

20 επαναληπτικά θέματα

για τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' λυκείου

(τεύχος 7 – σχολικό έτος 2018-2019)

Γράφουν οι μαθηματικοί:

Βασιλόπουλος Κων/νος

Βέρρας Οδυσσέας

Κλίτσας Γιώργος

Κώνστας Χάρης

Λιτζερίνος Χριστόδουλος

Μπούζας Δημήτρης

Πάτσης Ανδρέας

Σκέντζος Δημήτρης

Τρύφων Παύλος

ελεύθερη διάθεση για εκπαιδευτικούς σκοπούς από:

Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο!



maths4people.blogspot.gr

Απαγορεύεται η όποιας μορφής εμπορική χρήση!

Τα πνευματικά δικαιώματα των θεμάτων

ανήκουν αποκλειστικά στους δημιουργούς τους

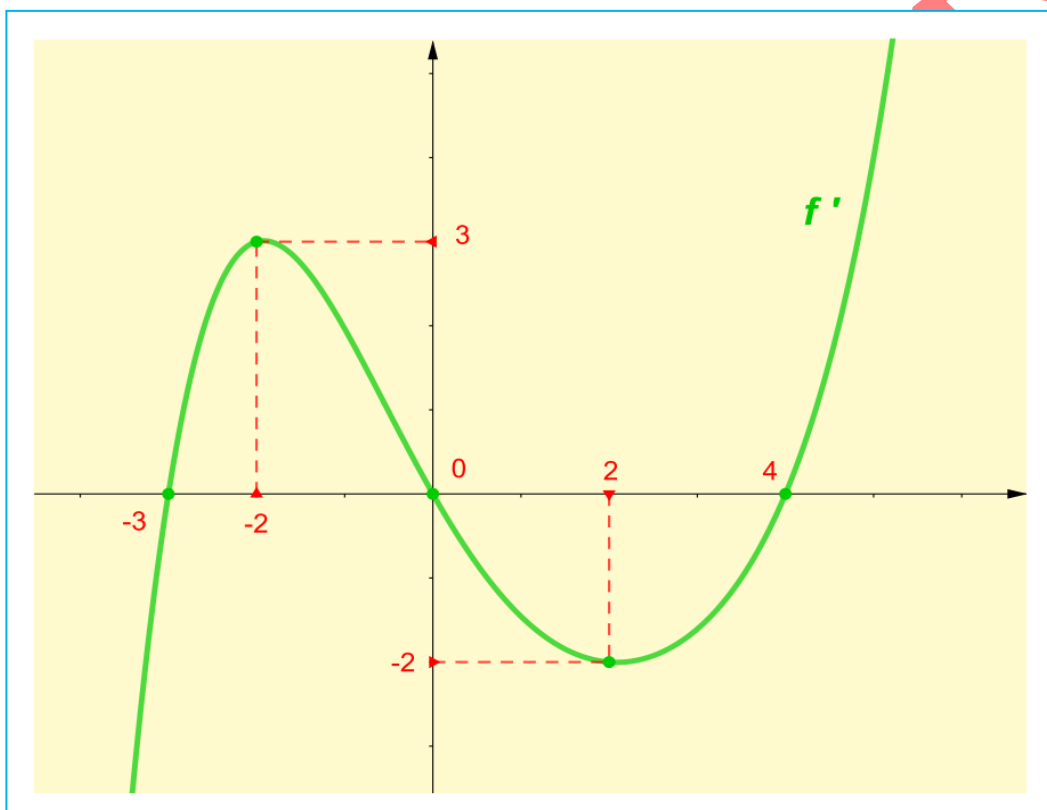
(Ν. 2121/93 και 2557/97).



Θέμα 1^ο

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R , για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με συνεχή δεύτερη παράγωγο.
- Η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ είναι το μοναδικό σημείο καμπής της f' .
- Η γραφική παράσταση της f' απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα.



- A. Να μελετηθεί f ως προς τη μονοτονία και ναδειχθεί ότι έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.
- B. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- Γ.
- Γ.1. Να μελετηθεί η f'' ως προς τη μονοτονία.
- Γ.2. Να αποδειχθεί ότι $f''(0) < 0$



20 Επαναληπτικά θέματα για τα μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ λυκείου (έτος 2019)

Γ.3. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f''(x) \cdot x^3 + x + 1}{x^2 + x + 1}$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$

Γ.4. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον μία εφαπτομένη της C_f , σε σημείο με

τετμημένη $x_0 \in (-2, 2)$, που να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{4}{5}x + 1821$

Δ. Επιπλέον δίνεται ότι $f(-2) = 10$.

Δ.1. Να αποδειχθεί ότι $-2 \leq f(4) \leq 28$

Δ.2. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3x + 16$ στο διάστημα $(-\infty, 2]$

Δ.3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2}^1 [f(x) - f'(x)] dx + \int_{e^{-2}}^e \left[\frac{\ln x}{x} f'(\ln x) \right] dx$

Ε. Έστω E το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και τη κατακόρυφη ευθεία $x = 4$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς μία κατακόρυφη ευθεία $x = \alpha$, με $\alpha \in (0, 4)$, που να χωρίζει το E σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.



Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$, με $x \in [0, +\infty)$

A. Να οριστεί η συνάρτηση $f \circ f$

B. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(f \circ f)(x)}$

Γ. Έστω συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[4, +\infty)$.

Αν ισχύει ότι $(f \circ f)(x) \cdot g(x) = e^{x-4} - x + 3$, για κάθε $x \in (4, +\infty)$, τότε να βρεθεί ο τύπος της g στο διάστημα $[4, +\infty)$

Δ. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{(f \circ f)(x)} = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, 4)$

E. Να βρεθεί η εφαπτομένη (ε) της $C_{f \circ f}$ στο σημείο $A(9, 1)$ και να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις (ε) , $C_{f \circ f}$ και τον άξονα $x'x$.



Θέμα 3^ο

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R , δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

- $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$
- $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in R$
- $f(1) = 1$.

A. Ναδειχθεί ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1,1)$.

B. Να αποδειχθεί ότι η C_f και η ευθεία (ε) δεν έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός του A .

Γ. Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} \cdot f'(x) \cdot e^{f(x)} \right] dx < \frac{e-2}{2}$

Δ. Ναδειχθεί ότι η f είναι κυρτή σε όλο το R

Ε. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(x) \geq \frac{x^2+1}{2}$ για κάθε $x \in R$, τότε ναδειχθεί ότι η C_f δεν έχει ασύμπτωτες.

ΣΤ. Επιπλέον δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο.

Να βρεθεί ο τύπος της f αν ισχύει $2f(x) = [f'(x)]^2 \cdot f''(x) + 1$, για κάθε $x \in R$.



Θέμα 4°

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

▪ $f'(x) = \frac{e^{\left(\frac{\alpha}{x}\right)}}{x^2}$, για κάποιο $\alpha > 0$

▪ $\int_{\alpha^{\ln \alpha}}^{f'(1)} \left(\frac{1}{x}\right) dx = 1$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$

Β. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με $g(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ και $D_g = (0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν παράλληλες εφαπτόμενες σε οποιαδήποτε σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, g(x))$ με $x > 0$

Γ. Αν επιπλέον υπάρχει $\theta > 0$, τέτοιο ώστε:

$$e^{\left(1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right)} = f(\theta) + \theta^2 f'(\theta) + 1$$

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

Δ. Αν $f(x) = -e^{\frac{1}{x}}$, με $x > 0$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f που έχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$.



Θέμα 5^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = e^x + x - 1$ και $(g \circ f)(x) = e^{x^3+x-1} + x^3 + x - 2$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$

A. Ναδειχθεί ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x^3 + x - 1$

B. Να βρεθεί ακέραιος α ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(\alpha, \alpha + 1)$

Γ. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f που άγεται από το σημείο $A(0, -3)$.

Γ.1. Να βρεθεί το σημείο B στο οποίο η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_f και στη συνέχεια να βρεθεί η (ε)

Γ.2. Να αποδειχθεί ότι η C_f και η ευθεία (ε) έχουν και δεύτερο κοινό σημείο, εκτός του B, στο οποίο τέμνονται.

Γ.3. Έστω κινητό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ επί της C_f και (η) η εφαπτομένη της C_f στο M. Η ευθεία (η) τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο N. Αν η τετμημένη του M αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 8 μον / sec να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του N τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το M διέρχεται από το B

(όπου B το σημείο του ερωτήματος Γ.1)

Δ. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $\frac{1}{f(x)-1} + \frac{1}{g(x)} = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.



Θέμα 6°

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίμετρο 30 και βάση $B\Gamma$.

A. Να αποδειχθεί ότι το Εμβαδόν του τριγώνου

$AB\Gamma$ γίνεται μέγιστο όταν $x = y = 10$.

B. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό

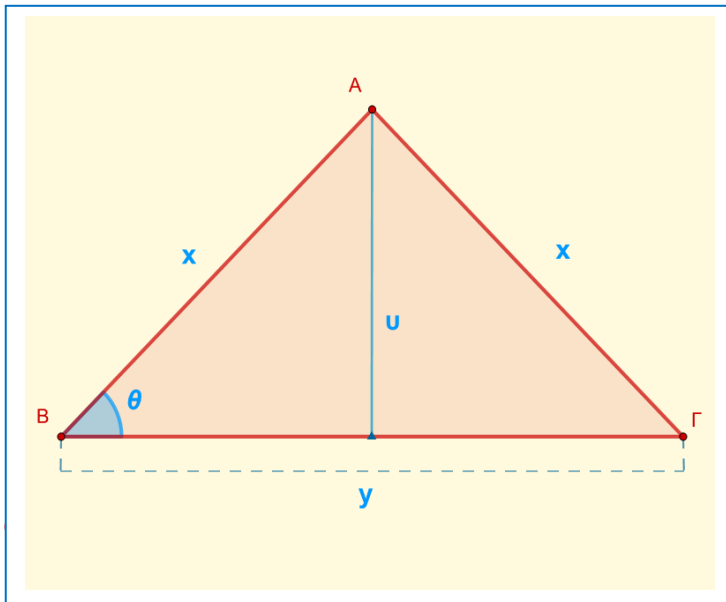
$$x'(t) = \sqrt{3} \text{ μον/sec, να βρεθεί}$$

ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας βάσης θ

τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία

το Εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

γίνεται μέγιστο.



Γ. Όταν το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ γίνεται μέγιστο εγγράφουμε ορθογώνιο

παράλληλόγραμμο $K\Lambda MN$ όπως φαίνεται

στο διπλανό σχήμα:

Γ.1. Να βρεθούν οι διαστάσεις του $K\Lambda MN$

ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Γ2. Έστω συνεχής συνάρτηση f με πεδίο

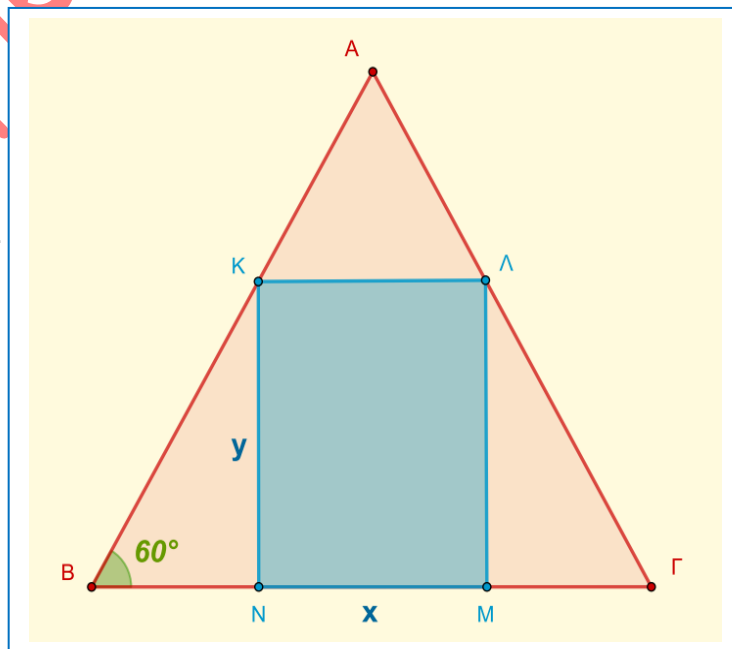
ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών

το διάστημα $[8\sqrt{3}, 10\sqrt{3}]$.

α) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

β) Αν E η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν του $K\Lambda MN$ να δείχθεί ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in [2, 4]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = E(x_0)$





Θέμα 7^ο

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$. Δίνεται επίσης ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

A. Ναδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$

B. Επιπλέον ισχύει ότι $f'(x)(\sin f(x) - \eta \mu f(x) + 1) = g'(x)(\sin g(x) - \eta \mu g(x) + 1)$ για κάθε $x \in (0,1)$. Ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Γ. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$, ώστε $\int_0^1 f(x) dx < \frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2)}{2}$

Δ. Αν, επιπλέον, ισχύει ότι $\int_0^1 f(x) dx < \frac{1}{4}$ ναδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και ότι

$\int_0^1 f^{-1}(x) dx > \frac{3}{4}$, με την προϋπόθεση ότι η f^{-1} είναι συνεχής.



Θέμα 8°

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x^2 - 2x - 1$ και $g(x) = x^2 - 4x + 1$, με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

- A. Ναδειχθεί ότι η f έχει ολικό ελάχιστο σε μοναδικό σημείο x_0 , με $x_0 \in (0,1)$
- B. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 0$ και $x_2 = \rho$ με $\rho > 0$.
- Γ. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \geq g(x_0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (όπου x_0 του ερωτήματος A)
- Δ. Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$, να αποδειχθεί ότι $E < -\rho \cdot g(x_0)$
- Ε. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + 2}{|f'(x)|}$ (όπου x_0 του ερωτήματος A)



Θέμα 9^ο

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, 3]$, στο οποίο είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Επιπλέον ισχύει ότι
$$\int_0^3 \left[(f(x))^4 + e^{2x} - 2e^x + 1 \right] dx = 4 \int_0^{\sqrt{3}} \left[x \cdot (f(x^2))^2 \cdot (e^{x^2} - 1) \right] dx$$

A. Να βρεθεί ο τύπος της f .

B. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f όπου η απόσταση από το σημείο $A(2, 0)$ να γίνεται ελάχιστη.

Γ. Έστω κινητό σημείο M επί της C_f . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι σταθερός και διάφορος του μηδενός, να βρεθεί το σημείο M_0 της C_f όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι ίσος με αυτόν της τεταγμένης.

Δ. Έστω συνάρτηση g , με $g(x) = \ln(x^3 + x) - \ln x$. Να βρεθεί η f^{-1} και στη συνέχεια να εξετάσετε αν $f^{-1} = g$.

Ε. Ναδειχθεί ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ΣΤ. Να υπολογιστεί το όριο
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{f(\eta\mu x) - f(x)}$$



Θέμα 10°

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R}$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$\int_0^{f(2)-4} (e^{x^2} + 2019) dx = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) + 2}{x + 4} = 1$$

Α. Να βρεθεί το $f(-4)$ και το $f(2)$.

Β. Να αποδειχθεί ότι η C_f , γραφική παράσταση της f , τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = -x$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (-4, 2)$.

Γ. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-4, 2)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f , στο x_0 , να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): x - y + 2019 = 0$.

Δ. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $(x+1)f'(x) = 1 - f(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-4, 2)$.

Ε. Αν $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-2h)}{h} = 3$ τότε να αποδειχθεί ότι η C_f έχει τουλάχιστον δύο πιθανά σημεία καμπής στο διάστημα $(-4, 3)$.

ΣΤ. Αν, επίσης, δίνεται ότι $(f(x) - x) \cdot (f(x) + x) = 4(x+1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να βρεθεί ο τύπος της f στο $\mathbb{R}$.



Θέμα 11°

Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- $2f(x)e^{-g^2(x)} = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(0) = f'(0) = 0$

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x - \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι η g^2 είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$

Γ.2. Έστω h συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι η h^2 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Να δώσετε κατάλληλο αντιπαράδειγμα για να πείσετε έναν συμμαθητή σας που είναι βέβαιος ότι ισχύει

$$(h^2(x))' = 2h(x) \cdot h'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ότι ο ισχυρισμός του δεν είναι σωστός

Δ. Αν δίνεται επιπλέον ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(g^2\left(\frac{1}{x}\right) - g(0)g\left(\frac{1}{x}\right) \right) - g(0)g'(0)\frac{x+1}{x} \right]$$

Ε. Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{e^x}{1+2f(x)} dx \leq \frac{e^2}{5}$



Θέμα 12^ο

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

▪ $f(x) \geq x+3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

▪ $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^2 = 9$

A. Ναδειχθεί ότι:

A.1. $f(x) \leq \frac{[f(x)]^2 + 9}{6}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A.2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

B. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B.1. Ναδειχθεί ότι $f'(0) = 1$

B.2. Να υπολογιστούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) - f(3x)}{\eta\mu x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - e^3}{x}$

B.3. Έστω σημείο $M(x, y)$ που κινείται επί της C_f . Ναδειχθεί ότι κατά τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το M διέρχεται από το $A(0, 3)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με αυτόν της τεταγμένης του.

B.4. Εάν $\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^1 [\varphi(x) \cdot f(t)] dt \right) dx = 2 \ln 2$ να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την εφαπτομένη της C_f στο $x=0$, τον άξονα $y'y$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=1$.



Θέμα 13°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{με } f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 0 \\ f'(0) & , x = 0 \\ e^x & , x > 0 \end{cases}$$

A. Να υπολογιστεί το $f'(0)$

B. Επιπλέον ισχύει ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ διέρχεται από το σημείο $B(2, 4)$. Να βρεθεί ο τύπος της f

Γ. Έστω E το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 2$

Γ.1. Να υπολογιστεί το E .

Γ.2. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδική κατακόρυφη ευθεία $x = \alpha$ που να χωρίζει το E σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

Δ. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \geq \frac{7}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ε. Έστω συνάρτηση F μία παράγουσα της f για την οποία ισχύει ότι $F(0) = 1$.

Να αποδειχθεί ότι:

$$F(x_0) > \frac{7x_0 + 4}{4}, \text{ για κάθε } x_0 > 0$$

$$\text{και } F(x_0) < \frac{7x_0 + 4}{4}, \text{ για κάθε } -\frac{1}{2} \leq x_0 < 0$$



Θέμα 14°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$$\left[f(x) \right]^2 + 2x \cdot f(x) - 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in R.$$

A. Ναδειχθεί ότι η f δεν έχει ακρότατα.

B. Δίνεται, επιπλέον, ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη ευθεία της C_f στο $+\infty$.

B.1. Να βρεθεί ο τύπος της f .

B.2. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

Γ. Δίνεται η συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

Γ.1. Να οριστεί η συνάρτηση $g \circ f$.

Γ.2. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g \circ f$, τον άξονα $x'x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x=1$.

Γ.3. Να υπολογιστεί η παράμετρος $\alpha \in R$, με $\alpha > 0$, ώστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) + x(g(\alpha) + \alpha - 1) \right] \text{ να υπάρχει στο } R.$$

Δ. Έστω F μία παράγουσα της f .

Να αποδειχθεί ότι $F(x+3) + F(x) < F(x+2) + F(x+1)$, για κάθε $x \in R$.



Θέμα 15°

A. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{3e^{x-2}}$ στο διάστημα $(0, +\infty)$

B. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

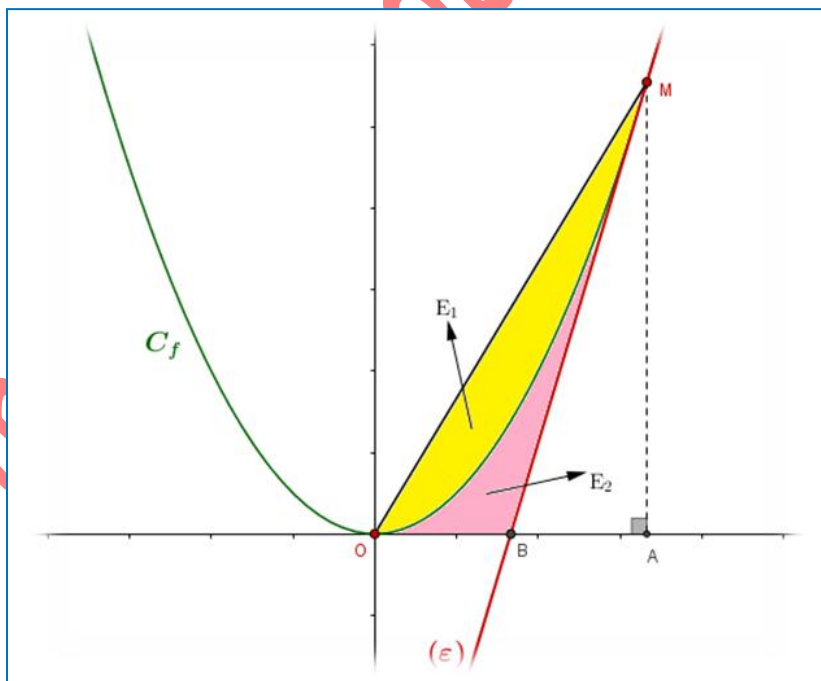
με τύπο $f(x) = \theta x^\kappa$, με $\theta > 0$ και $\kappa \in \{2, 3, 4, \dots\}$

για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{x}{\eta \mu(2x)} \cdot f\left(\frac{t}{\sqrt[\kappa]{\theta}}\right) dt \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot e^{\kappa-2}}$

B.1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$

B.2. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της (ε) σε τυχαίο σημείο M του 1^{ου} τεταρτημορίου και τα εμβαδά E_1, E_2 των γραμμοσκιασμένων χωρίων.

Αν ισχύει ότι $f\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1 + \ln(4\theta)$ να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .





Θέμα 16°

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\left| f(x) \cdot e^y - f(y) \cdot e^x + \frac{e^{x^2+y} - e^{y^2+y}}{e^{x^2+y^2}} \right| \leq |e^x - e^y - (x-y) \cdot e^y|$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow F(0)} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $e^{f(0)-1} \leq f(0)$

A. Να αποδείξετε ότι $F(0) = 0$ και $f(0) = 1$

B. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right| \leq |a - \beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Δ.

Δ.1. Να μελετήσετε την F ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Δ.2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 F(x) - x^3}$

Ε.

Ε.1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = F(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Ε.2. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\int_0^1 \left(2xF(t) - \int_0^1 2xdx + x \right) dt > \int_0^1 \left(2 \int_0^1 F(t) dt - 2F(1) \right) dx + 2F(1) \cdot x$$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.



Θέμα 17°

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, με τύπο:

$$g(x) = x^2 + \frac{4}{3}x - \int_{-1}^1 2x \cdot g(t) dt$$

$$\text{και } f(x) = \begin{cases} e^{g(x)}, & x < \alpha \\ x \cdot e^x, & x \geq \alpha \end{cases}, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha > 0$$

A. Ναδειχθεί ότι $g(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Ναδειχθεί ότι:

B.1. $x^2 - x \geq \ln x$, για κάθε $x > 0$.

B.2. $\alpha = 1$.

Γ. Ναδειχθεί ότι:

Γ.1. η f' είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ.2. $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 3} dx + \int_e^{e^2} \frac{f'(\ln t)}{t} dt + \frac{8}{5} - \frac{6\sqrt{3}}{5} = 2e^2 - e$.

Δ. Έστω F μια αρχική της f για κάθε $x \in (-\infty, 1]$ με $F(1) = 0$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_F , την ευθεία $x = 1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Ε. Ναδειχθεί ότι το εμβαδόν που περικλείεται από την C_f την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ και την ευθεία $x = 2$ ισούται με $e^2 - 2e$ τμ.



Θέμα 18°

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $e^{f(x)} - x^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = 0$
- $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x-1) + f(f(x)) = x^4 - x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Να αποδειχθεί ότι $f'(1) = 2$

B.

B.1. Να αποδειχθεί ότι το $x_0 = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$

B.2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f\left(\frac{f(x)-1}{2}\right) = -1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Δ.

Δ.1. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ.2. Ναλυθεί η εξίσωση $f(\ln x) + 2(1 - \ln x) = -(x - e)^2 (f(x) + 1)$

Δ.3. Να αποδειχθεί ότι $\int_1^2 f(x) e^{f(x)} dx > \frac{17}{6}$



Θέμα 19°

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x \cdot y) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$, για κάθε $x > 0, y > 0$.

Δίνεται επίσης ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$

A. Ναδειχθεί ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 1} \left[\frac{f(x \cdot h) - f(x)}{x \cdot h - x} \right] = \frac{2f(x)}{x} + x$

B. Ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και ισχύει ότι $x^2 f'(x) = 2x \cdot f(x) + x^3$

Γ. Ναδειχθεί ότι ο τύπος της f είναι: $f(x) = x^2 \ln x$, για $x > 0$.

Δ. Ναβρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ε. Ναβρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = e$.



Θέμα 20°

Έστω συνάρτηση f , αύξουσα στο πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία:

$$M(\alpha, \alpha^4 - 4\alpha^3 + 4\alpha^2) \text{ και } N(\alpha + 1, -\alpha^2 + 4|\alpha| - 4), \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

A. Ναδειχθεί ότι $\alpha = 2$

B. Ναλυθεί η ανίσωση $f(x^2 + 1) - f(x + 1) > \ln\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$, στο $(0, +\infty)$

Γ. Ναυπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(f(\pi) + \ln \frac{e \cdot \pi}{3} \right) x \right]$

Δ. Νααποδειχθεί ότι $f(2^x - 1) \geq f(\ln 2^x - x^2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ε. Νααποδειχθεί ότι στο διάστημα $[2, 3]$ η f είναι σταθερή.