

35. i) Έχουμε

$$f(-1) = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-a} - \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-a} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-a} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a = 1.$$

ii) Με τον ορισμό

iii) Έχουμε

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2} + x^2 > 2 + 2^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2} - 2^{x^2} - (-x^2) > 2$$

$$\Leftrightarrow f(-x^2) > f(-1) \Leftrightarrow -x^2 < -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1.$$

36. i) α) Έχουμε

$$0 < 2 - f(1) < 1 \Leftrightarrow -2 < -f(1) < -1$$

$$\Leftrightarrow 1 < f(1) < 2.$$

Οπότε $f(0) < f(1)$ και η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, ως γνησίως μονότονη είναι γνησίως αύξουσα.

β) Για κάθε $x < 0$ έχουμε

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 1$$

και

$$f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 1.$$

ii) α) Για $f(1) = \frac{3}{2}$ έχουμε

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$3^x \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{x-3}} \right) = 4$$

$$\Leftrightarrow 3^x \left(\frac{1}{2^x} + \frac{8}{2^x} \right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = -2.$$

β) Έχουμε

$$f(3 - 2f(x)) < f(0)$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow x > 1.$$

37. i) $A = \left(-\frac{1}{e}, +\infty \right)$

ii) Έχουμε

$$f(2x) < f(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2ex+1) < \ln(ex+e+1)$$

$$\Leftrightarrow 2ex+1 < ex+e+1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{e} < x < 1.$$

iii) Έχουμε

$$f(1 + \eta\mu 2x) = f(1 + \sigma\upsilon\nu x)$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu x$$

$$\Leftrightarrow 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x (2\eta\mu x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

38. i) $A = (1, +\infty)$

$$\text{ii) } f(e^x) + f(e^x - 2) = 3 \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 1) + \ln(e^x - 3) = \ln 2^3$$

$$\Leftrightarrow \ln[(e^x - 1)(e^x - 3)] = \ln 8$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 5 \text{ ή } e^x = -1 \text{ αδύνατο}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 5.$$

$$\text{iii) } f(e^x + e^2 + 1) - f(e^x + 1) \geq \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x + e^2) - \ln e^x \geq \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{e^x + e^2}{e^x} \geq \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^x + e^2}{e^x} \geq 2 \Leftrightarrow e^x \leq e^2$$

$$\Leftrightarrow 1 < x \leq 2.$$

39. i) $P(2) = 0$

$$\text{ii) } \pi(x) = x^2 - (\ln \alpha + 3)x + 3 \ln \alpha.$$

$$\text{iii) } x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = \ln \alpha.$$

$$\text{iv) } \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e.$$

40. i) $1 + \frac{1}{2}\eta\mu x \geq 1 - \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{ii) } \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2}\eta\mu x \leq \frac{3}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως,

$$\ln \frac{1}{2} \leq \ln \left(1 + \frac{1}{2} \eta \mu x \right) \leq \ln \frac{3}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Από το ερώτημα **ii)** και παρατηρώντας ότι

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{3}{2}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\min f = \ln \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \max f = \ln \frac{3}{2}.$$

41. i) $A = (0, 10) \cup (10, +\infty).$

ii) $f(100) = f(10^2) = \frac{2+1}{2-1} = 3$

και

$$f(1000) = f(10^3) = \frac{3+1}{3-1} = 2.$$

Άρα,

$$f(100) > f(1000).$$

iii) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με

$$f(x_1) = f(x_2)$$

έχουμε

$$\frac{\log x_1 + 1}{\log x_1 - 1} = \frac{\log x_2 + 1}{\log x_2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow (\log x_1 + 1) \cdot (\log x_2 - 1)$$

$$= (\log x_1 - 1) \cdot (\log x_2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log x_1 \cdot \log x_2 - \log x_1 + \log x_2 - 1 =$$

$$= \log x_1 \log x_2 + \log x_1 - \log x_2 - 1$$

$$\Leftrightarrow -2\log x_1 = -2\log x_2$$

$$\Leftrightarrow \log x_1 = \log x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

iv) Η εξίσωση

$$f(4x - 20) = 3$$

ορίζεται για εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$4x - 20 \in A. \text{ Δηλαδή,}$$

$$0 < 4x - 20 < 10 \quad \text{ή} \quad 4x - 20 > 10$$

$$\Leftrightarrow 20 < 4x < 30 \quad \text{ή} \quad 4x > 30$$

$$\Leftrightarrow 5 < x < \frac{15}{2} \quad \text{ή} \quad x > \frac{15}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(5, \frac{15}{2}\right) \cup \left(\frac{15}{2}, +\infty\right).$$

Γι' αυτά τα x και παρατηρώντας ότι $f(100) = 3$, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$f(4x - 20) = f(100)$$

$$\Leftrightarrow 4x - 20 = 100, \text{ λόγω iii)}$$

$$\Leftrightarrow x = 30.$$

42. i) $A = \mathbb{R}.$

ii) Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = x \ln \sqrt{2^{x-1}} = x \ln \left(2^{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x \ln 2^{\frac{x-1}{2}} = \ln \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^x$$

$$= \ln 2^{\frac{x(x-1)}{2}} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Επομένως, η εξίσωση

$$f(x) = \ln 2$$

ισοδύναμα γράφεται

$$\ln 2^{\frac{x(x-1)}{2}} = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{x(x-1)}{2}} = 2^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 2.$$

iii) $f(x) < 0$

$$\Leftrightarrow \ln 2^{\frac{x(x-1)}{2}} < \ln 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{x(x-1)}{2}} < 1, \text{ αφού } \ln x \uparrow (0, +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2^{\frac{x(x-1)}{2}} < 2^0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{2} < 0, \text{ αφού } 2^x \uparrow \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (0, 1).$$

43. i) $P(3) = 0.$

ii) $x \leq 3.$

iii) Θέτοντας $\ln^2 x + 2 = \omega$, η εξίσωση
ισοδύναμα γράφεται

$$7\omega^2 - 18\omega - 27 = 0 \Leftrightarrow P(\omega) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = 3 \Leftrightarrow \ln^2 x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ ή } x = \frac{1}{e}.$$

44. i) Έχουμε

$$3 - \sqrt{e^x + 3} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x + 3} < 3$$

$$\Leftrightarrow e^x + 3 < 9 \Leftrightarrow e^x < 6 \Leftrightarrow x < \ln 6.$$

Άρα, $A = (-\infty, \ln 6).$

ii) $f(0) = \ln(3 - \sqrt{1+3}) = \ln 1 = 0$

iii) Με τον ορισμό.

iv) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow x \geq 0$

Επομένως, $x \in [0, \ln 6).$

45. i) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > 0$
έχουμε

$$5^x > 5^0 = 1.$$

Επομένως,

$$5^x + x > 1$$

και τελικά

$$5^x + x - 1 > 0.$$

Επίσης, για κάθε $x \leq 0$ έχουμε

$$5^x \leq 5^0 = 1.$$

Επομένως,

$$5^x + x \leq 1$$

και τελικά

$$5^x + x - 1 \leq 0.$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A = (0, +\infty).$

ii) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$
έχουμε

$$5^{x_1} < 5^{x_2}$$

Άρα,

$$5^{x_1} + x_1 < 5^{x_2} + x_2$$

ή ισοδύναμα

$$5^{x_1} + x_1 - 1 < 5^{x_2} + x_2 - 1$$

και συνεπώς

$$\log(5^{x_1} + x_1 - 1) < \log(5^{x_2} + x_2 - 1).$$

Επίσης,

$$x_1 \log 2 < x_2 \log 2,$$

αφού

$$\log 2 > \log 1 > 0.$$

Επομένως,

$$\log(5^{x_1} + x_1 - 1) + x_1 \log 2$$

$$< \log(5^{x_2} + x_2 - 1) + x_2 \log 2$$

δηλαδή

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι γνησίως
αύξουσα.

iii) $f(x) > \log 26 + 2 \log 2$

$$\Leftrightarrow f(x) > \log(5^2 + 2 - 1) + 2 \log 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) > f(2)$$

$$\Leftrightarrow x > 2, \text{ αφού } f \uparrow A.$$

iv) $f(x) = x$

$$\Leftrightarrow \log(5^x + x - 1) + \log 2^x = \log 10^x$$

$$\Leftrightarrow \log(5^x + x - 1) \cdot 2^x = \log 10^x$$

$$\Leftrightarrow (5^x + x - 1) \cdot 2^x = 10^x$$

$$\Leftrightarrow 10^x + x \cdot 2^x - 2^x = 10^x$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \cdot 2^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1.$$

Άρα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$.

Το σημείο $M(1,1)$.

- 46. i)** Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{ισχύει } f(0) < f(x) < f\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

- ii)** Αξιοποιούμε το ερώτημα **i)** αφού

$$\text{γνωρίζουμε ότι } f(x) = \varepsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\text{για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- iii)** Με τον ορισμό.

- iv)** Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$. Επίσης,

$$0 < \eta\mu^2 x < \sigma\upsilon\nu^2 x < 1$$

$$\text{για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

- 47. i)** Έχουμε

$$3^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 3^x \neq 3^0 \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Άρα, $A_f = \mathbb{R}^*$.

- ii)** Έχουμε

$$\frac{2 \cdot 3^x - 3}{3^x(3^x - 1)} > 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(2 \cdot 3^x - 3) > 0$$

$$\stackrel{y=3^x}{\Leftrightarrow} (y-1)(2y-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow y < 1 \text{ ή } y > \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3^x < 1 \text{ ή } 3^x > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3^x < 3^0 \text{ ή } \ln 3^x > \ln \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x \cdot \ln 3 > \ln 3 - \ln 2$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

- iii)** Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x < 0$

$$\text{ή } x > 1 - \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Για αυτά τα x έχουμε:

$$f(x) = e^{g(x)} \Leftrightarrow \frac{3^x - 2}{3^x - 1} = \frac{2 \cdot 3^x - 3}{3^x(3^x - 1)}$$

$$\Leftrightarrow 3^x(3^x - 2) = 2 \cdot 3^x - 3$$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3 \text{ ή } 3^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 0.$$

Από τις τιμές αυτές δεκτή είναι μόνο η $x = 1$.

- 48. i)** Έχουμε

$$f(100) = 0 \Leftrightarrow 2^{8a} - 4 \cdot 2^{4a} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^{4a}(2^{4a} - 4) = 0 \Leftrightarrow 2^{4a} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^{4a} = 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

- ii)** Για $a = \frac{1}{2}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= (\log x)^4 + 4(\log 10 - \log x) \cdot (\log x)^2 \\ &= (\log x)^4 - 4(\log x)^3 + 4(\log x)^2 \\ &= (\log^2 x)^2 - 4(\log^2 x) \cdot \log x + 4(\log x)^2 \\ &= (\log^2 x - 2\log x)^2, \text{ για κάθε } x > 0. \end{aligned}$$

- iii)** Έχουμε

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (\log^2 x - 2\log x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log^2 x - 2\log x = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x(\log x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log x = 0 \text{ ή } \log x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 100.$$

- 49. i)** Το $P(x)$ έχει πιθανές ακέραιες ρίζες τους $\pm 1, \pm 2$. Από τις τιμές αυτές μόνο για την τιμή $p = 2$ προκύπτει ακέραια τιμή για τον a .

Η τιμή $\alpha = -1$.

ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 - 3x^2 - x - 2 \\ &= (x-2)(2x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Οπότε

$$P(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

και

$$A = (2, +\infty).$$

iii) Έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x-2) + \ln(x^2 + 13) \\ \Leftrightarrow \ln P(x) &= \ln[(x-2)(x^2 + 13)] \\ \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + x + 1) \\ &= (x-2)(x^2 + 13) \\ \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + x - 12) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -4 \text{ ή } x = 3. \\ \text{Δεκτή μόνο η } x &= 3. \end{aligned}$$

50. i) Έχουμε $1 + \eta\mu^2 x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $1 + \sigma\upsilon\nu^2 x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, $\ln(1 + \eta\mu^2 x) \geq \ln 1 = 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $\ln(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) \geq \ln 1 = 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$f(x) = \ln(1 + \eta\mu^2 x) + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) \geq 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Από το ερώτημα i) προκύπτει ότι για να ισχύει $f(x) = 0$ πρέπει

$$1 + \eta\mu^2 x = 1 \text{ και } 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1.$$

Δηλαδή, $\eta\mu^2 x = 0$ και $\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$,

που είναι αδύνατον. Άρα,

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και συνεπώς ο αριθμός 0 δεν είναι ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & (1 + \eta\mu^2 x)(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) \\ &= (1 + \eta\mu^2 x)(2 - \eta\mu^2 x) \\ &= 2 - \eta\mu^4 x + \eta\mu^2 x \\ &= 2 + \frac{1}{4} - \left(\eta\mu^4 x - 2\frac{1}{2}\eta\mu^2 x + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{9}{4} - \left(\eta\mu^2 x - \frac{1}{2} \right)^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

iv) Από το ερώτημα iii) προκύπτει ότι

$$(1 + \eta\mu^2 x)(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) \leq \frac{9}{4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει

$$\text{για } x = \frac{\pi}{4}.$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \ln[(1 + \eta\mu^2 x)(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x)] &\leq \ln \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow \ln(1 + \eta\mu^2 x) + \ln(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) &\leq \ln \left(\frac{3}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow f(x) &\leq 2 \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

v) $f(x) \leq 2 \ln \frac{3}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η

$$\text{ισότητα ισχύει για } x = \frac{\pi}{4}.$$

Βιβλιογραφία

- Π. Βασιλειάδης, «Άλγεβρα Α΄ Λυκείου» (Φροντιστήρια Βασιλειάδη).
- Π. Βασιλειάδης – Γ. Μαυρίδης, «Αλγεβρικά θέματα» (Φροντιστήρια Βασιλειάδη).
- Π. Βασιλειάδης, «Άλγεβρα Β΄ Λυκείου» (Φροντιστήρια Βασιλειάδη).
- Δ. Γουβίτσα, «Άλγεβρα Β΄ Λυκείου» (Όλυμπος).
- Θ. Καζαντζής, «Άλγεβρα».
- Θ. Καζαντζής, «Πολυώνυμα».
- Θ. Καζαντζής, «Άλγεβρα Β΄ Λυκείου» (Πελεκάνος).
- Σ. Κανέλλος, «Τριγωνομετρία».
- Δ. Μάγκος, «Πολυώνυμα» (Φροντιστήρια Βασιλειάδη).
- Π. Μάγειρας, «Αλγεβρικά Θέματα».
- Γ. Μπαϊλάκης, «Κριτήρια Αξιολόγησης Άλγεβρας» (Σαββάλας).
- Η. Ντζιώρας, «Άλγεβρα».
- Α. Πάλλας, «Μεγάλη Άλγεβρα» (Παπαζήση).
- Ι. Πανάκης, «Τριγωνομετρία».
- Γ. Σπηλιώτης, «Άλγεβρα Β΄ Λυκείου» (Πελεκάνος).
- Π. Τόγκας, «Ευθύγραμμος Τριγωνομετρία» (Τόγκας).
- Α. Τσουλφανίδης, «Μεθοδική Άλγεβρα Β΄ Λυκείου» (Πατάκη)

Περιοδικά

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ

Ο ΚΟΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΠΟΥΔΑΣΤΗ

ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ

ΤΟ Φ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΒΗΜΑ

ΘΕΑΙΤΗΤΟΣ

ΔΙΑΣΤΑΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΔΟΚΙΜΙΑ

ΚΒΑΗΜ

KVANTUM

CRUX

THE AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY

THE MATHEMATICAL GAZETTE

THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL

ELEMENTE DER MATHEMATIK

THE MATHEMATICS TEACHER

