

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΩΣΤΟΥ-ΛΑΘΟΥΣ ΜΕ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

1) Αν για δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω οι συναρτήσεις: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$

Για τις συναρτήσεις αυτές ισχύει ο ισχυρισμός $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά δεν ισχύει το συμπέρασμα γιατί καμία από αυτές δεν είναι μηδενική συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της.

.....

2) Αν f, g δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ τότε ισχύει πάντα η ισότητα: $f \circ g = g \circ f$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω οι συναρτήσεις $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ και $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sqrt{x}$

Τότε $D_{f \circ g} = \{x \in [0, +\infty) / g(x) \in (0, +\infty)\} = \{x \in [0, +\infty) / \sqrt{x} > 0\} = (0, +\infty)$ και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(\sqrt{x})$$

$$\begin{aligned} D_{g \circ f} &= \{x \in (0, +\infty) / f(x) \in [0, +\infty)\} = \{x \in (0, +\infty) / \ln x \geq 0\} \\ &= \{x \in (0, +\infty) : x \geq 1\} = [1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\text{Και } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\ln x} \quad \text{Άρα } f \circ g \neq g \circ f$$

.....

3) Στην ερώτηση «Πότε δύο συναρτήσεις ονομάζονται ίσες», η απάντηση ενός μαθητή ήταν:

«Δύο συναρτήσεις ονομάζονται ίσες αν έχουν ίσα πεδία ορισμού και τον ίδιο τύπο»

Εξετάστε αν η απάντηση του μαθητή είναι ΣΩΣΤΗ ή ΛΑΘΟΣ.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Η απάντηση είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$ Οι συναρτήσεις αυτές

έχουν και οι δύο πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$ και μοιάζουν να έχουν τον ίδιο τύπο αλλά δεν είναι ίσες αφού η εικόνα του 2 μέσω της f είναι $f(2) = 0$ ενώ $g(2) = 4$ άρα δεν είναι ίσες.

.....

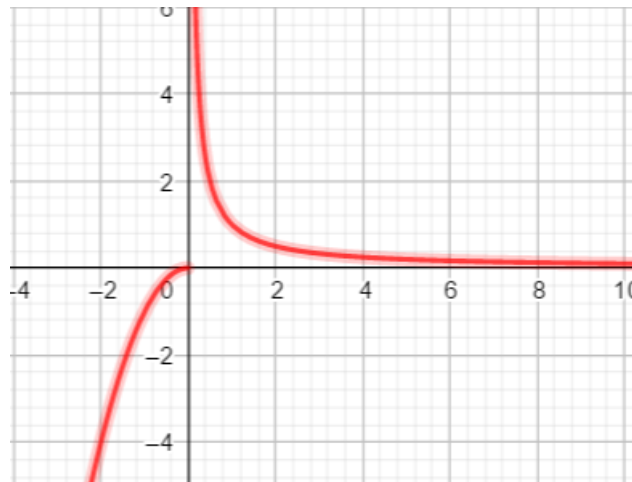
4) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ είναι «1 – 1» τότε είναι γνησίως μονότονη.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Η συνάρτηση της οποίας το γράφημα φαίνεται δίπλα έχει τύπο : $f(x) =$

$$\begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι «1 – 1» αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη αφού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.



5) Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ τότε η μία συνάρτηση είναι αντίστροφη της άλλης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΣΩΣΤΟΣ γιατί :

Έστω $x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2$ και τα σημεία $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f τότε τα σημεία $A'(y_1, x_1), B'(y_2, x_2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g αφού είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία $y = x$.

Θα δείξω ότι η f είναι «1 – 1» .

Έστω ότι για $x_1, x_2 \in D_f, x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ δηλαδή $y_1 = y_2$ τότε για τα σημεία της $C_g, A'(y_1, x_1), B'(y_2, x_2)$ θα ισχύει $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(y_1) \neq g(y_2)$ άτοπο γιατί η g είναι συνάρτηση. Άρα η f είναι «1 – 1» άρα αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$ άρα ισχύει $g = f^{-1}$

6) Αν για τις συναρτήσεις $f: D_f \mapsto R, g: D_g \mapsto R$ ισχύει $f \neq g$ τότε ισχύει

$$f(x) \neq g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

$$\text{Έστω οι συναρτήσεις : } f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0 \\ 3, & 0 < x < 5 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 5 \\ 2x, & x \geq 5 \end{cases}$$

Οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι ίσες αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού αλλά ισχύει ότι : $f(x) = g(x) \quad \forall x \in (0, 5)$.

7) Αν οι συναρτήσεις : $f: A \mapsto R, g: A \mapsto R$ είναι «1 – 1» τότε και η συνάρτηση

$f + g: A \rightarrow R$ θα είναι «1 – 1»

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω οι συναρτήσεις $f: R \mapsto R, g: R \mapsto R$ με τύπους $f(x) = 2x$ και $g(x) = -2x + 1$ οι οποίες είναι «1 – 1» ενώ η συνάρτηση $f + g: R \rightarrow R$ με τύπο:

$(f + g)(x) = 2x - 2x + 1 = 1$ δεν είναι «1 – 1»

.....

8) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ με $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω οι συναρτήσεις $f: R^* \mapsto R, g: R^* \mapsto R$ με τύπους $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = \frac{1}{x^4}$.

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) =$

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 1}{x^4} \right) = +\infty$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = 0$ με $x^4 \geq 0 \quad \forall x \in R$

.....

9) Αν για τις συναρτήσεις $f: D_f \mapsto R, g: D_g \mapsto R$ υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ με $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$ τότε υπάρχει και καθένα από τα όρια: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\mu x}{x} = 1$ με $f(x) = n\mu x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$.

Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

.....

10) Αν για τις συναρτήσεις $f: D_f \mapsto R, g: D_g \mapsto R$ υπάρχουν τα όρια:

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \kappa$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mu$ με $\kappa, \mu \in R$ τότε υπάρχει και το όριο

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ με $x_0 \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΣΩΣΤΟΣ γιατί :

Μπορούμε να γράψουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(f(x) + g(x)) - g(x)] =$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \kappa - \mu$ (Αφού τα όρια υπάρχουν, οι ιδιότητες ισχύουν)

11) Αν οι συναρτήσεις $f: A \mapsto R, g: A \mapsto R$ δεν είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$ τότε και η συνάρτηση $f + g$ δεν είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: R \mapsto R$ με τύπους $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$

και $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$ Οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι συνεχείς στο 0 γιατί

ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ άρα δεν υπάρχει το όριο.

Και $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$ άρα δεν υπάρχει το όριο.

Η συνάρτηση $f + g$ είναι η συνάρτηση με τύπο : $(f + g)(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ 2x^3, & x > 0 \end{cases}$

είναι συνεχής στο 0 γιατί ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2x^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^3 = (f + g)(0) = 0$

.....

12) Η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow R$ είναι συνεχής στο (a, β) και ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ άρα δεν ισχύει το θεώρημα **Bolzano**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & 1 < x \leq 3 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$ Η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $[1, 3]$

αφού δεν είναι συνεχής στο 1 (;), ισχύει ότι $f(1) \cdot f(3) < 0$ αλλά δεν υπάρχει ρίζα της συνάρτησης στο διάστημα $(1, 3)$ αφού $x^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x \in R$.

.....

13) Η συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow R$ είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και ισχύουν : $f(a) > 0$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε υποχρεωτικά θα ισχύει $f(\beta) < 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω η συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow R$ με $f(x) = x^2 - 4x + 4$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 3]$ ισχύει $f(1) = 1 > 0$, $f(2) = 0$ αλλά $f(3) = 1 > 0$

14) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η γραφική της παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x τότε η f διατηρεί το πρόσημό της στο A

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και διαφορετική του 0 για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}^*$ αλλά δεν διατηρεί το πρόσημό της αφού ισχύει $f(-2) < 0$, $f(2) > 0$.

.....

15) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 (γιατί;) αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

.....

16) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f'(x) = 0 \quad \forall x \in A$ τότε η f είναι σταθερή στο σύνολο A .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 4, & x > 0 \end{cases}$ Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$ αλλά δεν είναι σταθερή αφού $f(-3) = -2$ ενώ $f(2) = 4$.

.....

ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής ισχύουν μόνο αν η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων.

17) Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow R$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και $f'(x) < 0 \quad \forall x \in A$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Έστω η συνάρτηση $f: R^* \rightarrow R$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in R^*$ Όμως η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο R^* γιατί $-2 < 2 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ Η f είναι φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$

.....

18) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό $x \in \Delta$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Η συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in R$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R

Είναι γνησίως αύξουσα στο R αφού για κάθε $x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

Αλλά $f'(x) = 3x^2 \geq 0$

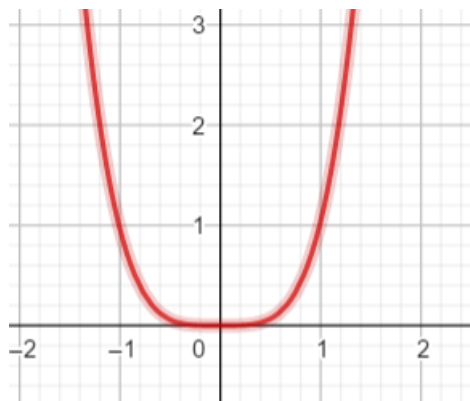
.....

19) Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και είναι κυρτή στο Δ τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό $x \in \Delta$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Η συνάρτηση $f(x) = x^4, x \in R$ είναι συνεχής, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και όπως φαίνεται στο σχήμα είναι κυρτή.

Αλλά $f''(x) = 4x^2 \geq 0$



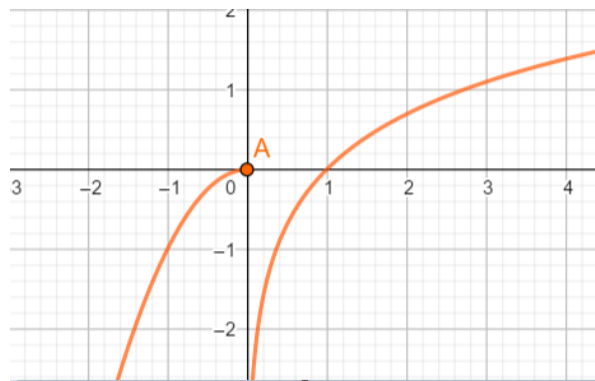
20) Αν η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$
 έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ γιατί ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

Το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.



21) Το ολοκλήρωμα: $\int_a^b c \, dx$, $c \in \mathbb{R}^*$ $a < b$ εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με βάση $b - a$ και ύψος c .

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Ο ισχυρισμός είναι ΛΑΘΟΣ γιατί :

Αν $c = -4$ τότε $\int_2^5 -4 \, dx = -4(5 - 2) = -12$. Το εμβαδόν είναι θετική ποσότητα και ίση με 12.