

# 20 επαναληπτικά θέματα

για τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ' λυκείου

(τεύχος 6 – σχολικό έτος 2017-2018)

Γράφουν οι μαθηματικοί:

Βασιλόπουλος Κων/νος

Βέρρας Οδυσσέας

Κώνστας Χάρης

Λιτζερίνος Χριστόδουλος

Μπούζας Δημήτρης

Πάτσης Ανδρέας

Σκέντζος Δημήτρης

Τρύφων Παύλος

Στο φίλο και συνάδελφο

Νώντα Καρύμπαλη

που έφυγε νωρίς...

ελεύθερη διάθεση για εκπαιδευτικούς σκοπούς από:

(Απαγορεύεται η όποιας μορφής εμπορική χρήση)

**Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο!**



[maths4people.blogspot.gr](http://maths4people.blogspot.gr)



### Θέμα 1<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

Επιπλέον ισχύει ότι:

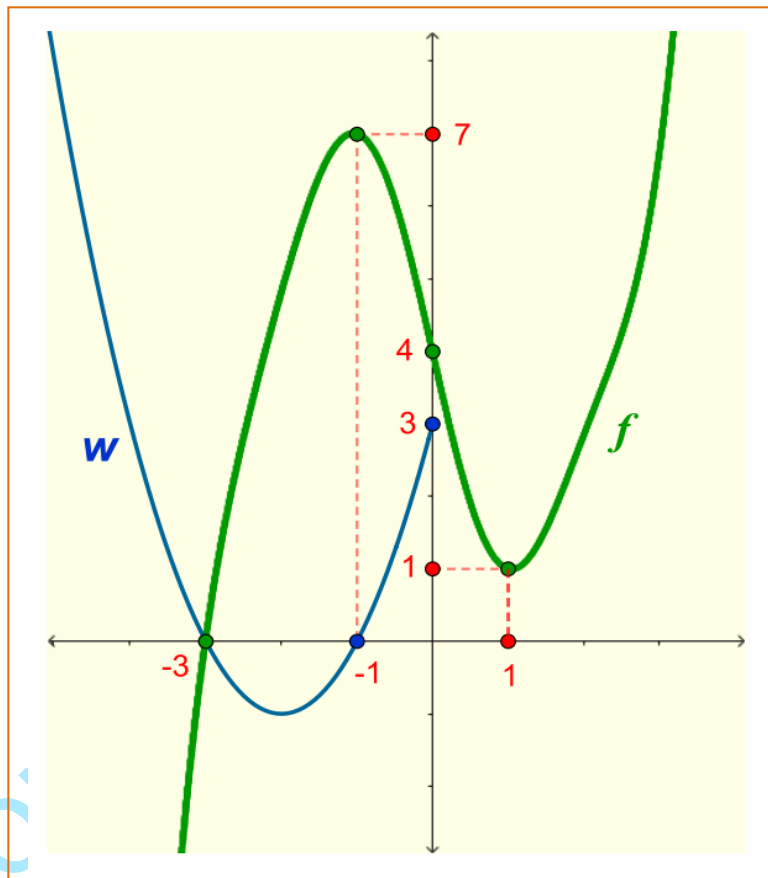
$$f\left(-\frac{31}{10}\right) = -\frac{1}{3} \text{ και η } f \text{ δεν έχει}$$

καμία εναλλαγή μονοτονίας πέρα από αυτές που απεικονίζονται στο δοσμένο σχήμα.

$$\text{Θεωρούμε συνάρτηση } g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Έστω επίσης η συνάρτηση

$$w(x) = x^2 + 4x + 3, \text{ με } x \in (-\infty, 0]$$



A. Να μελετηθεί η  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της  $C_g$ .

Γ. Έστω  $E_1$  το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ  $C_f$ ,  $C_w$  και του άξονα  $y'y$  και  $E_2$  το εμβαδόν μεταξύ  $C_f$  και των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$ . Ναδειχθεί ότι  $E_1 = E_2$ .

Δ. Να οριστεί η συνάρτηση  $g \circ g$ .

Ε. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (-1, 0)$  τέτοιο ώστε  $3f^2(\xi) + 28f'(\xi) = 0$ .



## Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{\lambda x}$  στο  $\mathbb{R}$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για την οποία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $K(1, f(1))$  διέρχεται από το σημείο  $\Lambda(2, 2e)$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

**B.** Έστω  $A(\alpha, f(\alpha))$ , με  $\alpha \leq 1$ , σημείο της  $C_f$  και  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$ .

**B1.** Να βρείτε το σημείο  $A$  για το οποίο η εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  σχηματίζει με τους άξονες το τρίγωνο με το μέγιστο Εμβαδό.

**B2.** Έστω σημείο  $B(-1, f(-1))$  της  $C_f$  και  $M$  το σημείο τομής της  $(\varepsilon)$  με τον άξονα  $y'y$ .

Αν η τετμημένη του  $A$  μεταβάλλεται κατά  $e$  μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του  $M$  κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το  $A$  διέρχεται από το  $B$ .

**Γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της  $C_f$  για το οποίο η  $C_f$  έχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

**Δ.** Έστω η συνάρτηση  $g(x) = f(x) \cdot x^3$  στο  $\mathbb{R}$ . Να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(\alpha)x^3 - x + 1}{x^2 + 1}$ , για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .



### Θέμα 3<sup>ο</sup>

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g$  με  $D_f = D_g = f(D_f) = g(D_g) = [\alpha, \beta]$ , με  $0 < \alpha < \beta$ .

**A.** Έστω  $E$  το εμβαδόν που περικλείεται από τις  $C_f, C_g$  και τις κατακόρυφες ευθείες  $x = \alpha$  και  $x = \beta$ . Να αποδειχθεί ότι  $E \leq (\beta - \alpha)^2$ .

**B.** Έστω  $f, g$  δύο φορές παραγωγίσιμες στο  $[\alpha, \beta]$ .

**B1.** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**B2.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f'(x)g(x)[1 + f^2(x)] = f(x)g'(x)[1 + g^2(x)]$ , να αποδειχθεί ότι  $f = g$ .

**B3.** Αν  $f(\alpha), f(\beta) \in (\alpha, \beta)$ , να αποδειχθεί ότι η  $C_f$  έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.



#### Θέμα 4<sup>ο</sup>

Έστω συνάρτηση  $f$ , συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $D_f = \mathbb{R}$ .

Ισχύει ότι:  $f(x) \cdot f\left(-\frac{1}{x}\right) = -1$ , για κάθε  $x \neq 0$ .

A. Ναδειχθεί ότι  $f(0) = 0$ .

B. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .

Γ. Έστω  $f^{-1}$  η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$ .

Γ.1 Να βρεθεί το πρόσημο του  $f^{-1}(2018)$ .

Γ.2 Να αποδειχθεί ότι  $f^{-1}\left(-\frac{1}{f(x)}\right) = f\left(-\frac{1}{f^{-1}(x)}\right)$ , για κάθε  $x \neq 0$ .

Δ. Επιπλέον ισχύει  $f$  παραγωγίσιμη και  $[f(x)]^3 \cdot f'(x) + x^3 = x \cdot f(x) \cdot [f(x) + x \cdot f'(x)]$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .



### Θέμα 5<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

$$f(x) f''(x) = 2(x^2 + x + 1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**A.** Ναδειχθεί ότι η  $C_f$  δεν έχει σημεία καμπής.

**B.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f(0) = f'(0) = 1$

**B1.** Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή σε όλο το  $\mathbb{R}$ .

**B2.** Ναλυθεί η ανίσωση:  $f(\ln x) - f(\ln x - 1) > f(1 - x) - f(-x)$ .

**B3.** Να αποδειχθεί ότι:  $f(2018) + f(-2018) > f(2017) + f(-2017)$

**Γ.** Επιπλέον ισχύει ότι  $f(1) = f'(1)$  και  $\int_0^1 [f'(x) - 1]^2 dx = \frac{4}{3}$

**Γ1.** Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**Γ2.** Ναλυθεί η εξίσωση  $f(x) = 3x$ .



### Θέμα 6°

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1) = 1 \quad \text{και} \quad f'(x) - f(x) = f(x) \cdot \ln x, \quad \text{για κάθε } x > 0$$

**A.** Να αποδειχθεί ότι  $f(x) = x^x$ , για κάθε  $x > 0$ .

**B.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^2 (e^{x \ln x - x} \cdot \ln x) dx$

**Γ.** Να βρεθεί η εφαπτομένη της  $C_f$  που διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

**Δ.** Αν τα σημεία  $A(\alpha, f(\alpha))$ ,  $B(\beta, f(\beta))$  και  $O(0,0)$  είναι συνευθειακά να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε  $(e \cdot \xi)^\xi = e$ .

**Ε.** Να αποδειχθεί ότι  $x^x \geq x$ , για κάθε  $x > 0$

**ΣΤ.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $\left(\frac{x}{e}\right)^x = \alpha$ , για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .



### Θέμα 7<sup>ο</sup>

Έστω κοίλη συνάρτηση  $F$  με πεδίο ορισμού το  $R$ . Η  $F$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 1$  και είναι παραγωγίσιμη με  $F'(x) = f(x)$ , όπου  $f$  συνεχής για κάθε  $x \in R$ .

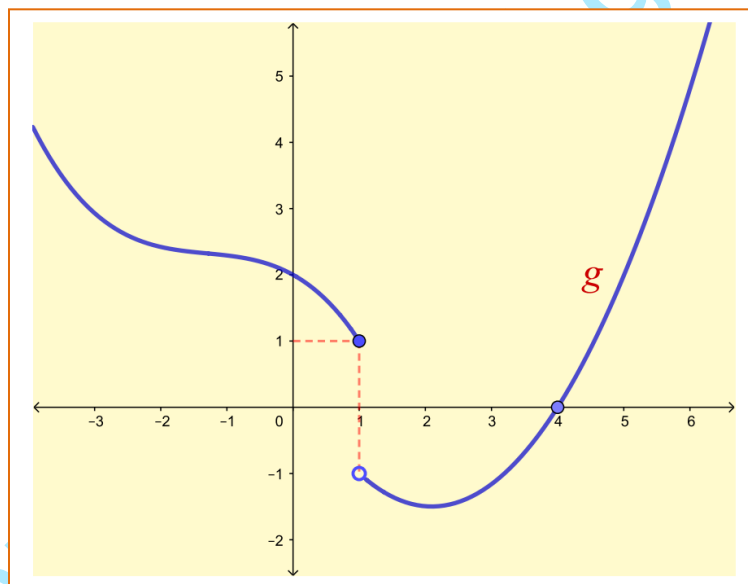
Επιπλέον ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) + 2}{x - 5} = 0$

Έστω, επίσης, η συνάρτηση  $g$  με

πεδίο ορισμού το  $R$  της οποίας

η γραφική παράσταση απεικονίζεται

στο διπλανό σχήμα.



**A.** Να μελετηθεί η  $F$  ως προς τη μονοτονία, το πλήθος και το είδος των ακροτάτων.

**B.** Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left[ \frac{\eta\mu(g(x)) + f(\alpha) + 2}{g(x)} \right]$  για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\alpha \in R$ .

**Γ.** Αν  $f$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  να αποδειχθεί ότι:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{|f(2x-1)| - x^2 + 1}{\eta\mu(x-1)} \right] = 2(f'(1) - 1)$

**Δ.** Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $w(x) = f(x) \cdot g(x)$  είναι συνεχής για κάθε  $x \in R$ .

**Ε.** Να αποδειχθεί ότι η  $C_w$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = x$ , στο διάστημα  $(0, 1)$ , έχουν μοναδικό κοινό σημείο.





### Θέμα 8<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - \eta\mu^2 x - 1$  στο  $R$ .

- A. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
- B. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες.
- Γ. Έστω συνάρτηση  $g$ , ορισμένη στο  $R$ , με  $g'(x) = (x+2)f(x)$ . Ναδειχθεί ότι η  $g$  έχει τρία τοπικά ακρότατα και να προσδιοριστεί το είδος τους.
- Δ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις κατακόρυφες ευθείες  $x = -1$  και  $x = 1$ . (δίνεται ότι  $\sin 2x = 1 - 2\eta\mu^2 x$ )
- E. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο  $M(x(t), y(t))$  της  $C_f$  όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι ίσος με αυτόν της τεταγμένης, καθώς το  $M$  διατρέχει τη  $C_f$ , αν υποθέσουμε ότι  $x'(t), y'(t) \neq 0$ .



### Θέμα 9<sup>ο</sup>

Έστω συνάρτηση  $f$  με  $D_f = [0, 5]$  και συνεχής στο πεδίο ορισμού της, για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & , 0 < x < 1 \\ -g(x) & , 1 \leq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{x-2}} & , 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Όπου  $g$  συνεχής συνάρτηση στο  $R$ , γνησίως αύξουσα και με  $g(1) = 0$ .

**A.** Να βρεθούν οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της  $f$ .

**B.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και το είδος των ακροτάτων.

**Γ.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

**Δ.** Να αποδειχθεί ότι  $f(x) - f(1) > (1-x)g(x)$ , για κάθε  $x \in (1, 2)$ .

**Ε.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $f(0) = 2$  και  $f(2) = -1$ , να βρεθεί:

**Ε.1** το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Ε.2** το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

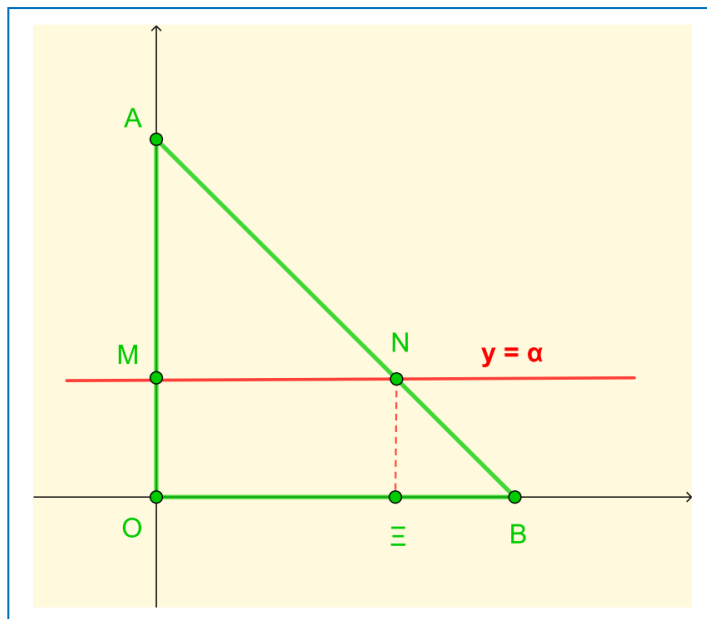


### Θέμα 10<sup>ο</sup>

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $OAB$ , με  $(OA) = (OB) = 2$ .

Έστω η οριζόντια ευθεία  $(\varepsilon): y = \alpha$ , με  $\alpha \in (0, 2)$ .

Έστω, επίσης, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $OMN\Xi$ , εγγεγραμμένο στο τρίγωνο  $OAB$ .



**A.** Ναδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τις κορυφές  $A$  και  $B$  είναι η  $(\eta): y = 2 - x$ .

Στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $E(\alpha)$  που δίνει το εμβαδόν του ορθογώνιου παραλληλογράμμου  $OMN\Xi$ .

**B.** Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$  για την οποία το εμβαδόν του  $OMN\Xi$  γίνεται μέγιστο.

**Γ.** Έστω ότι το  $\alpha$  μεταβάλλεται, σε σχέση με το χρόνο, με ρυθμό μεταβολής  $\alpha'(t) \neq 0$ .

Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$  για την οποία ο ρυθμός μεταβολής του Εμβαδού του τραpezιού  $OMNB$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής του  $\alpha$ .

**Δ.** Έστω συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο διάστημα  $[0, 2]$  με σύνολο τιμών το  $[0, 2]$ .

**Δ1.** Να αποδειχθεί ότι η  $C_f$  τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  σε μοναδικό σημείο

$$\Lambda(\beta, 2 - \beta), \text{ με } \beta \in (0, 2).$$

**Δ2.** Αν η  $C_f$  χωρίζει το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  σε δύο ισοεμβαδικά χωρία να

$$\text{αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό } \xi \in (0, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } f(\xi) = 2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta}.$$



### Θέμα 11°

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + x - \ln x \quad \text{και} \quad g(x) = 2(\ln x + x - 2)\left(\frac{1}{x} + 1\right), \quad \text{για } x > 0$$

A. Ναδειχθεί ότι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x > 0$ .

B. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:  $f\left(f(x) - \frac{1}{2} - \ln 2\right) = \frac{3}{4} + \ln 2$

Γ. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (1, 2)$  τέτοιο ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Δ. Έστω E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και την κατακόρυφη ευθεία  $x = 1$ . Ναδειχθεί ότι  $E = 1$ .

### Θέμα 12°

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:  $f(x) + e^{f(x)} - 1 = \frac{e}{x} - \ln x$ ,

για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  και η συνάρτηση  $g(x) = x + e^x - 1$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

A. Να μελετηθεί η  $g$  ως προς τη μονοτονία.

B. Να αποδειχθεί ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Ναδειχθεί ότι  $f^{-1}(0) = e$

Δ. Να λυθεί η ανίσωση:  $\ln x \leq \frac{e}{x^2} - \frac{e}{x}$

E. Αν επιπλέον η  $f$  είναι συνεχής στο  $e$ , να υπολογιστεί το  $\lim_{x \rightarrow e} \left[ f(x) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{x-e}\right) \right]$



### Θέμα 13°

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , x \geq 0 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}$

A. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της  $f$ .

B. Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Έστω η οριζόντια ευθεία  $y = \alpha$ , με  $\alpha > 0$ . Έστω  $E_1$  το εμβαδόν που περικλείεται από τη  $C_f$ , την ευθεία  $y = \alpha$  και τον άξονα  $y'y$  για  $x \leq 0$  και  $E_2$  το αντίστοιχο εμβαδόν για  $x \geq 0$ .

Γ.1 Να αποδειχθεί ότι  $E_1 > E_2$ , για κάθε  $\alpha > 0$ .

Γ2. Να υπολογιστεί το  $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [E_1(\alpha) - E_2(\alpha)]$

Δ. Να αποδειχθεί ότι σε οποιαδήποτε σημεία με τετμημένες  $x_0$  και  $x_0 + \alpha$ , αντίστοιχα, δεν υπάρχουν εφαπτομένες της  $C_f$  οι οποίες να είναι μεταξύ τους κάθετες, αν  $0 < \alpha < 1 - \ln 2$ .

Ε. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $g(x) = \ln(x-1)$ , για  $x > 1$ . Να οριστεί η συνάρτηση  $g \circ f$ .



### Θέμα 14<sup>ο</sup>

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και συνεχής στο διάστημα  $[-2, 3]$ , για την οποία ισχύει ότι

$$f(x-1) + f(x) + f(x+1) = 3x, \text{ για κάθε } x \in [-1, 2].$$

A. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\rho \in [-1, 1]$  τέτοιο ώστε  $f(\rho) = 0$ .

B. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in [0, 2]$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 1$ .

Γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^2 f(x) dx$ .

Δ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $2f(x) = 1$  έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα  $(-1, 2)$ .

Ε. Αν επιπλέον η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες  $-1, 0, 1$  να αποδειχθεί ότι

$$f'(-1) + f'(0) + f'(1) = 3.$$



### Θέμα 15°

Έστω συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  για την οποία ισχύει ότι:

$$2018 \left( f(x) - \frac{e^x}{x^2+1} \right) + 2018 \left( \frac{e^x}{x^2+1} - f(x) \right) \leq 2, \text{ για κάθε } x \in R$$

A. Να αποδειχθεί ότι  $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ , για κάθε  $x \in R$ .

B. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$

Γ. Για τις διάφορες τιμές του θετικού πραγματικού αριθμού  $\lambda$  να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης:  $\ln^2 \lambda^{\sqrt{\lambda}} + \lambda = e^{f(x)} (f^2(x) + 1)$

Δ. Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$(x^2 - 8x + 17)e^{\sqrt{x-2}-x} > (x-1)e^{-4}$$

Ε. Να υπολογιστεί το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x}{\left( \int_0^1 \frac{x}{t^2+1} dt - \frac{e-1}{e} x \right) \cdot \left( \int_0^1 \frac{x}{t^2+1} dt - (e-1) \int_0^1 x \cdot t dt \right)}$



### Θέμα 16°

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν ότι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)e^x}{x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (f(0) + f'(0))x}{x} = -2$

Α. Να αποδείξετε ότι:  $f(0) = 0$  και  $f'(0) = 2$

Β. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  δεν έχει στο  $+\infty$  πλάγια ασύμπτωτη με κλίση  $\alpha < 2$ , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι έχει συνεχή παράγωγο.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + (f(1) + f(-1))x - 1}{xf(x) - 2x^2}$$

Δ. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + (x-1)^2 = 1$





### Θέμα 17°

Α. Έστω η συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[0, \pi]$  για την οποία ισχύουν:

$$[f(x)]^2 = 1 - \sin^2 x, \text{ για κάθε } x \in [0, \pi] \text{ και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left( \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Α.1 Ναδειχθεί ότι:  $f(x) = \eta\mu x$ , στο  $[0, \pi]$

Α.2 Ναδειχθεί ότι:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = \sqrt{2}$  και  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{4} + h\right)}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Α.3 Έστω  $E$  το εμβαδόν που περικλείεται από τη  $C_f$  και τον άξονα  $x'x$ , στο  $[0, \pi]$ . Να

δειχθεί ότι υπάρχει μοναδική ευθεία  $(\varepsilon): y = \lambda x$ , με  $0 < \lambda < \frac{1}{\pi^2}$ , που χωρίζει το  $E$  σε δύο ίσα μέρη.

Β. Ναλυθεί η εξίσωση:  $e^{\eta\mu x} - (e^{\eta\mu x})'' = 0$  στο  $\mathbb{R}$ .

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^{\eta\mu x} \sin x - e^{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x = 0$  στο διάστημα  $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$  έχει ακριβώς μία λύση.



### Θέμα 18°

Έστω συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x}(2-x) & , x < 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + \alpha}} + 2 & , x \geq 0 \end{cases}$ , με  $\alpha > 0$ .

A. Να βρεθεί το  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ .

B. Να αποδειχθεί ότι  $f(x) < 3$ .

Γ. Έστω  $E(\lambda)$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , τον άξονα  $y'y$ , την οριζόντια ευθεία  $y = 3$  και την κατακόρυφη ευθεία  $x = \lambda$ , με  $\lambda > 0$ . Να υπολογιστεί το  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ .

Δ. Να γίνει πρόχειρη χάραξη της  $C_f$ .

Ε. Έστω  $(\varepsilon)$  η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(0, 2)$ .

E.1 Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$ , την  $(\varepsilon)$ , τον άξονα  $x'x$  και την κατακόρυφη ευθεία  $x = -3$ .

E.2 Να λυθεί η ανίσωση:  $f(f(x) - x) < \frac{2\sqrt{5}}{5} + 2$



### Θέμα 19°

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f$ , ορισμένη στο  $(0, +\infty)$ , για την οποία ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ .

**A.** Ναδειχθεί ότι  $f(1) = 0$  και  $f'(1) = 1$

**B.** Επιπλέον ισχύει ότι η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με  $x^2 \cdot f''(x) + 1 = 0$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

**B.1** Να βρεθεί ο τύπος της  $f$ .

**B.2** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της  $C_f$  με την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

**Γ.** Έστω η συνάρτηση  $g(x) = e^x$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ.1** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο  $A(\alpha, \ln \alpha)$  της  $C_f$ , με τετμημένη  $\alpha \in (e, e^2)$ , όπου η εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$  να εφάπτεται και της  $C_g$ .

**Γ.2** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0, +\infty)$  για το οποίο η απόσταση μεταξύ  $C_f$  και  $C_g$  γίνεται ελάχιστη. Στη συνέχεια ναδειχθεί ότι οι εφαπτομένες των  $C_f$  και  $C_g$  στο  $x_0$ , είναι παράλληλες.

**Δ.** Να οριστεί η συνάρτηση  $k = f \circ f$  και να λυθεί η εξίσωση  $k(x+1) - k(x) = k(e+1)$ .



## Θέμα 20<sup>ο</sup>

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν:

- $f(-2) < 0 < f(2)$  και  $f'(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \ln x}{x} = \lambda$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$

- $g'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

- $(x^2 - 4)g(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**A.** Ναδειχθεί ότι το  $x_0 = 0$  είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**B.** Να μελετηθεί η  $g$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Γ.** Ναλυθεί η εξίσωση  $g(x) = 0$ .

**Δ.** Επιπλέον ισχύει:  $f$  περιπτή,  $g$  κυρτή στο  $\mathbb{R}$  και  $\int_0^2 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{2}$

**Δ.1** Ναδειχθεί ότι οι εφαπτομένες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  της  $C_g$  στα σημεία  $A(x_1, g(x_1))$  και  $B(x_2, g(x_2))$  αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα  $y'y$ , όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $g(x) = 0$ .

**Δ.2** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (-2, 2)$  τέτοιο ώστε  $f'(\xi) = \frac{E+1}{8}$ , όπου

$E$  το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$  και τις ευθείες  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ .