

ΑΣΚΗΣΗ

(ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ)

Δίνετε η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

ΛΥΣΗ

α' τρόπος

Θα δείξω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Θα δείξω ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

Εστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$ (1) .

Τότε $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ (2) . Προσθέτοντας τις ανισότητες (1),(2) έχω:

$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Rightarrow x_1 \geq x_2$. Αποπο γιατί από την υπόθεση έχω $x_1 < x_2$. Αρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow$

$$f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2) \Rightarrow$$

$$f^3(x_1) - f^3(x_2) + (f(x_1) - f(x_2)) < 0 \Rightarrow$$

$$(f(x_1) - f(x_2))[f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)] + (f(x_1) - f(x_2)) \Rightarrow$$

$$(f(x_1) - f(x_2))[f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1] < 0. \quad (1)$$

Η παρένθεση $(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1)$ είναι θετικός αριθμός γιατί η διακρίνουσα του αντίστοιχου τριωνύμου είναι αρνητική .

$$\Delta = f^2(x_2) - 4(f^2(x_2) + 1) = f^2(x_2) - 4f^2(x_2) - 4 = -3f^2(x_2) - 4 < 0.$$

Αρα για να ισχύει η ανισότητα (1) πρέπει να ισχύει $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Αρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ' τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow$

$$f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2). \quad (1)$$

Η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα γιατί ισχύουν :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$\begin{cases} x_1^3 < x_2^3 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 + x_1 < x_2^3 + x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \text{ Αρα η σχέση (1) γράφεται:}$$

$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Αρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

