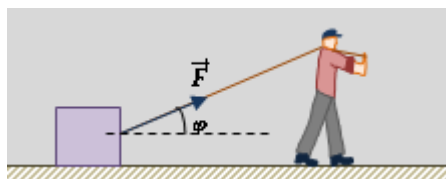


ΘΕΜΑ 4

Ένας κύβος μάζας $m = 2\text{ kg}$ είναι αρχικά ακίνητος πάνω σε οριζόντιο, ακλόνητο δάπεδο, με το οποίο εμφανίζει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,5$. Τη στιγμή $t_0 = 0$ ασκούμε στον κύβο σταθερή δύναμη $\vec{F}$, μέτρου $F = 20\text{ N}$, σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντια διεύθυνση όπως στο σχήμα. Για τη γωνία φ δίνονται $\eta\mu\varphi = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.



Η δύναμη $\vec{F}$ καταργείται τη στιγμή $t_1 = 2\text{ s}$.

4.1. Αν δίνεται ότι ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής κύβου-δαπέδου, είναι ίσος με τον αντίστοιχο συντελεστή τριβής ολίσθησης, να δείξετε ότι ο κύβος αρχίζει να κινείται τη στιγμή $t_0 = 0$ και ότι δεν χάνει την επαφή του με το οριζόντιο δάπεδο.

Μονάδες 6

Να υπολογίσετε:

4.2. την ενέργεια που μεταφέρθηκε από τον άνθρωπο στον κύβο, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή που αυτή καταργήθηκε.

Μονάδες 6

4.3. το ποσοστό της ενέργειας που μεταφέρθηκε στον κύβο, το οποίο μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια εξαιτίας των τριβών, από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή που καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}$

Μονάδες 6

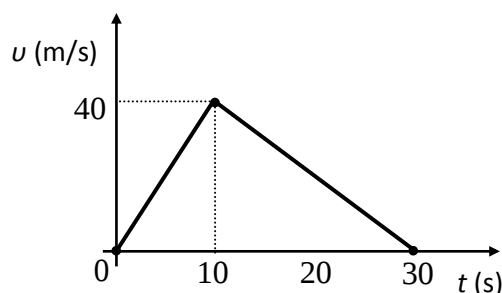
4.4. τη συνολική μετατόπιση του κύβου πάνω στο δάπεδο, από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι αυτός να σταματήσει.

Μονάδες 7

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και ότι δυνάμεις που οφείλονται στον ατμοσφαιρικό αέρα αγνοούνται.

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται η γραφική παράσταση της τιμής της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο για ένα σώμα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ που κινείται ευθύγραμμα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



4.1 Να υπολογίσετε τη μέση ταχύτητα του σώματος για το χρονικό διάστημα από $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου ($a-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Χρονικό διάστημα (s)	Μέτρο συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα (N)	Διανύσματα της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης και της ταχύτητας της σώματος (ομόρροπα ή αντίρροπα)	Να χαρακτηρίσετε τη κίνηση του σώματος (π.χ. ευθύγραμμη ομαλή, ευθύγραμμη επιταχυνόμενη...)
0 - 10			
10 - 30			

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - 10 \text{ s}$ και $10 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

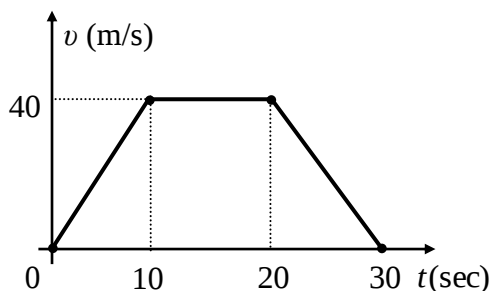
Σε ποιο χρονικό διάστημα προσφέρεται ενέργεια στο σώμα και σε ποιο χρονικό διάστημα αφαιρείται ενέργεια από το σώμα;

Με ποιο γνωστό θεώρημα είναι συμβατά τα αποτελέσματά σας;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα μάζας $m = 10 \text{ Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$ φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



4.1 Να υπολογίσετε τη μετατόπιση του σώματος κατά το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα επιτάχυνσης - χρόνου ($a-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Μονάδες 6

4.3 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Χρονικό διάστημα (s)	Μέτρο συνισταμένης οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)	Διανύσματα της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης και της ταχύτητας της σώματος (ομόρροπα ή αντίρροπα)	Να χαρακτηρίσετε τη κίνηση του σώματος (π.χ. ευθύγραμμη ομαλή, ευθύγραμμη επιταχυνόμενη...)
0-10			
10-20			
20-30			

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης κατά τα τρία χρονικά διαστήματα:
 $0 \text{ s} - 10 \text{ s}$, $10 \text{ s} - 20 \text{ s}$ και $20 \text{ s} - 30 \text{ s}$.

Σε ποιο χρονικό διάστημα προσφέρεται ενέργεια στο σώμα και σε ποιο χρονικό διάστημα αφαιρείται ενέργεια από το σώμα;

Με ποιο γνωστό θεώρημα είναι συμβατά τα αποτελέσματά σας;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ένα άδειο κιβώτιο, μάζας $m = 10 \text{ Kg}$, βρίσκεται ακίνητο πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Ένας εργάτης ασκεί στο κιβώτιο οριζόντια δύναμη $F = 60 \text{ N}$ για χρονικό διάστημα Δt και το μετατοπίζει κατά $\Delta x = 25 \text{ m}$.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και δαπέδου είναι $\mu = 0,4$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

4.1 Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα Δt .

Μονάδες 6

4.2 Να υπολογίσετε τα έργα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο κατά το χρονικό διάστημα Δt .

Μονάδες 7

4.3 Να υπολογίσετε τη ταχύτητα του κιβωτίου όταν αυτό έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x = 25 \text{ m}$.

Μονάδες 5

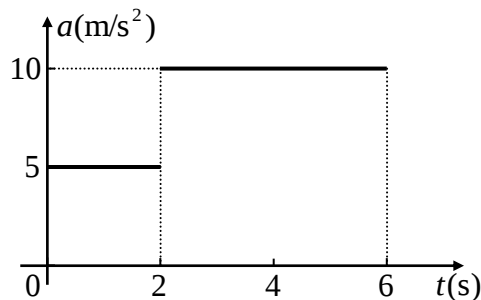
Ένα ίδιο κιβώτιο είναι γεμάτο με άμμο μάζας $m_1 = 40 \text{ Kg}$ και βρίσκεται ακίνητο πάνω στο ίδιο οριζόντιο δάπεδο.

4.4 Να υπολογίσετε το μέτρο της οριζόντιας δύναμης που πρέπει να ασκήσει ο εργάτης στο γεμάτο κιβώτιο ώστε κατά το ίδιο χρονικό διάστημα Δt να το μετατοπίσει κατά $\Delta x = 25 \text{ m}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα μάζας 2 Kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα 0 s - 6 s φαίνεται στο σχήμα. Η αρχική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ s είναι $v_0 = 0$ m/s.



4.1 Να συμπληρωθούν τα κενά στις επόμενες προτάσεις με έναν από τους όρους:

“ευθύγραμμη ομαλή”, “ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη”, “ευθύγραμμη επιταχυνόμενη”

Στο χρονικό διάστημα από 0 s – 2 s η κίνηση είναι

Στο χρονικό διάστημα από 2 s – 6 s η κίνηση είναι

Να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

Μονάδες 4

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα 0 s - 6 s.

Μονάδες 6

4.3 Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα κατά το χρονικό διάστημα 0 s - 6 s και ποια η μέση ταχύτητά του το αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

Μονάδες 8

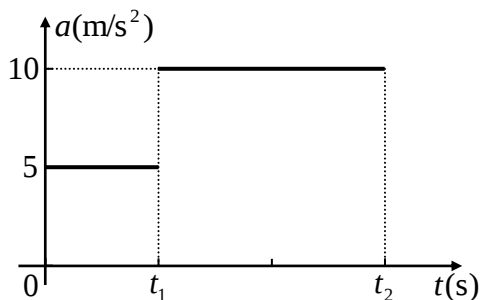
4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα τα χρονικά διαστήματα 0 s - 2 s, και 2 s - 6 s.

Τα αποτελέσματά σας επαληθεύουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ένα σώμα μάζας $m = 4 \text{ Kg}$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το διάγραμμα της επιτάχυνσης του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η αρχική ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ s}$ είναι $v_0 = 0 \text{ m/s}$.



4.1 Να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 , αν γνωρίζετε ότι οι ταχύτητες του σώματος τις χρονικές αυτές στιγμές είναι $v_1 = +10 \text{ m/s}$ και $v_2 = +50 \text{ m/s}$ αντίστοιχα.

Μονάδες 7

4.2 Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου ($v-t$) για το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$.

Μονάδες 5

4.3 Ποιο το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα το χρονικό διάστημα $0 \text{ s} - t_2$.

Μονάδες 6

4.4 Να υπολογίσετε το έργο της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα τα χρονικά διαστήματα $0 \text{ s} - t_1$ και $t_1 - t_2$.

Τα αποτελέσματά σας επαληθεύουν το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4

Ένα μικρό κιβώτιο σχήματος κύβου (σώμα Σ), με βάση από ομογενές υλικό, συγκρατείται αρχικά ακίνητο πάνω σε πλάγιο ομογενές δάπεδο μεγάλου μήκους, με το οποίο εμφανίζει τριβή με συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu = 0,25$. Η γωνία κλίσης του κεκλιμένου δαπέδου είναι φ , για την οποία δίνονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\eta\mu\varphi = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,8$.



Κάποια στιγμή το κιβώτιο εκτοξεύεται με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0$ παράλληλη με το κεκλιμένο δάπεδο, με φορά προς τα πάνω και μέτρο $v_0 = 8 \frac{m}{s}$, όπως στο σχήμα.

4.1 Να υπολογίσετε το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος Σ , κατά την άνοδό του στο κεκλιμένο δάπεδο.

Μονάδες 7

4.2 Σε πόση απόσταση από την αρχική του θέση θα φτάσει το σώμα Σ , μέχρι να μηδενιστεί στιγμιαία η ταχύτητά του.

Μονάδες 6

4.3 Αν υποθέσουμε ότι ο συντελεστής μέγιστης στατικής (οριακής) τριβής και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, είναι ίσοι, να δείξετε ότι το σώμα Σ , μετά τον στιγμιαίο μηδενισμό της ταχύτητάς του, επιστρέφει προς την βάση του κεκλιμένου.

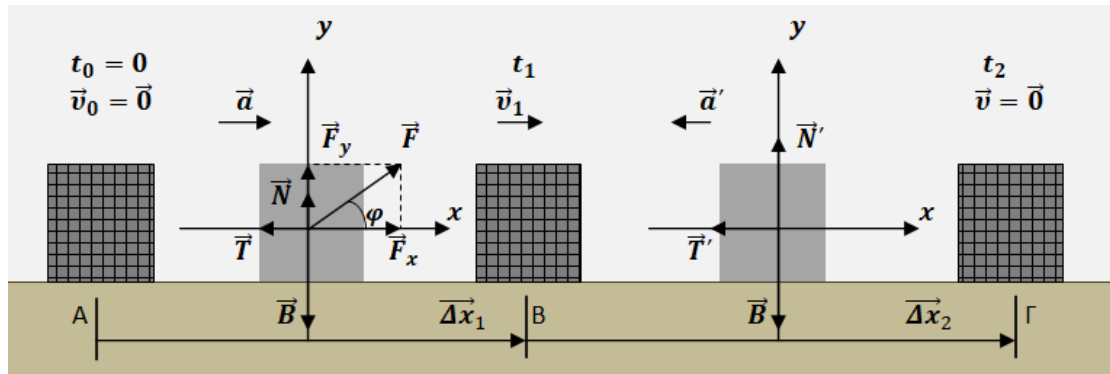
Μονάδες 6

4.4 Αν δίνεται ότι η μάζα του σώματος Σ είναι $m = 2 \text{ kg}$, να υπολογίσετε την ενέργεια η οποία μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβών, από την στιγμή της εκτόξευσης του σώματος προς τα πάνω στο κεκλιμένο, μέχρι να περάσει και πάλι από την αρχική του θέση καθώς κατεβαίνει επιστρέφοντας προς αυτήν.

Μονάδες 6

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας $g = 10 \frac{m}{s^2}$, οι αντιστάσεις αέρα θεωρούνται αμελητέες.

ΘΕΜΑ 4



4.1. Το βάρος του κύβου έχει μέτρο $B = m \cdot g = 20 \text{ N}$

Κίνηση του κύβου από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$

Θεωρούμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, με οριζόντιο άξονα x' και κατακόρυφο άξονα y' , σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο και αναλύουμε τη δύναμη του ανθρώπου $\vec{F}$ σε οριζόντια συνιστώσα $\vec{F}_x$ και κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{F}_y$, για τα μέτρα των οποίων ισχύουν:

$$F_x = F \cdot \sin \varphi = 16 \text{ N και } F_y = F \cdot \eta \mu \varphi = 12 \text{ N}$$

Επειδή προέκυψε $F_y < B$, ο κύβος δεν χάνει την επαφή του με το οριζόντιο δάπεδο.

Στην κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε ισορροπία δυνάμεων. Άρα ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0, \text{ δηλαδή } N + F_y - B = 0 \text{ και τελικά } N = B - F_y = 8 \text{ N}$$

Υπολογίζουμε τώρα το μέτρο της τριβής ολίσθησης $T = \mu \cdot N = 4 \text{ N}$

Επειδή προέκυψε $F_x > T$, συμπεραίνουμε ότι ο κύβος τη στιγμή $t_0 = 0$ αρχίζει να κινείται.

4.2. Για την κίνηση του κύβου από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$, στον οριζόντιο άξονα ισχύει $\Sigma F_x = m \cdot a$. Ο κύβος στην οριζόντια κίνησή του σε αυτό το χρονικό διάστημα αποκτά επιτάχυνση μέτρου

$$a = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{F_x - T}{m} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Έτσι τη στιγμή t_1 έχει αποκτήσει ταχύτητα $\vec{v}_1$ μέτρου $v_1 = a \cdot t_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Και έχει πραγματοποιήσει μετατόπιση $\vec{\Delta x}_1$, μέτρου $\Delta x_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t_1^2 = 12 \text{ m}$

Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στον κύβο είναι ίση με το έργο της δύναμης $\vec{F}$.

$$\text{Δηλαδή } E_{\pi\rho\sigma\varphi} = W_F = F \cdot \Delta x_1 \cdot \sin \varphi = 192 \text{ J}$$

4.3. Η μετατροπή ενέργειας σε θερμική, γίνεται μέσω του έργου της τριβής. Το ενεργειακό αυτό ποσόν είναι ίσο με το έργο της τριβής κατ' απόλυτη τιμή. Δηλαδή ισχύει:

$$Q = |W_T| = |-T \cdot \Delta x_1| = 48 \text{ J}$$

Το ποσοστό της προσφερόμενης από τον άνθρωπο ενέργειας στον κύβο, το οποίο μετατράπηκε σε θερμική ενέργεια, είναι:

$$\pi = \frac{Q}{E_{\text{προσφ}}} \cdot 100\% = \frac{48}{192} \cdot 100\% = 25\%$$

4.4. Κίνηση του κύβου από τη στιγμή $t_1 = 2 \text{ s}$ μέχρι τη στιγμή t_2 που ακινητοποιείται.

Μετά τη στιγμή t_1 κατά την οποία καταργήθηκε η δύναμη $\vec{F}$ του ανθρώπου και μέχρι να ακινητοποιηθεί ο κύβος, για τις δυνάμεις που δέχεται ισχύουν:

$$\Sigma F_y = 0, \text{ δηλαδή } N' - B = 0, \text{ οπότε } N' = B = 20 \text{ N}$$

$$\text{Άρα για το μέτρο της τριβής ολίσθησης ισχύει } T' = \mu \cdot N' = 10 \text{ N}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για το χρονικό αυτό διάστημα έχουμε:

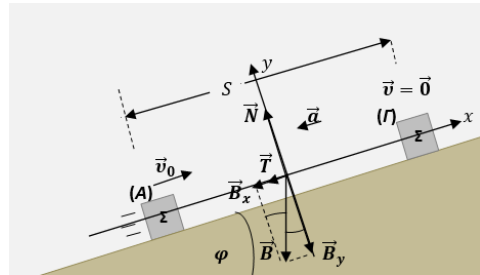
$$\Delta K = W_{\text{ολ}}, \text{ αναλυτικά } 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = -T' \cdot \Delta x_2 \text{ και τελικά } \Delta x_2 = 14,4 \text{ m}$$

Έτσι η συνολική μετατόπιση του κύβου από τη στιγμή $t_0 = 0$ μέχρι να σταματήσει είναι:

$$\Delta x_{\text{ολ}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 26,4 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ 4 (Ενδεικτικές απαντήσεις)

4.1 Κατά την άνοδο του σώματος Σ από το σημείο εκτόξευσης (Α), μέχρι το σημείο μηδενισμού της ταχύτητάς του (Γ), οι δυνάμεις που δέχεται είναι το βάρος του $\vec{B}$, η κάθετη δύναμη στήριξης $\vec{N}$ και η τριβή $\vec{T}$ από το κεκλιμένο δάπεδο. Δημιουργούμε ένα ελεύθερο διάγραμμα δυνάμεων μεταφέροντας όλες τις δυνάμεις στο κέντρο του σώματος και ένα σύστημα κάθετων αξόνων $x'x$ και $y'y$, με τον $x'x$ άξονα παράλληλο στο κεκλιμένο δάπεδο και αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες $\vec{B}_x$ και $\vec{B}_y$ στους άξονες αυτούς.



Στον άξονα $y'y$ οι δυνάμεις ισορροπούν. Άρα ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0,$$

$$\text{Δηλαδή } N - B_y = 0$$

$$\text{ή } N = B_y = m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0,8 \cdot m \cdot g$$

Το μέτρο της τριβής ολίσθησης, σύμφωνα με τον νόμο της τριβής είναι:

$$T = \mu \cdot N = 0,25 \cdot 0,8 \cdot m \cdot g = 0,2 \cdot m \cdot g$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής στον άξονα $x'x$:

$$\Sigma F_x = m \cdot a$$

$$\text{ή } -T - B_x = m \cdot a$$

$$\text{οπότε } a = -\frac{(T + m \cdot g \cdot \eta \mu \varphi)}{m} = -\frac{(0,2 \cdot m \cdot g + 0,6 \cdot m \cdot g)}{m} = -0,8 \cdot g = -8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Άρα το μέτρο της επιβράδυνσης του σώματος είναι

$$|a| = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

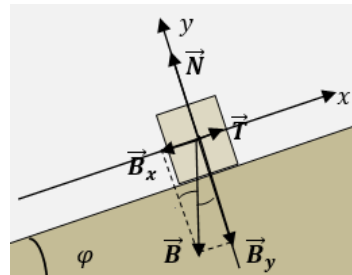
4.2 Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας, για την κίνηση του σώματος από το (Α), ως το (Γ):

$$\Delta K = W_{B_x} + W_T$$

$$\text{ή } 0 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = -B_x \cdot S - T \cdot S$$

$$\text{ή } S = \frac{m \cdot v_0^2}{2 \cdot (B_x + T)} = \frac{m \cdot v_0^2}{2 \cdot (m \cdot g \cdot \eta \mu \varphi + \mu \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi)} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot (\eta \mu \varphi + \mu \cdot \sin \varphi)} = \frac{64}{2 \cdot 10 \cdot 0,8} \text{ m} = 4 \text{ m}$$

4.3 Όταν το σώμα φτάσει στο ανώτατο σημείο πάνω στο κεκλιμένο δάπεδο, μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητά του και εξαιτίας του βάρους του τείνει να κινηθεί προς τα κάτω. Η τριβή που δέχεται από το δάπεδο αντιστρέφεται, έχει φορά προς τα πάνω ώστε να αντιτίθεται στην ολίσθηση του σώματος. Για να αποφασίσουμε αν θα κινηθεί προς τα κάτω, πρέπει να συγκρίνουμε το μέτρο της συνιστώσας $\vec{B}_x$, με το μέτρο της οριακής τριβής, για την οποία δόθηκε ότι είναι ίσο με το μέτρο της τριβής ολίσθησης:



$$\frac{B_x}{T} = \frac{m \cdot g \cdot \eta \mu \varphi}{\mu \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi} = \frac{\eta \mu \varphi}{\mu \cdot \sin \varphi} = \frac{0,6}{0,25 \cdot 0,8} = 3$$

$$\text{Έτσι προκύπτει } B_x > T$$

Άρα το σώμα επιστρέφει προς τη βάση του κεκλιμένου δαπέδου.

4.4 Η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα κατά την κίνηση του σώματος από το σημείο εκτόξευσης, μέχρι να περάσει και πάλι από αυτό επιστρέφοντας, είναι σε απόλυτη τιμή ίση με το έργο της τριβής σε αυτή την διαδρομή:

$$Q = |W_{T_{\rho\lambda}}| = |-T \cdot S - T \cdot S| = 2 \cdot T \cdot S = 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g \cdot \sigma \nu \nu \varphi \cdot S$$

$$\text{Τελικά } Q = 2 \cdot 0,25 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 0,8 \cdot 4 \text{ J} = 32 \text{ J}$$

Ενδεικτική Λύση

4.1 Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της ταχύτητας και του άξονα των χρόνων είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης, επομένως:

Χρονικό διάστημα 0 s - 10 s:

$$\Delta x_1 = \frac{(+40) \cdot 10}{2} \text{ m} = +200 \text{ m}$$

Χρονικό διάστημα 10 s - 30 s:

$$\Delta x_2 = \frac{(+40) \cdot 20}{2} \text{ m} = +400 \text{ m}$$

και η συνολική μετατόπιση είναι :

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \text{ ή } \Delta x = +600 \text{ m}$$

(Μονάδες 3)

Το ολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα είναι:

$$S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 600 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

και η μέση ταχύτητά του είναι:

$$v = \frac{S}{t_{ολικο}} \text{ ή } v = \frac{600 \text{ m}}{30 \text{ s}} \text{ και τελικά } v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Μονάδες 1)

Εναλλακτικά, η συνολική μετατόπιση θα μπορούσε να βρεθεί και από

$$\Delta x = \frac{(+40) \cdot 30}{2} = +600 \text{ m}$$

4.2 Η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης, οπότε:

Χρονικό διάστημα 0 s - 10 s:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} \text{ ή } \alpha_1 = \frac{+40 \text{ m/s}}{10 \text{ s}}$$

και τελικά

$$\alpha_1 = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

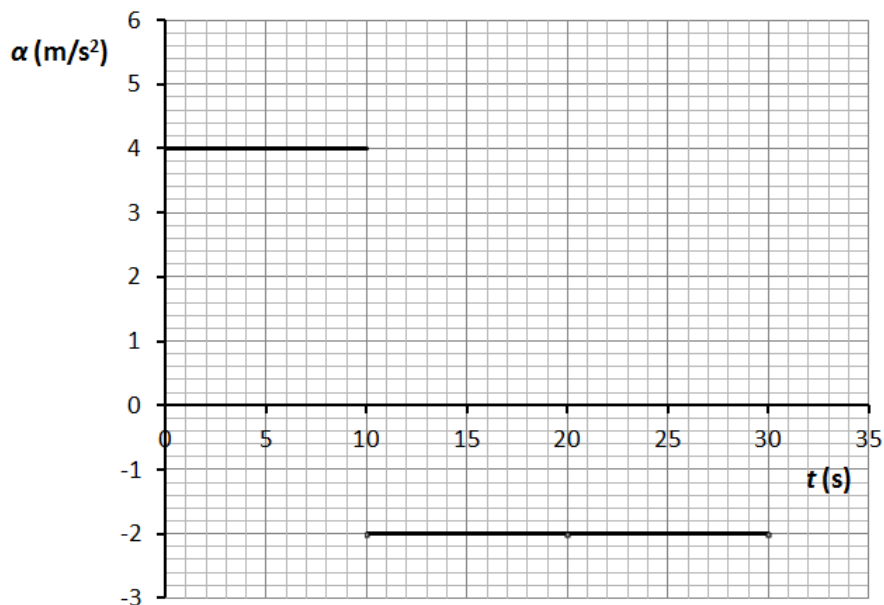
Χρονικό διάστημα 10 s - 30 s:

$$\alpha_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \text{ ή } \alpha_2 = \frac{-40 \text{ m/s}}{20 \text{ s}}$$

και τελικά

$$\alpha_2 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(Μονάδες 3)



(Μονάδες 3)

4.3 Από 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\Sigma F = ma$

Χρονικό διάστημα (s)	Μέτρο συνισταμένης οριζόντιας δύναμης που ασκείται στο σώμα (N)	Η συνισταμένη οριζόντια δύναμη και η ταχύτητα της σώματος είναι ομόρροπα ή αντίρροπα διανύσματα	Να χαρακτηρίσετε τη κίνηση του σώματος (π.χ. ευθύγραμμη ομαλή, ευθύγραμμη επιταχυνόμενη...)
0 - 10	+40	ομόρροπα	Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη
10 - 30	-20	αντίρροπα	Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη

(Μονάδες 6)

4.4 Για το έργο της συνισταμένης δύναμης έχουμε:

Χρονικό διάστημα 0 s - 10 s:

$$W_{\Sigma F_1} = \Sigma F_1 \cdot \Delta x_1 = (+40) \cdot (+200) \text{ J} = +8.000 \text{ J}$$

Χρονικό διάστημα 10 s - 30 s:

$$W_{\Sigma F_2} = \Sigma F_2 \cdot \Delta x_2 = (-20) \cdot (+400) \text{ J} = -8.000 \text{ J}$$

(Μονάδες 2)

Στο χρονικό διάστημα 0 s - 10 s προσφέρεται ενέργεια στο σώμα αφού το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι θετικό, ενώ στο χρονικό διάστημα 10 s - 30 s αφαιρείται ενέργεια από το σώμα αφού το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι αρνητικό.

(Μονάδες 2)

Παρατηρούμε ότι το συνολικό έργο για το χρονικό διάστημα από 0 s - 30 s είναι:

$$W = W_{\Sigma F_1} + W_{\Sigma F_2} \text{ ή } W = 0 \text{ J}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει και με την εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη συνολική μετατόπιση του σώματος:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W$$

αλλά

$$K_{\text{τελ}} = K_{\text{αρχ}} = 0 \text{ J}$$

επομένως και

$$W = 0 \text{ J}$$

(Μονάδες 3)

Ενδεικτική Λύση

4.1 Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της ταχύτητας και του άξονα των χρόνων είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης, επομένως:

Χρονικό διάστημα 0 s - 10 s:

$$\Delta x_1 = \frac{(+40) \cdot 10}{2} \text{ m} = +200 \text{ m}$$

Χρονικό διάστημα 10 s - 20 s:

$$\Delta x_2 = (+40) \cdot 10 \text{ m} = +400 \text{ m}$$

Χρονικό διάστημα 20 s - 30 s:

$$\Delta x_3 = \frac{(+40) \cdot 10}{2} \text{ m} = +200 \text{ m}$$

(Μονάδες 4)

Η συνολική μετατόπιση είναι:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \text{ ή } \Delta x = +800 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

Εναλλακτικά, η συνολική μετατόπιση θα μπορούσε να βρεθεί και από το εμβαδό του τραπεζίου:

$$\Delta x = \frac{10 + 30}{2} \cdot (+40) \text{ m} = +800 \text{ m}$$

4.2 Η κλίση της ευθείας στο διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνει την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης, οπότε:

Χρονικό διάστημα 0 s - 10 s:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t_1} \text{ ή } \alpha_1 = \frac{+40 \text{ m/s}}{10 \text{ s}}$$

Τελικά:

$$\alpha_1 = +4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Χρονικό διάστημα 10 s - 20 s:

$$\alpha_2 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

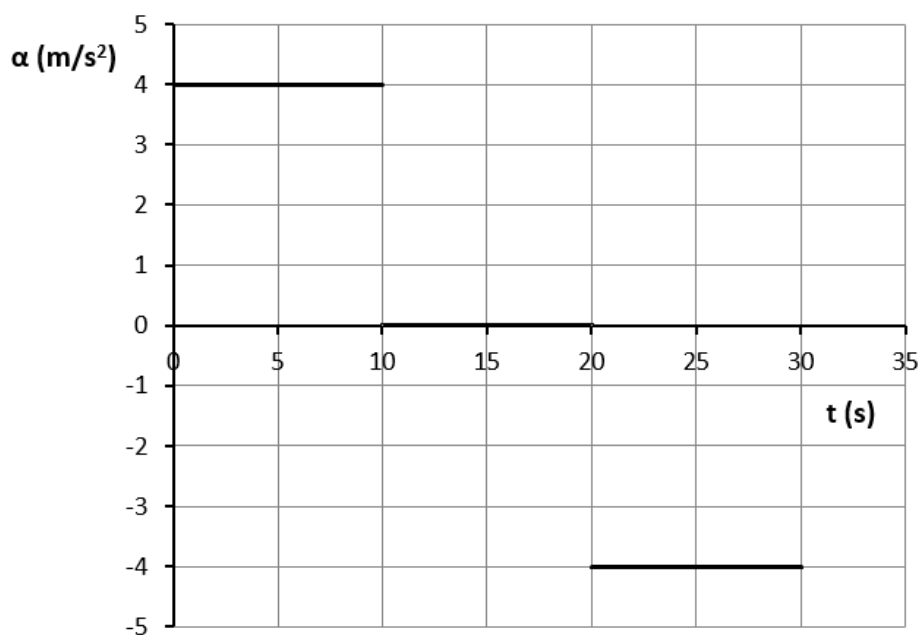
Χρονικό διάστημα 20 s - 30 s:

$$\alpha_3 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t_2} \text{ ή } \alpha_3 = \frac{-40 \text{ m/s}}{10 \text{ s}}$$

Τελικά:

$$\alpha_3 = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(Μονάδες 3)



(Μονάδες 3)

4.3 Από 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε $\Sigma F = ma$

Χρονικό διάστημα (s)	Μέτρο συνισταμένης οριζόντια δύναμη που ασκείται στο σώμα (N)	Διανύσματα της συνισταμένης οριζόντιας δύναμης και της ταχύτητας της σώματος (ομόρροπα ή αντίρροπα)	Να χαρακτηρίσετε τη κίνηση του σώματος (π.χ. ευθύγραμμη ομαλή, ευθύγραμμη επιταχυνόμενη...)
0-10	+40	ομόρροπα	Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη
10-20	0	-	Ευθύγραμμη ομαλή
20-30	-40	αντίρροπα	Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη

(Μονάδες 6)

4.4 Για το έργο της συνισταμένης δύναμης έχουμε:

Χρονικό διάστημα 0 s - 10 s:

$$W_{\Sigma F_1} = \Sigma F_1 \cdot \Delta x_1 = (+40) \cdot (+200) \text{ J} = +8.000 \text{ J}$$

Χρονικό διάστημα 10 s - 20 s:

$$W_{\Sigma F_2} = \Sigma F_2 \cdot \Delta x_2 = 0 \cdot (+400) \text{ J} = 0 \text{ J}$$

Χρονικό διάστημα 20 s - 30 s:

$$W_{\Sigma F_3} = \Sigma F_3 \cdot \Delta x_3 = (-40) \cdot (+200) \text{ J} = -8.000 \text{ J}$$

(Μονάδες 2)

Στο χρονικό διάστημα 0 s - 10 s προσφέρεται ενέργεια στο σώμα, αφού το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι θετικό, ενώ στο χρονικό διάστημα 20 s - 30 s αφαιρείται ενέργεια από το σώμα, αφού το έργο της συνισταμένης δύναμης είναι αρνητικό.

(Μονάδες 2)

Παρατηρούμε ότι το συνολικό έργο για το χρονικό διάστημα από 0 s - 30 s είναι:

$$W = W_{\Sigma F_1} + W_{\Sigma F_2} + W_{\Sigma F_3} \text{ ή } W = 0 \text{ J}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει και με την εφαρμογή του θεωρήματος μεταβολής της κινητικής ενέργειας για τη συνολική μετατόπιση του σώματος:

$$K_{\tau\epsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W$$

Αλλά

$$K_{\tau\epsilon\lambda} = K_{\alpha\rho\chi} = 0 \text{ J}$$

Επομένως

$$W = 0 \text{ J}$$

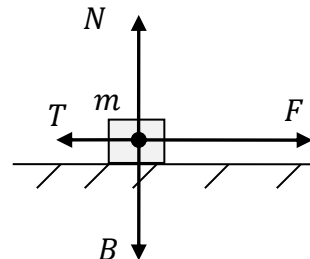
(Μονάδες 3)

Ενδεικτική Λύση

4.1 Εφαρμόζοντας τον νόμο της τριβής ολίσθησης, τη σχέση ισορροπίας των δυνάμεων στον άξονα γγ' και τον 2^ο νόμο του Νεύτωνα στον άξονα χχ' προκύπτει:

$$\left. \begin{array}{l} T = \mu \cdot N \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = B \\ \Sigma F_x = ma \Rightarrow F - T = ma \end{array} \right\} a = 2 \text{ m/s}^2 \quad (1)$$

(Μονάδες 4)



Για τη μετατόπιση ισχύει:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

που, με τη βοήθεια της σχέσης (1), δίνει:

$$\Delta t = 5 \text{ s} \quad (2)$$

(Μονάδες 2)

4.2 Για τα έργα των τεσσάρων δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο έχουμε

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot \sin 0^\circ \quad \text{ή} \quad W_F = 1.500 \text{ J} \quad (3)$$

$$W_B = B \cdot \Delta x \cdot \sin 90^\circ \quad \text{ή} \quad W_B = 0 \text{ J}$$

$$W_N = N \cdot \Delta x \cdot \sin 270^\circ \quad \text{ή} \quad W_N = 0 \text{ J}$$

(Μονάδες 4)

$$\left. \begin{array}{l} W_T = T \cdot \Delta x \cdot \sin 180^\circ \\ T = \mu \cdot N \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = B \end{array} \right\} W_T = -1.000 \text{ J} \quad (4)$$

(Μονάδες 3)

4.3 Από το ΘΜΚΕ έχουμε

$$\Delta K = \Sigma W \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - 0 = W_F + W_T \xrightarrow{(3),(4)} \frac{1}{2} m v^2 = 500 \text{ J}$$

και τελικά

$$v = 10 \text{ m/s}$$

(Μονάδες 5)

4.4 Η συνολική μάζα του γεμάτου κιβωτίου είναι $m_{o\lambda} = 50 \text{ Kg}$.

Έχουμε

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N' = B_{o\lambda} \quad \text{ή} \quad N' = 500 \text{ N} \quad \text{και}$$

$$T' = \mu \cdot N' \quad \text{ή} \quad T' = 200 \text{ N}$$

Σε ίσα χρονικά διαστήματα, τα δύο κιβώτια διανύουν ίσες αποστάσεις. Άρα έχουν την ίδια επιτάχυνση, δηλ.:

$$a' = 2 \text{ m/s}^2$$

Στο αποτέλεσμα αυτό θα καταλήγαμε και από τη σχέση:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a' \Delta t^2 \text{ ή } a' = 2 \text{ m/s}^2$$

(Μονάδες 4)

Από τον 2^ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε

$$\Sigma F_x = m_{ολ} a' \Rightarrow F' - T' = m_{ολ} a'$$

και τελικά

$$F' = 300 \text{ N}$$

(Μονάδες 3)

Ενδεικτική Λύση

4.1 Εφόσον το σώμα δεν έχει αρχική ταχύτητα και στο χρονικό διάστημα από $0\text{ s} - 2\text{ s}$ κινείται με σταθερή επιτάχυνση $a_1 = 5\text{ m/s}^2$, η κίνηση είναι αναγκαστικά ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

(Μονάδες 2)

Στο χρονικό διάστημα από $2\text{ s} - 6\text{ s}$ η κίνηση είναι επίσης ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, καθώς, σύμφωνα με το διάγραμμα επιτάχυνσης χρόνου, το σώμα κινείται στο παραπάνω χρονικό διάστημα με σταθερή επιτάχυνση $a_2 = 10\text{ m/s}^2$, ομόρροπη της επιτάχυνσης που είχε κατά το χρονικό διάστημα $0\text{ s} - 2\text{ s}$.

(Μονάδες 2)

4.2 Η μεταβολή της ταχύτητας στην πρώτη φάση της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδό της γραφικής παράστασης μέχρι την χρονική στιγμή 2 s .

$$\Delta v_1 = \left(+5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot 2\text{ s} = +10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Μονάδες 1)

Δεδομένου ότι $v_0 = 0\text{ m/s}$, έχουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 2\text{ s}$ η τελική ταχύτητα του σώματος είναι:

$$v_{t=2} = v_0 + \Delta v_1 = +10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

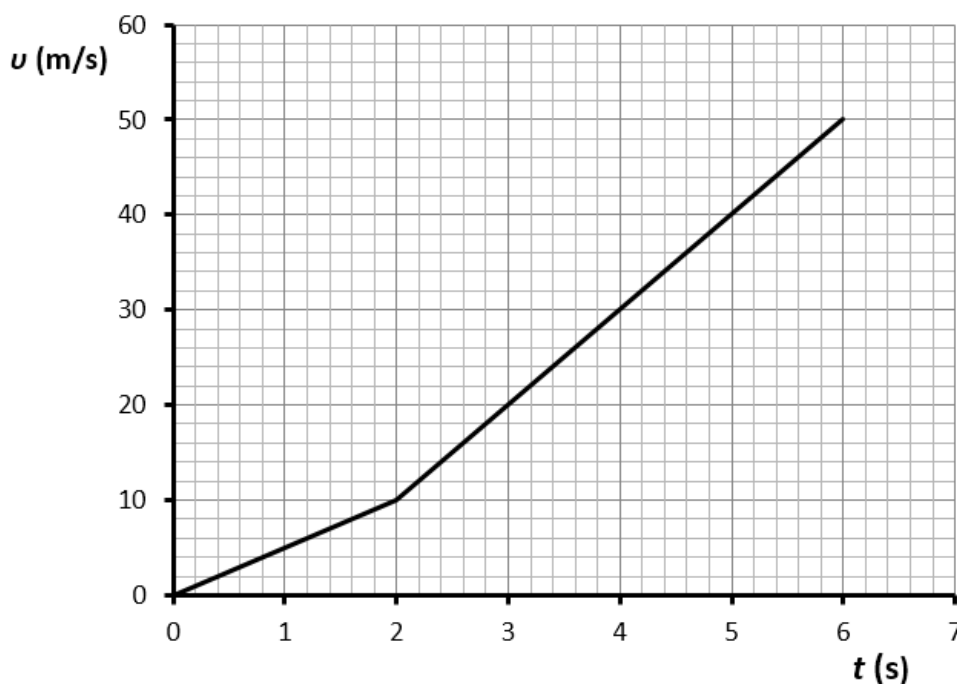
(Μονάδες 1)

Με την ίδια μεθοδολογία βρίσκουμε:

$$v_{t=6} = v_{t=2} + \Delta v_2 = +50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Μονάδες 1)

Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το ακόλουθο:



(Μονάδες 3)

4.3 Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της ταχύτητας και του άξονα των χρόνων είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης, επομένως:

Χρονικό διάστημα 0 s - 2 s:

$$\Delta x_1 = \frac{\left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot 2 \text{ s}}{2} = +10 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

Χρονικό διάστημα 2 s - 6 s:

$$\Delta x_2 = \frac{\left\{\left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + \left(+50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right\} \cdot 4 \text{ s}}{2} = +120 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

Το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα είναι:

$$S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 130 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

και η μέση ταχύτητά του είναι:

$$v = \frac{S}{t_{\text{ολικο}}} \quad \text{ή} \quad v = \frac{130 \text{ m}}{6 \text{ s}} \quad \text{και τελικά} \quad v \cong 21,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Μονάδες 2)

4.4 Για το έργο της συνισταμένης δύναμης έχουμε:

Χρονικό διάστημα 0 s - 2 s:

$$W_{\Sigma F_1} = \Sigma F_1 \cdot \Delta x_1 = m \cdot a_1 \cdot \Delta x_1 = 2 \text{ Kg} \cdot \left(+5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (+10 \text{ m}) = +100 \text{ J}$$

(Μονάδες 2)

Χρονικό διάστημα 2 s - 6 s:

$$W_{\Sigma F_2} = \Sigma F_2 \cdot \Delta x_2 = m \cdot a_2 \cdot \Delta x_2 = 2 \text{ Kg} \cdot \left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (+120 \text{ m}) = +2.400 \text{ J}$$

(Μονάδες 2)

Παρατηρούμε ότι το συνολικό έργο για το χρονικό διάστημα από 0 s - 6 s είναι:

$$W_{\text{ολικο}} = W_{\Sigma F_1} + W_{\Sigma F_2} \quad \text{ή} \quad W_{\text{ολικο}} = +2.500 \text{ J} \quad (1)$$

Αλλά

$$\Delta K = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m v_{t=6}^2 - 0 = +2.500 \text{ J} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε

$$\Delta K = W_{\text{ολικο}}$$

(Μονάδες 3)

Ενδεικτική Λύση

4.1 Η εξίσωση της ταχύτητας είναι: $v = v_0 + a\Delta t$ (1)

(Μονάδες 1)

Για το χρονικό διάστημα από $0\text{ s} - t_1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$+10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \left(+5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot \Delta t_1 \Rightarrow$$

$$\Delta t_1 = 2\text{ s} \Rightarrow t_1 - t_0 = 2\text{ s}$$

και τελικά

$$t_1 = 2\text{ s} \quad (2)$$

(Μονάδες 3)

Για το χρονικό διάστημα από $t_1 - t_2$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$+50 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) + \left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot \Delta t_2 \Rightarrow$$

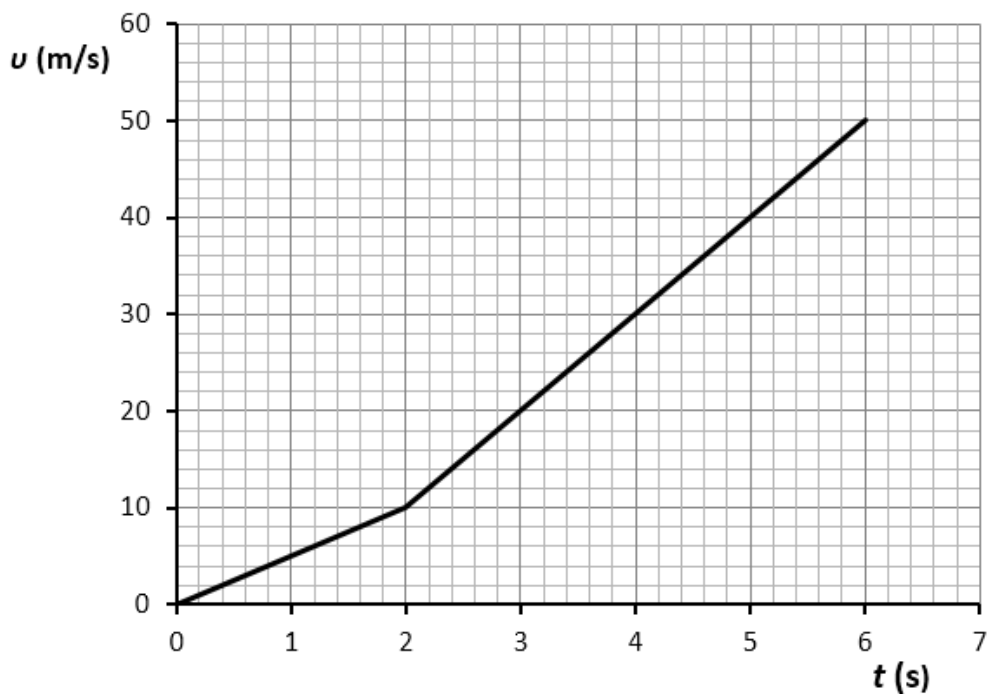
$$\Delta t_2 = 4\text{ s} \Rightarrow t_2 - t_1 = 4\text{ s}$$

και τελικά

$$t_2 = 6\text{ s} \quad (3)$$

(Μονάδες 3)

4.2 Το ζητούμενο διάγραμμα είναι το ακόλουθο:



(Μονάδες 5)

4.3 Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της ταχύτητας και του άξονα των χρόνων είναι ίσο με την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης, επομένως:

Χρονικό διάστημα 0 s - 2 s:

$$\Delta x_1 = \frac{\left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot 2 \text{ s}}{2} = +10 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

Χρονικό διάστημα 2 s - 6 s:

$$\Delta x_2 = \frac{\left\{\left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + \left(+50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right\} \cdot 4 \text{ s}}{2} = +120 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

Το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα είναι

$$S = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 130 \text{ m}$$

(Μονάδες 2)

4.4 Για το έργο της συνισταμένης δύναμης έχουμε:

Χρονικό διάστημα 0 s - 2 s:

$$W_{\Sigma F_1} = \Sigma F_1 \cdot \Delta x_1 = m \cdot a_1 \cdot \Delta x_1 = 4 \text{ Kg} \cdot \left(+5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (+10 \text{ m}) = +200 \text{ J}$$

(Μονάδες 2)

Χρονικό διάστημα 2 s - 6 s:

$$W_{\Sigma F_2} = \Sigma F_2 \cdot \Delta x_2 = m \cdot a_2 \cdot \Delta x_2 = 4 \text{ Kg} \cdot \left(+10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (+120 \text{ m}) = +4.800 \text{ J}$$

(Μονάδες 2)

Παρατηρούμε ότι το συνολικό έργο για το χρονικό διάστημα από 0 s - 6 s είναι:

$$W_{ολικο} = W_{\Sigma F_1} + W_{\Sigma F_2} \quad \text{ή} \quad W_{ολικο} = +5.000 \text{ J} \quad (1)$$

Αλλά:

$$\Delta K = K_{τελ} - K_{αρχ} = \frac{1}{2} m v_2^2 - 0 = +5.000 \text{ J} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\Delta K = W_{ολικο}$$

(Μονάδες 3)