

20 επαναληπτικά θέματα

για τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' λυκείου

(τεύχος 8 – σχολικό έτος 2020-2021)

Γράφουν οι μαθηματικοί:

Λιτζερίνος Χριστόδουλος
Μπούζας Δημήτρης
Πάτσης Ανδρέας
Τρύφων Παύλος

ελεύθερη διάθεση για εκπαιδευτικούς σκοπούς από:

Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο!



maths4people.blogspot.gr

Απαγορεύεται η οποιας μορφής εμπορική χρήση!

Τα πνευματικά δικαιώματα των θεμάτων

ανήκουν αποκλειστικά στους δημιουργούς τους

ISBN: 973-613-5528-08-4

(N. 2121/93 και 2557/97).



Θέμα 1^ο

Έστω συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - 4}{x - 2} \right) = 4(\ln 2 + 1)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1, +\infty)$ με $f'(x) = f(x)(\ln x + 1)$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 1)$ με $f'(x) = f(x) \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$

A. Να υπολογιστεί το $f(2)$

B. Να βρεθεί ο τύπος της f

Γ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει:

- i. ακριβώς ένα $x_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $f(x_0) = 3$
- ii. τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, x_0 \right)$ τέτοιο ώστε $2(2x_0 - 1)f'(\xi) = 11$

Δ. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}(x^2 - x + 2)$.

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g :

- i. Στο διάστημα $(0, 1)$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.
- ii. Δεν δέχονται κοινή εφαπτομένη.



Θέμα 2^ο

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και με συνεχή 2^η παράγωγο στο R , για την οποία ισχύει:

- $x(f(x) + f(x-1)) \geq x^2$ για κάθε $x \in R$
- Η C_f εφάπτεται της ευθείας $(\varepsilon): y = 2x + 1$ στο σημείο $A(1, f(1))$

A. Ναδειχθεί ότι $f(1) = 3$ και $f'(1) = 2$

B. Ναδειχθεί ότι $f(0) = -f(-1)$

Γ. Να αποδειχθεί ότι η C_f έχει τουλάχιστον ένα:

- i. κοινό σημείο με την ευθεία (ε) στο διάστημα $[-1, 0]$.
- ii. πιθανό Σημείο Καμπής.

Δ. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, x)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) \geq 1$

Ε. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x^2 + 8}}{(x-1)^2 \eta\mu(x-1)}$

ΣΤ. Επιπλέον δίνεται ότι:

- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x > 1$
- $f'(2) = 3$
- i. Ναδειχθεί ότι η C_f είναι κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$
- ii. Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iii. Να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda f^2(x) + f(x) + 1}{f(x) - \eta\mu(f(x))}$ να είναι πραγματικός αριθμός.



Θέμα 3^ο

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και με συνεχή 2^η παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x - 4} = -\frac{1}{4}$
- $f(x) \leq -(x-4)^2 + 2$, για κάθε $x \in R$

A. Ναδειχθεί ότι $f(4) = 2$

B. Να αποδειχθεί ότι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι το $x = 4$

Γ.

- i. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \geq 4$
- ii. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = x_0$
- iii. Ναδειχθεί ότι η f είναι κοίλη.

Δ. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Ε. Ναλυθεί η εξίσωση: $f(f(x)) - f\left(\sin\left(x\frac{\pi}{4}\right) + 3\right) = 0$

ΣΤ. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(f^2(\lambda) - 5f(\lambda) + 6)x^3 + x - 2021}{x^2 - x + 1}$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$



Θέμα 4^ο

Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}(2-x) + \gamma & , x < 0 \\ \ln(x+\alpha) + \beta & , x \geq 0 \end{cases}, \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha > 0.$$

Επιπλέον δίνεται ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι ο άξονας $x'x$.

A. Να αποδείξετε ότι $\gamma = 0$.

B. Να βρείτε τις παραμέτρους α, β .

Γ. Ναδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

ii. Να αποδείξετε ότι $x \cdot f(x) - x^2 - 2x < 0$ για κάθε $x \neq 0$

Ε. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{f(x) - f(x-\lambda)}{x} - \frac{2 - f(x)}{x - \lambda} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

διάστημα $(0, \lambda)$, με $\lambda > 0$.

ΣΤ. Ναδειχθεί ότι ισχύει: $(x^2 + 3) - 2e^{x^2+1} < e^{x^2+1} \ln(2|x|+1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ζ. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln x - \ln(2-x)$, με $x \in (0, 2)$.

i. Να οριστεί η συνάρτηση $g \circ f$.

ii. Ναδειχθεί ότι η $C_{g \circ f}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο.



Θέμα 5^ο

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $D_f = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $2f(f(x)) = x^2 f(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = 2$

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια:

- i. να βρείτε το $f^{-1}(1)$.
- ii. να λυθεί η εξίσωση $e^{f^2(x)} + \ln(f(x)) = e^{f(x)} + f(x)(1 - f(x))$

B. Δίνεται επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f με συνεχή πρώτη παράγωγο.

- i. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
- iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μία εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από το σημείο $A(3, 0)$
- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$ ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{f(x) - x} \right)$ να μην υπάρχει και στη συνέχεια να δείξετε ότι $x_0 = \sqrt{2}$
- v. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1, 2)$ ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = 1$
- vi. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x - \eta \mu x) = x - \eta \mu x + 1$, στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$, έχει μοναδική ρίζα.



Θέμα 6^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + \frac{x^4}{4} - 2x$, με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

A. Ναδειχθεί ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 < 2$.

B. Δίνεται ότι $\ln\left(\frac{\alpha^\alpha}{\beta^\beta}\right) + 2(\beta - \alpha) = \frac{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2)}{4}$, με $0 < \alpha < \beta$

i. Να αποδειχθεί ότι $\alpha < 1 < \beta$.

ii. Να αποδειχθεί ότι $4f(\beta) < 4(\beta - 1)(\ln \beta + \beta^3 - 1) - 7$

Γ. Στο διάστημα $(1, x_0)$ ναδειχθεί ότι:

i. Υπάρχει μοναδική εφαπτομένη (ε) της C_f που να διέρχεται από το σημείο $A(2, 0)$

ii. Η (ε) δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τη C_f .

iii. Η εξίσωση $\frac{f(x) - 1}{x - x_0} + \frac{f(x)}{x - 1} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Δ. Δίνεται η συνάρτηση g , ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$, με τύπο $g(x) = e^{f^2(x)}$.

i. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = f'(e)$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις.

iii. Να δείξετε ότι η C_g έχει τουλάχιστον ένα πιθανό Σημείο Καμπής.



Θέμα 7^ο

Έστω συνάρτηση $f(x) = \ln x + 2x^2 - \frac{1}{2}$, με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

A. Από όλες τις εφαπτόμενες της C_f να βρεθεί η (ε_0) που έχει το μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης.

B. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , με $x_0 < 1$.

Γ.

i. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

ii. Ναλυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(\ln 2x + 2x^2 - 4x + \frac{3}{2}\right) \leq x_0$.

Δ. Θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, ναδειχθεί ότι η εξίσωση

$(x+1)f^{-1}(x) = 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Ε. Έστω η συνάρτηση g με τύπο η $g(x) = \left[f\left(\frac{1}{x} + 4x\right)\right]^2$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ii. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και το είδος των ακροτάτων.

ΣΤ. Έστω μεταβλητό σημείο M της C_f που η τετμημένη του μεταβάλλεται, ως προς το χρόνο, με ρυθμό $x'(t) \neq 0$. Να βρεθούν τα σημεία M για τα οποία ισχύει ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι πενταπλάσιος από αυτόν της τετμημένης.



Θέμα 8^ο

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της $D_f = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $g(1)x^2 f''(x) - 2f(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Έστω, επίσης, συνάρτηση g με πεδίο ορισμού $D_g = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $g(y) - |\sin(x-y) - 1| \leq g(x) \leq g(y) + |\sin(x-y) - 1|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $g(1821) \ln x - x \leq -1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

A. Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

B. Να δείξετε ότι $g(1) = 1$

Γ. Δίνεται επιπλέον ότι $f(1) = 5$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$

i. Να δείξετε ότι $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

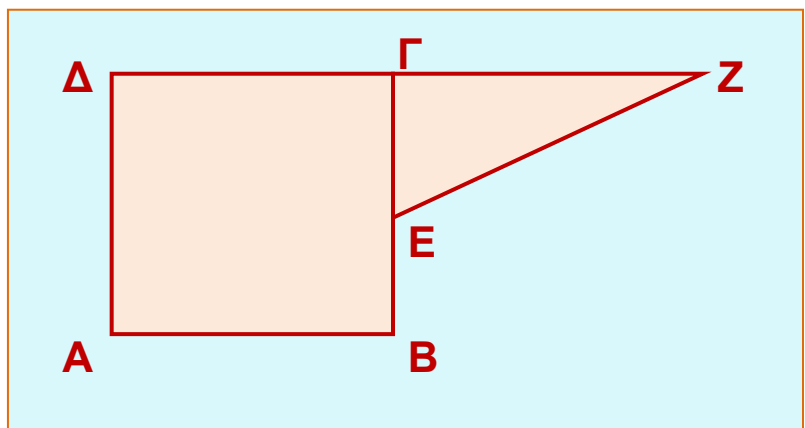
ii. Να βρείτε το Σύνολο Τιμών της f

Δ. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 2α με $\alpha > 0$. Στο μέσο Ε της ΒΓ κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΖ ώστε $\Delta Z = \frac{2\alpha^3 + 2}{\alpha^2}$.

Τα σημεία Δ, Γ, Ζ είναι συνευθειακά.

i. Να βρείτε τη τιμή του α ώστε το Εμβαδόν της επιφάνειας (ΑΒΕΖΔ) να γίνει ελάχιστο.

ii. Η μεταβλητή α μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec.





20 Επαναληπτικά θέματα για τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ λυκείου (έτος 2021)

Δίνονται οι συναρτήσεις K_1, K_2 ορισμένες στο $(0, +\infty)$ με τύπο $K_1(\alpha) = \frac{4}{3}\alpha^3 + \ln \alpha - 2\alpha$ και

$$K_2(\alpha) = -\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \text{ αντίστοιχα.}$$

Έστω σημεία $M(\alpha, K_1(\alpha))$ και $N(\alpha, K_2(\alpha))$ κινούμενα στις C_{K_1} και C_{K_2} αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι τη χρονική στιγμή t_0 , που ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι ίσος με αυτόν της τεταγμένης του N , το εμβαδόν (ABEZΔ) είναι ίσο με 3 τ. μονάδες.



Θέμα 9^ο

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f, g , με πεδίο ορισμού το R , για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in R$
- $\frac{f(x)-x}{e^x+1} + \frac{1}{x-f(x)} = 0$
- $g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \leq 0 \\ \sqrt{2} - x \ln(x+1) & , x > 0 \end{cases}$

A. Να βρεθεί ο τύπος της f

B. Να δείξετε ότι:

- i. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις ρ_1, ρ_2 , με $\rho_1 < 0 < \rho_2$
- ii. Δεν ισχύουν για την g οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$
- iii. Η εξίσωση $\frac{g(\lambda) - \sqrt{2}}{(x - \rho_1)(x - \rho_2)} - \frac{1}{x - \rho_2} = \frac{2021}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική λύση για κάθε $\lambda \in R$

Γ. Να δείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία της C_g που να δέχονται παράλληλες εφαπτόμενες.

Δ. Να λυθούν οι ανισώσεις:

- i. $\sqrt{e^{x-2}} > \sqrt{e^{x^2-2x}}$
- ii. $(x^2 - 3x + 2) \left(\sqrt{1 + e^{x-2}} + \sqrt{1 + e^{x^2-2x}} \right) < e^{x-2} - e^{x^2-2x}$

Ε. Έστω F συνάρτηση ορισμένη στο R , με $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2F(x) = x^2 + 1821$ έχει το πολύ μία ρίζα.



Θέμα 10°

Έστω συνεχής συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$[f(x)]^2 = \left(\frac{x^3}{3} - 2x \ln x + x \right)^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Και επιπλέον ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{[f(\beta) - f(\alpha)]x^3 + x - 3}{x^2 + 1} \right] = +\infty$, με $0 < \alpha < \beta$

A. Ναδειχθεί ότι $f(\alpha) < f(\beta)$

B. Να βρεθεί ο τύπος της f

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x^2 + 2) - f(x^2 + 1) \geq \xi^2 - 2 \ln \xi - 1, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ.

i. Ναδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται. Στη συνέχεια, εάν γνωρίζουμε ότι f^{-1} συνεχής στο $D_{f^{-1}}$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $D_{f^{-1}}$, το είδος της μονοτονίας της και το σύνολο τιμών της.

ii. Να υπολογιστούν τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) + x}{f^{-1}(x)}$

iii. Ναδειχθεί ότι η C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ακριβώς δύο σημεία

iv. Υποθέτοντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, ναδειχθεί ότι υπάρχει εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ που είναι παράλληλη στην $y = x$

E. Έστω $M(x, y)$ μεταβλητό σημείο της C_f . Η τετμημένη του M αυξάνεται κατά 3 cm/sec . Αν τα σημεία N, Ξ είναι οι προβολές του M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα και O η αρχή των αξόνων, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του Εμβαδού $ONM\Xi$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το $A\left(1, \frac{4}{3}\right)$.

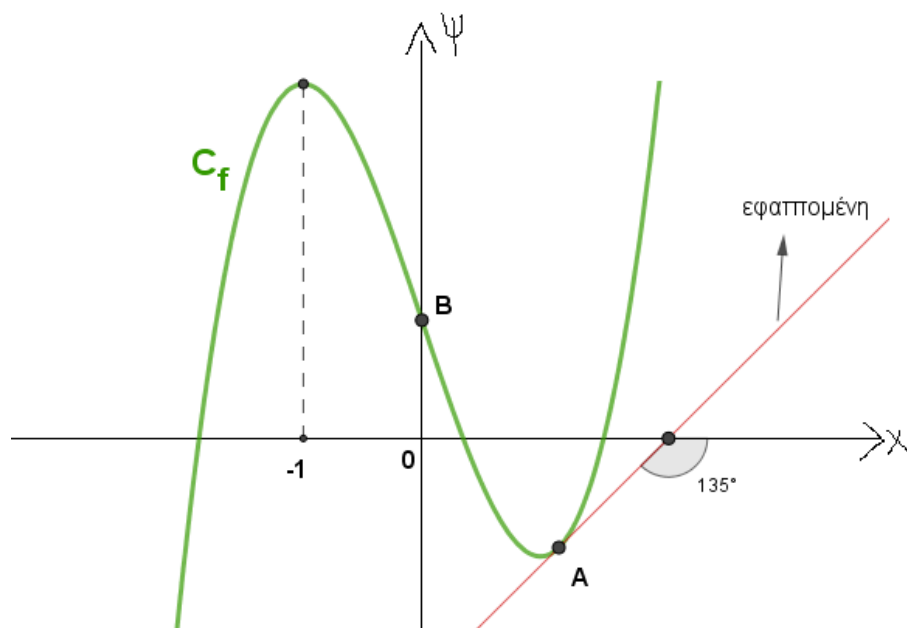


Θέμα 11^ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \alpha x^3 + \beta x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) καθώς και η εφαπτομένη της στο σημείο

$$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right).$$



A. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B

B. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -3$

Γ. Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Δ. Είναι σωστός ο ισχυρισμός:

«η ευθεία $y = -3x + 1$ διαπερνά την γραφική παράσταση της συνάρτησης f » ;



Θέμα 12^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x + e^x - \frac{x^2}{2} - 2x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

A. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot f^{-1}(x))$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 \cdot (f(x) - 1)}$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2 \cdot \eta\mu x + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot e^x = x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 4 \cdot x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ε. Έστω $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $\epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta < 0$.

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^4 - x^2 + (f(\alpha) - 1)(f(\beta) - 1) = 0.$$



Θέμα 13°

Θεωρούμε πολυωνυμική συνάρτηση f n -οστού βαθμού ($n \geq 2$) για την οποία ισχύουν:

- $f(0) > 0$
- $e^{x^{f(0)}} \geq ex$ για κάθε $x > 0$
- $6 + \eta\mu(n-2) \geq 3n$

A. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$

B. Να αποδείξετε ότι $n = 2$

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$, με $x \geq 1$.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- η f είναι άρτια
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)-1} \right) \right) = e^{f(1)-2}$
 - i. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - ii. Να ορίσετε τη $g \circ f$
 - iii. Να μελετήσετε τη $g \circ f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - iv. Να βρείτε την καμπυλότητα και τις ασύμπτωτες της $g \circ f$
 - v. Με τα στοιχεία που βρήκατε να κάνετε πρόχειρη χάραξη της γραφικής παράστασης της $g \circ f$



Θέμα 14°

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{\alpha \ln x}{x} + \kappa x + \mu$, με $\alpha, \kappa, \mu \in \mathbb{R}$.

Οι ασύμπτωτες της C_f είναι η ευθεία $y = 2x - 3$ και ο άξονας $y'y$.

A.

- i. Να αποδειχθεί ότι $\alpha \neq 0$
- ii. Να υπολογιστούν τα κ, μ

B. Αν η f έχει ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρεθεί ο τύπος της

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \eta\mu\left(\frac{x \cdot \pi}{2}\right) - 2$ στο $(0, +\infty)$

Δ. Για $x \geq 1$, να λυθεί η ανίσωση $\frac{4 \ln x}{x^2} - \frac{\ln 2x}{x} \leq 2x^2 - 4x$

Ε. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ όπου η εφαπτομένη της C_f , στο $M(x_0, f(x_0))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

ΣΤ. Έστω συνάρτηση g με τύπο $g(x) = [f(x)]^2$, με $x \in (0, +\infty)$.

i. Να δειχθεί ότι έχει τρία ακρότατα, δύο ΤΕ και ένα ΤΜ.

ii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{g(2x) - g(x)}$



Θέμα 15°

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) = x + 4\sqrt{x} + 3$ για κάθε $x \geq 0$.

A. Ναδειχθεί ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

B. Ναδειχθεί ότι η f είναι «1-1».

Γ. Επιπλέον δίνεται ότι $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{6}\right)^+} \frac{f(x)}{-2\sin^2 x - 5\eta\mu x + 4} = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(0)(f(x) - 3)} = +\infty$

Να δείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \geq 0$

ii. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$

iii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 3, & x > 0 \\ f(0), & x = 0 \end{cases}$

iv. η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Δ. Έστω σημείο $A(0, 6)$ του άξονα $y'y$.

i. Να βρεθεί το σημείο της C_f που έχει τη μικρότερη απόσταση από το A.

ii. Έστω B το σημείο του παραπάνω ερωτήματος. Ναδειχθεί ότι η εφαπτομένη στο A είναι κάθετη στην AB.

iii. Έστω μεταβλητό σημείο M της C_f του οποίου η τετμημένη μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό $x'(t)$. Ναδειχθεί ότι ο ρυθμός μεταβολής του Εμβαδού του τριγώνου OAM είναι σταθερός.



20 Επαναληπτικά θέματα για τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ λυκείου (έτος 2021)

Ε. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x - \sqrt{6x-9}$, με πεδίο ορισμού το $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

- i. Να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1} αντίστροφη της f
- ii. Να οριστεί η συνάρτηση $k(x) = \frac{f^{-1}(x)}{x + \sqrt{6x-9}}$
- iii. Να εξεταστεί αν $g = k$. Στην περίπτωση που $g \neq k$, να προσδιοριστεί το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε $g = k$



Θέμα 16°

Έστω συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - x^2}{x^2 - 4} \right) = 1$$

$$f(0) = 4 - 2f'(2)$$

$$\text{και η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 8 & , x = 2 \end{cases}$$

A. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

B. Ναδειχθεί ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ με

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-2) - f(x) + 4}{(x-2)^2}$$

Γ. Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\xi) - 4}{\xi - 2}$

Δ. Ναδειχθεί ότι η f' δεν είναι «1-1»

Ε. Επιπλέον δίνεται ότι η f' είναι κυρτή.

i. Ναδειχθεί ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής στο διάστημα $(0, 2)$.

ii. Ναμελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο διάστημα $[0, 2]$.

iii. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{8x}{x}$, με $x \in \mathbb{R}^*$ και ξ του ερωτήματος Γ. Ναδειχθεί ότι η

εξίσωση $f'(x) = h(x)$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, 2)$.



Θέμα 17°

Έστω συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$(g \circ g)(x) - g(x) = e^x - \ln(x+1) - 1, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

A. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται.

B. Δίνεται, επίσης, ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $g'(0) \neq 0$

- i. Να δείξετε ότι η g δεν έχει ακρότατα στο διάστημα $(0, +\infty)$
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 0$
- iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(g(x))$
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(g(x)) = 1821$ έχει τουλάχιστον μία λύση x_0 , με $x_0 \in (0, +\infty)$
- v. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x_0)$ ώστε: $x_0 \left(g'(\xi) + e^\xi - \frac{1}{\xi+1} \right) = 1821$

Γ. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ στο $\mathbb{R}$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να λυθεί η ανίσωση:
$$2(g(x) + e^2 - 1)^3 + 3[g(g(x)) + \ln 3]^2 > 3(g(x) + e^2 - 1)^2 + 2[g(g(x)) + \ln 3]^3$$
- iii. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $g(g(x)) = f(\alpha)$ να είναι αδύνατη.



Θέμα 18°

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x + x^3 + 1$, με πεδίο ορισμού όλο το R .

Έστω επίσης συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$.

Ισχύει ότι $(g \circ f)(x) = x \cdot e^{-x^3+2x} + (-x^3 + \ln x + 2x)^3 + 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

A. Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία.

B. Να βρεθεί ο τύπος της f

Γ. Αν ισχύει ότι $f(\alpha) = f(\beta)$, με $0 < \alpha < \beta$, να αποδειχθεί ότι $\alpha < 1 < \beta$

Δ. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = g(\alpha) - 1$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$

Ε.

i. Να αποδειχθεί ότι $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ii. Να δειχθεί ότι για κάθε $x > 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) < \frac{(e+1)[g(\xi)]^2}{(e+2)(x-1)}$$

ΣΤ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, +\infty)$ όπου οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν παράλληλες εφαπτόμενες.



Θέμα 19°

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της που είναι το R .

A. Να δείξετε ότι $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \right)$, για κάθε $x \in R$

B. Επιπλέον, για κάθε $x \in R$, ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{6 \cdot h^2} \right) = x - 2$

Δίνεται επίσης ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 4$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Να βρεθεί ο τύπος της f .

Γ. Αν ο τύπος της f είναι: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.
- Να δείξετε ότι τα σημεία A (τοπικό μέγιστο), B (τοπικό ελάχιστο) και Σ (σημείο καμπής) είναι συνευθειακά και επιπλέον ότι το Σ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος AB.
- Να βρείτε από μία κατάλληλη τιμή για τις παραμέτρους $\alpha, \beta \in R$ ώστε να ισχύει ότι $f''(x)[f(x) - (\alpha x + \beta)] > 0$ για κάθε $x \neq 2$

Δ. Έστω συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, για κάθε $x \in R - \{0, 3\}$.

- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της g
- Να μελετήσετε τη g ως προς τα κοίλα
- Να σχεδιάσετε πρόχειρη γραφική παράσταση της g



Θέμα 20°

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $D_f = [0, +\infty)$ και με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\sqrt{x}-3} & , x \in [0, 9) \cup (9, +\infty) \\ \beta & , x = 9 \end{cases}$$

και η συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(9) = 1$ και $g''(9) = 0$.

A. Να δείξετε ότι $g(9) = 0$ και $\beta = 6$

B. Να εξετάσετε αν το $A(9, f(9))$ είναι κρίσιμο σημείο της f

Γ. Δίνονται οι συναρτήσεις $w(x) = \sqrt{x} + 3$ και $g(w(x)) = \sqrt{x} - 6$, με $x \geq 0$.

i. Να βρεθεί ο τύπος της g

ii. Να εξετάσετε αν $f = w$

Δ. Δίνεται σημείο $A(0, 21)$ του άξονα $y'y$. Έστω επίσης σημείο $M(x, f(x))$ που κινείται

πάνω στη C_f , ξεκινώντας από τη θέση $(1, 4)$, με ρυθμό μεταβολής τετμημένης

$x'(t) = 1 \text{ cm/sec}$.

i. Να βρείτε το σημείο M της C_f που έχει την ελάχιστη απόσταση από το A .

ii. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 που το M απέχει την ελάχιστη απόσταση από το A .

iii. M' η προβολή του M πάνω στον άξονα $x'x$ και $O(0, 0)$ η αρχή των αξόνων. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Εμβαδού του τραπεζίου $(OM'MA)$ τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .