

20 επαναληπτικά θέματα

για τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ λυκείου

(τεύχος 5 – σχολικό έτος 2016-2017)

Γράφουν οι μαθηματικοί:

Βέρρας Οδυσσέας

Κώνστας Χάρης

Λιτζερίνος Χριστόδουλος

Μπούζας Δημήτρης

Πετρόπουλος Βασίλης

Ψαρράς Παναγιώτης

ελεύθερη διάθεση για εκπαιδευτικούς σκοπούς από:

Μαθηματικά για το τελευταίο θρανίο!



maths4people.blogspot.gr



Θέμα 1^ο

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Επιπλέον ισχύει ότι:

- $f(0) = f'(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

A. Ναδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\rho \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $f(\rho) = 2017$.

B. Έστω η ευθεία $(\varepsilon): y = x$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, με $D_g = (0, +\infty)$.

B.1 Ναδειχθεί ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

B.2 Να βρεθεί το σύνολο τιμών της g .

B.3 Να αποδειχθεί ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη C_f σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, +\infty)$

B.4 Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $A(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0, +\infty)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο A να είναι παράλληλη στην ευθεία (ε)



Θέμα 2^ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και με συνεχή δεύτερη παράγωγο.

A. Αν ισχύει ότι $\int_1^3 \ln x \cdot f(t) dt \leq 10(x-1)$ για κάθε $x > 0$, τότε ναδειχθεί ότι: $\int_1^3 f(x) dx = 10$.

B. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 5$.

Γ. Έστω ότι η f αντιστρέφεται και η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\int_{f(0)}^5 f^{-1}(x) dx = \int_0^\xi f(x) dx$,

όπου ξ ο αριθμός του ερωτήματος B, να αποδειχθεί ότι: $5 < 2 \int_0^\xi f(x) dx < 15$

Δ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^1 x \cdot f''(x) dx = 0$ τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο

ώστε το σημείο $A(\rho, f(\rho))$ να είναι πιθανό σημείο καμπής της C_f .



Θέμα 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^x}{x+1}$ και $g(x) = x \ln x + \ln x + x$, με $x \in (0, +\infty)$.

Α. Να αποδειχθεί ότι f έχει μοναδική θέση ολικού ελαχίστου στο $x_0 \in (0, 1)$.

Β. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2}$

Γ. Να υπολογιστεί ο αριθμός $\alpha > 0$ ώστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + \eta \mu x} - g'(\alpha)x)$ να υπάρχει και να ισούται με πραγματικό αριθμό.

Δ. Να αποδειχθεί ότι $(x+2) \ln(x+1) > x \ln x + \ln(x+2)$ για κάθε $x > 1$.

Ε. Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{x+1}$, με $x \in (0, +\infty)$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.



Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln x$, για $x > 0$.

A. Έστω η συνάρτηση w για την οποία ισχύει $(g \circ w)(x) = \frac{\ln x + x}{2}$, για $x > 0$.

A.1 Να αποδειχθεί ότι $w(x) = \sqrt{x \cdot e^x}$, με $x \geq 0$.

A.2 Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{\frac{x}{3}} < e^{\frac{-x}{2}} \sqrt{\ln 3}$

B. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{g(|x|)}{x^2} + 2$, για κάθε $x \neq 0$.

B.1 Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

B.2 Να βρεθεί η οριζόντια ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

B.3 Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις (ε) , C_f και τις κατακόρυφες ευθείες $x=1$ και $x=e$.



Θέμα 5^ο

Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο R , για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = 2x \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in R$.

A. Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$

B. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -2x + 2017$ τότε να δειχθεί ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$. Στη συνέχεια να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα.

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^2 + 1) - f(x^2) < f(x + 1) - f(x)$

Δ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 1$.

Ε. Έστω συνάρτηση $g : [0, 2] \rightarrow R$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν η g έχει την ίδια κυρτότητα με την f και ισχύει ότι: $\int_0^{f(0)} g'(x) e^{g(x)} dx = 0$ τότε να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ στο οποίο η g παρουσιάζει ακρότατο και να προσδιοριστεί το είδος του ακροτάτου.



Θέμα 6^ο

Έστω οι συναρτήσεις f, g με $D_f = D_g = \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους, όπου $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Αν $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 g(x) dx$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = g(x_0).$$

B. Αν επιπλέον: $\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^{g(x)} + 3[g(x)]^2}{e^{f(x)} + 3[f(x)]^2}$ τότε να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.

Γ. Αν $f(2) = f(0) + 3642$ να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ. Να λυθεί η ανίσωση $f(2(\ln x)^2) < f(x^2 - 1)$



Θέμα 7^ο

Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο R , για την οποία ισχύει:

- $f'(x) = f(x) + 1 - x$, για κάθε $x \in R$
- $f(0) = 1$

A. Να αποδειχθεί ότι $f(x) = x + e^x$ και στη συνέχεια να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

B. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Γ. Έστω σημείο $M(x(t), y(t))$ το οποίο κινείται στη C_f και ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι 2 μον/sec . Να αποδειχθεί ότι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M , τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη στο M διέρχεται από το $O(0,0)$, είναι $2e + 2 \text{ μον/sec}$

Δ. Έστω οι συναρτήσεις: $h(x) = x \cdot e^x - e^x - e$ και $g(x) = (f(x) - x - e)^2 (x - 2)^2$.

Δ.1 Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Δ.2 Να αποδειχθεί ότι η g έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.



Θέμα 8^ο

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + f(x) + f(1-x) = x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

A. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $e^{f(\xi)} \cdot f'(\xi) = 1$

B. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in [0,1]$ τέτοιο ώστε: $3f(\rho) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

Γ. Αν $f(0) > 0$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Δ. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\alpha \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^1 [e^{f(x)} - x] dx = -2f(\alpha)$

Ε. Να αποδειχθεί ότι $-1 < f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$



Θέμα 9^ο

Έστω συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει:

- $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$, για κάθε $x \in R$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) - 2x}{\eta \mu x} = -1$

A. Ναδειχθεί ότι $f(0) = 1$ και στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος της f .

B. Ναδειχθεί ότι $f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ και να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα.

Γ. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ και να αποδειχθεί ότι $2 \int_0^1 f(x) dx > 1$

Δ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο x_0 να διέρχεται από το σημείο $A(3, -1)$.

Ε. Έστω $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$, με $\lambda > 0$. Να υπολογιστεί το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.



Θέμα 10°

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $D = [-3, 3]$ και παραγωγίσιμη εσωτερικά του D . Ισχύει ότι:

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot f(x) - 2\varepsilon\varphi x}{x} = 1$$

$$\bullet \quad f(x) f'(x) = -x, \text{ για κάθε } x \in (-3, 3)$$

A. Να αποδειχθεί ότι $f(0) = 3$ και στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος της f στο D .

B. Έστω $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, με $x \in [-3, 3]$ και τα σημεία $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$ και $M(\mu, f(\mu))$, με $\mu \in (-3, 3)$, σημεία της C_f .

B.1 Να γίνει πρόχειρο σχήμα της C_f .

B.2 Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών AM και BM ώστε το εμβαδόν του τριγώνου AMB να είναι μέγιστο.

Γ. Έστω συνάρτηση g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R , όπου τα σημεία $\Gamma(1, 2)$ και $\Delta(2, 4)$ σημεία της C_g . Να αποδειχθεί ότι οι C_f , C_g τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

Δ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_2^3 x^3 f(x) dx$.

Ε. Έστω σημείο $N(x(t), y(t))$ που διατρέχει τη C_f . Να βρεθούν οι συντεταγμένες του N κατά τη χρονική στιγμή t_0 στην οποία ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι ίσος με αυτόν της τεταγμένης $y'(t_0) = x'(t_0) \neq 0$.



Θέμα 11°

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$
- $f(x) \geq x - 1$, για κάθε $x > 0$
- $e^{f'(x)-1} \cdot f''(x) = 1$, για κάθε $x > 0$.

A. Ναδειχθεί ότι η f είναι κυρτή και στη συνέχεια ότι: $f(1-\alpha) + f(1+\alpha) > 0$, για κάθε $\alpha \in (0, 1)$

B. Να αποδειχθεί ότι $f'(1) = 1$ και στη συνέχεια να βρεθεί ο τύπος της f .

Γ. Αν $f(x) = x \cdot \ln x$ να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

Δ. Αν $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$, με $\alpha < \beta$ και ισχύει ότι $\alpha^\alpha = \beta^\beta$ τότε ναδειχθεί ότι $\beta \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$

Ε. Να αποδειχθεί ότι $x^{2x} < (x-1)^{x-1} (x+1)^{x+1}$, για κάθε $x > 1$

ΣΤ. Έστω x_1, x_2 , με $0 < x_1 < x_2$, ρίζες της εξίσωσης $3f(x) + 1 = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $3x_0 \cdot f'(x_0) = 1 + 3f(x_0)$



Θέμα 12°

Έστω συνάρτηση f , τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $D_f = (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

- $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$
- $f(2) > 0$, $f(4) < 0$, $f(6) > 0$

Α. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$

Β. Ναδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Γ. Ναδειχθεί ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.

Δ. Έστω συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, με $x > 0$.

Δ.1 Αν η g έχει ακρότατο στο $x = \alpha$, με $\alpha > 6$, να αποδειχθεί ότι αυτό είναι το μοναδικό ακρότατο της g και να βρεθεί το είδος του.

Δ.2 Ναδειχθεί ότι $g(\alpha) > 0$



Θέμα 13°

Έστω συνεχής συνάρτηση f με $D_f = f(D_f) = (0, +\infty)$, για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) = e^{x+f(x)} \text{ για κάθε } x > 0.$$

A. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = \ln[f(x)] - x$ για κάθε $x > 0$.

B. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει σημείο $A(x_0, f^{-1}(x_0))$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f^{-1} να τέμνει την ευθεία $y = x$.

Γ. Έστω ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , με $(f^{-1})'(x_0) = -1$, όπου $x_0 \in (0, +\infty)$.

Γ.1 Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Γ.2 Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη της C_g στο x_0 , με $g(x) = \ln f(x)$, είναι η οριζόντια ευθεία $y = f^{-1}(x_0) + x_0$.

Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ τότε να δειχθεί ότι:

Δ.1 Η f^{-1} είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ.2 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Δ.3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) - f^{-1}(x)] = +\infty$



Θέμα 14^ο

Έστω οι συναρτήσεις f , g , w για τις οποίες ισχύει:

- g κυρτή και παραγωγίσιμη στο R
- $f(x) = g(x) + 2e^{x-1} - \frac{1}{3}x^3 - 2x + \frac{1}{3}$, για κάθε $x \in R$
- $w(x) = 2e^{x-1} - x^2 - 2$

A. Ναδειχθεί ότι:

A.1 η w είναι γνησίως αύξουσα

A.2 $\frac{2x}{e} + x^2 < \frac{2e^x}{e} + (\ln x)^2$

B. Αν επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - \sqrt{x^2 + 3}}{x - 1} = -\frac{1}{2}$

B.1 Να βρεθούν τα $g(1)$ και $g'(1)$

B.2 Ναδειχθεί ότι η f είναι κυρτή

B.3 Ναδειχθεί ότι $f(x) \geq 3 - x$



Θέμα 15°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = f'(0) = 1$
- $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$
- $f(x)f''(x) = (f'(x))^2$, για κάθε $x \in R$

A. Ναδειχθεί ότι $f(x) = e^x$ και να υπολογιστούν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln x}{\eta\mu(f(x)-1)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} [(f(x)-1) \ln x]$$

B. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x + 1$

B.1 Ναδειχθεί ότι $g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$

B.2 Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $(\xi - 1)g'(\xi) = \left(2 - \frac{1}{\xi}\right)g(\xi)$

Γ. Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $w(x) = \ln(1 + f(x))$

Γ.1 Να αποδειχθεί ότι η w αντιστρέφεται και να βρεθεί η w^{-1} .

Γ.2 Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_w , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την κατακόρυφη ευθεία $x = 1$, να αποδειχθεί ότι: $\ln 2 < E < \ln(1 + e)$

Γ.3 Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 e^x [x - w(x)] dx$



Θέμα 16°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$, με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β. Να αποδειχθεί ότι $\pi < 8 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx < 2\pi$.

Γ. Να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο x_0 να διέρχεται από το σημείο $A\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

Δ. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Ε. Έστω το σημείο της C_f $B\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Ε.1 Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο Β.

Ε.2 Να αποδειχθεί ότι $2f(x) < x + 1 - \frac{\pi}{4}$, για $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ και $2f(x) > x + 1 - \frac{\pi}{4}$, για $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

ΣΤ. Αν $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ και $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$, να υπολογιστούν τα I, J .



Θέμα 17°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$$\left[f(x) \right]^3 + 2f(x) = e^x + \frac{x^4}{4} - \alpha x - 1, \text{ με } \alpha \in R \text{ και για κάθε } x \in R$$

Α. Ναδειχθεί ότι $f(0) = 0$

Β. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in R$, να βρεθεί η τιμή του α

Γ. Για $\alpha = 1$ να βρεθούν τα ακρότατα της f

Δ. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x - \ln x) = 0$ δεν έχει ρίζες.

Ε. Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\int_{\frac{1}{\rho}}^{\frac{\ln \rho}{2-\rho}} f(x - \ln x) dx = 0$



Θέμα 18°

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = \ln(x^2 + e - 1) - 2x^2 + 1$

A. Να αποδειχθεί ότι η f' είναι άρτια και ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$

B. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

Γ. Να αποδειχθεί ότι $f(x) \geq f'(-2)x + 2f'(-2) + f(-2)$ για κάθε $x \in (-\infty, 0]$ και στη συνέχεια ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Δ. Να αποδειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi > 0$, έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τη C_f εκτός του σημείου επαφής.

Ε. Έστω το χωρίο Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{1}{2}$ και $x = \frac{1}{2}$.

E.1 Να δειχθεί ότι $f(-x) + f(x) = 2f(0)$, για κάθε $x \in R$.

E.2 Αν $f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0$ τότε να δειχθεί ότι $E(\Omega) = f(0)$.



Θέμα 19°

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

Α.1 Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

Α.2 Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - x^e$, με $D_g = [0, +\infty)$.

Β.1 Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β.2 Να βρεθεί το σύνολο τιμών της g

Γ. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = \ln \left[(f(x))^e + e - 1 \right]$ έχει μοναδική λύση.



Θέμα 20°

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή
- $g(x) = f(x) \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Η γραφική παράσταση της g έχει καμπή στο $x = \frac{\pi}{2}$

A. Ναδειχθεί ότι η f έχει ελάχιστο.

B. Αν η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη C_f στο $x = \pi$, τότε:

B.1 να βρεθούν τα $f(\pi)$ και $f'(\pi)$

B.2 ναδειχθεί ότι $f(0) + f(2\pi) > 2\pi$

B.3 ναδειχθεί ότι $f(x+2) - f(x) > 2$, για κάθε $x > \pi$

Γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx > \frac{\pi}{2} + 1$$