ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ 2014
ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο : (6ο – 2014):

Δίνονται οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις $f, g : R \to R$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(R) = R$
- $\left(f^{-1}(2) - 3\right)^2 + \left(f(2) - 3\right)^2 = 0$
- $g(x) = f\left(2x - f(x)\right) - x$, **για κάθε** $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως φθίνουσες.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow g(x) = 0, \ x \in R$$

γ) Αν επιπλέον η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 4)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοια, ώστε $3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\left(f^{-1}(2) - 3\right)^2 + \left(f(2) - 3\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

- Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, επομένως ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα.

  Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

  $$2 < 3 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(2) < f(3) \Rightarrow 3 < 2$$

  που είναι άτοπο. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

- Για τυχαία $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$

  Είναι:

  $$\begin{cases} x_1 < x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 < 2x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2) \overset{f\downarrow}{\Rightarrow}$$

  $$\Rightarrow f\left(2x_1 - f(x_1)\right) > f\left(2x_2 - f(x_2)\right)$$

Είναι:

$$\begin{cases} f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)) \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(2x_1 - f(x_1)) - x_1 > f(2x_2 - f(x_2)) - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow f(2x - f(x)) = x \Leftrightarrow f(2x - f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[1, 4]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_1 \in (1, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{3} \Rightarrow 3f'(\xi_1) = f(4) - f(1) \quad (2)$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = f(2x - f(x)) - x$$

Η συνάρτηση $2x - f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση $f(2x - f(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο R, ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[2, 3]$, οπότε θα υπάρχει $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi_2) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} \Rightarrow g'(\xi_2) = g(3) - g(2) \quad (3)$$

Για $x=2$ είναι $g(2) = f(2\cdot 2 - f(2)) - 2 = f(4-3) - 2 = f(1) - 2$, οπότε $f(1) - g(2) = 2 \quad (4)$

Για $x=3$ είναι $g(3) = f(2\cdot 3 - f(3)) - 3 = f(6-2) - 3 = f(4) - 3$, οπότε $f(4) - g(3) = 3 \quad (5)$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = (f(4) - f(1)) - (g(3) - g(2)) \Rightarrow$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = (f(4) - g(3)) - (f(1) - g(2)) \overset{(4),(5)}{\Rightarrow}$$

$$3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) = 3 - 2 \Rightarrow 3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$$

ΘΕΜΑ 2ο : (8ο – 2014):

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x) - 2x^5 + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R^*$ είναι $f(x) > 2x^3 - 1$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = f(x) + \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την F^{-1}

ΛΥΣΗ

α) Για $x \neq 0$ είναι:

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x = 0$ έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}(2x^3) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2 = 0-1 = -1$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ -1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

β)
- Από υπόθεση η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0, \pi]$
- $f(0)\cdot f(\pi) = (-1)\cdot(2\pi^3) = -2\pi^3 < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, \pi]$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$, δηλαδή μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x^3 + 1$, $x \in R^*$, τότε:

$$h(x) = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} - 2x^3 + 1 = 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2}$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$|\eta\mu x| \le |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \le x^2 \Leftrightarrow 0 \le x^2 - \eta\mu^2 x$$

και η ισότητα ισχύει μόνον για $x = 0$

Η συνάρτηση h όμως έχει πεδίο ορισμού το R^*, επομένως $x^2 - \eta\mu^2 x > 0$, άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$, δηλαδή $f(x) - 2x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x^3 - 1$ για κάθε $x \in R^*$

δ) Η συνάρτηση f ορίζεται στο R και η συνάρτηση $\dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}$ ορίζεται στο R^*, επομένως η συνάρτηση F ορίζεται στο R^*

Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$F(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3$$

Έστω $x_1, x_2 \in R^*$ με $F(x_1) = F(x_2)$, τότε έχουμε:

$$2x_1^3 = 2x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η F είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της F^{-1} λύνουμε την $y = F(x)$ ως προς x στο R^*

Είναι:

$$\begin{cases} y = F(x) \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{y}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}} & , y>0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}} & , y<0 \end{cases} \Leftrightarrow F^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}} & , y>0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}} & , y<0 \end{cases}$$

Άρα $F^{-1}: R^* \to R$ με $F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{2}} & , x>0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x}{2}} & , x<0 \end{cases}$

ΘΕΜΑ 3ο : (9ο – 2014):

Έστω συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$ (1) για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι:

α) $0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in R$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0

γ) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x \geq 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$f^3(x) + f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x) + 1\right) \geq 0$$

που σημαίνει ότι:

$$f(x) \geq 0 \qquad (2)$$

οπότε από (1) προκύπτει ότι:

$$f^3(x) \leq f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3 \Rightarrow$$

$$f^3(x) \leq (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$$

Άρα

$$f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι:

$$0 \le f(x) \le x^2 - \eta\mu^2 x \quad (4)$$

β) Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$0 \le f(0) \le 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (5)$$

Επίσης είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ και
- $\lim\limits_{x \to 0}\left(x^2 - \eta\mu^2 x\right) = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \quad (6)$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0

γ) Από τη σχέση (4) για $x \in R^*$ έχουμε:

$$0 \le \frac{f(x)}{x^2} \le 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Επίσης είναι:

- $\lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$ και
- $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \dfrac{\eta\mu^2 x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x \to 0}\left[1 - \left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\right] = 1 - 1^2 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$

ΘΕΜΑ 4ο : (10ο – 2014):

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\left[0, 8\right] \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x + 2 \quad (1)$ για κάθε $x \in \left[0, 8\right]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) $f\left(\dfrac{23}{8}\right) = \dfrac{3}{2}$

γ) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

δ) Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του .

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος:

Έστω $x_1, x_2 \in [0\,,8]$ με $x_1 < x_2$, τότε $x_1 - x_2 < 0$

Είναι:

$$f^3(x_1) + f(x_1) = x_1 + 2$$

$$f^3(x_2) + f(x_2) = x_2 + 2$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$f^3(x_1) - f^3(x_2) + f(x_1) - f(x_2) = x_1 + 2 - x_2 - 2 \Rightarrow$$

$$\left(f(x_1) - f(x_2)\right)\cdot\left(f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)\right) + f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 \Rightarrow$$

$$\left(f(x_1) - f(x_2)\right)\cdot\left(\underbrace{f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1}_{>0}\right) = \underbrace{x_1 - x_2}_{<0} \Rightarrow$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος:

Έστω ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in [0\,,8]$ με

$x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \ge f(x_2)$, άρα και $f^3(x_1) \ge f^3(x_2)$, οπότε

$$f^3(x_1) + f(x_1) \ge f^3(x_2) + f(x_2) \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} x_1 + 2 \ge x_2 + 2 \Rightarrow x_1 \ge x_2,$$

που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = [0\,,8]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι $f(\Delta) = [f(0)\,,\ f(8)]$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις τιμές $f(0)$ και $f(8)$

Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^3(0) + f(0) = 2 \Leftrightarrow f^3(0) + f(0) - 2 = 0 \quad (2)$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**1**	**–2**	**1**
///	**1**	**1**	**2**	
1	**1**	**2**	**0**	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(0)-1\right)\underbrace{\left(f^2(0)+f(0)+2\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(0)=1$$

Για $x = 8$ από τη σχέση (1) έχουμε $f^3(8) + f(8) = 10 \Leftrightarrow f^3(8) + f(8) - 10 = 0 \quad (3)$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	**0**	**1**	**–10**	**2**
///	**2**	**4**	**10**	
1	**2**	**5**	**0**	

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$\left(f(8)-2\right)\underbrace{\left(f^2(8)+2f(8)+5\right)}_{\neq 0}=0 \Leftrightarrow f(8)=2$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f(\Delta) = [1\,,\ 2]$$

β) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[0, 8]$ και $1=f(0)\neq f(8)=2$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)=1$ και $f(8)=2$, δηλαδή θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0, 8)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=\frac{3}{2}$

Για $x=x_o$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(x_o)+f(x_o)=x_o+2\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}=x_o+2\Rightarrow$$

$$\frac{27}{8}+\frac{3}{2}=x_o+2\Rightarrow x_o=\frac{27}{8}+\frac{12}{8}-\frac{16}{8}\Rightarrow x_o=\frac{23}{8}$$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 8]$, άρα είναι και « $1-1$ » στο διάστημα αυτό, οπότε αντιστρέφεται. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση f^{-1}, η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης f, δηλαδή $A_{f^{-1}}=[1, 2]$

Επίσης για κάθε $x\in[0, 8]$ έχουμε:

$$f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^3+y=f^{-1}(y)+2\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+y-2,\quad y\in[1, 2]$$

Επομένως:

$$f^{-1}:[1, 2]\to R \quad \text{με} \quad f^{-1}(x)=x^3+x-2$$

δ) Για να βρούμε το κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ λύνουμε το σύστημα:

$$(\Sigma):\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f^{-1}(y)=f^{-1}\left(f(x)\right) \\ y=f^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y=f^{-1}(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y^3+y-2=x \\ x^3+x-2=y\end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$y^3-x^3+y-x=x-y\Leftrightarrow y^3-x^3+2(y-x)=0\Leftrightarrow$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2)+2(y-x)=0\Leftrightarrow$$

$$(y-x)(\underbrace{y^2+xy+x^2+2}_{>0})=0\Leftrightarrow$$

$$y-x=0\Leftrightarrow y=x$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$(\Sigma):\begin{cases} y=x \\ x^3+x-2=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x \\ x^3+x-2=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=x \\ x^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=\sqrt[3]{2} \\ x=\sqrt[3]{2}\end{cases}\Leftrightarrow (x, y)=(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$$

Άρα οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $\left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$

ΘΕΜΑ 5ο : (14ο – 2014):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ **για κάθε** $x \in R$
- $f'(x) = \dfrac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)}$ **για κάθε** $x \in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in R$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \in R^*$

γ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\dfrac{e^\alpha+2e^\beta}{3}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta \in R$ με $\alpha<\beta$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την παραβολή $y=x^2+1$ και την ευθεία $x=1$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \frac{\left(1+e^x\right)\cdot f(x)}{1+f(x)} \Leftrightarrow f'(x)\left(1+f(x)\right) = \left(1+e^x\right)f(x) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(x)f(x)}{f(x)} = 1+e^x \Leftrightarrow \left(\ln f(x) + f(x)\right)' = \left(x+e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x + c, \quad c \in R$$

Για $x=0$ έχουμε :

$$\ln f(0) + f(0) = 0 + e^0 + c \Leftrightarrow \ln 1 + 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x\cdot 1 + e^x \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x\ln e + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = \ln e^x + e^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) + \ln f(x) = e^x + \ln e^x, \quad x \in R \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h με $h(t) = t + \ln t$, $t>0$, που είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$h'(t) = 1 + \dfrac{1}{t} > 0$, άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε είναι και «$1-1$»

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$h\left(f(x)\right) = h(e^x) \overset{h:1\text{-}1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x, \quad x \in R$$

β) Είναι:

$$g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = xe^{\frac{1}{x}},\ \ x \in R^*$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{1} = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

Επίσης $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1 = \lambda$ και

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[g(x) - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u\to 0}\frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{e^u - e^0}{u - 0} = \left.\frac{de^u}{du}\right|_{u=0} = e^0 = 1 = \beta$$

Άρα η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$ και στο $+\infty$

γ) Είναι:

$$\alpha < \frac{\alpha + 2\beta}{3} < \beta \Leftrightarrow 3\alpha < \alpha + 2\beta < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha < \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta < 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha < 2\beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < \beta \ \text{ που ισχύει.}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[\alpha, \beta]$ με $f'(x) = e^x$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+2\beta}{3}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+2\beta}{3}, \beta\right]$, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)$ τέτοιο, ώστε $\displaystyle f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+2\beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}}$

- $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε $\displaystyle f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{\alpha+2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}}$

Για κάθε $x \in R$ έχουμε $f''(x) = e^x > 0$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha) < 2\left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)\right] \Rightarrow 3f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < f(\alpha) + 2f(\beta) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < \frac{f(\alpha)+2f(\beta)}{3} \Rightarrow e^{\frac{\alpha+2\beta}{3}} < \frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3} \Rightarrow \frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3}\right)$$

δ) Σχηματίζουμε τη διαφορά $\Delta(x) = e^x - x^2 - 1,\ x \in R$

Η συνάρτηση Δ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\Delta'(x) = e^x - 2x\,,\ x \in R$

Επίσης $\Delta''(x) = e^x - 2\,,\ \ x \in R$

Παρατηρούμε ότι $\Delta''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	ln2	$+\infty$
$\Delta''(x)$	-	0	+
$\Delta'(x)$	↘		↗
		Ελάχιστο	

$$\Delta'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0 \ (\text{εφόσον } e > 2 \overset{\ln x \uparrow}{\Rightarrow} \ln e > \ln 2 \Rightarrow 1 > \ln 2)$$

Άρα $\Delta'(x) \ge \Delta'(\ln 2) > 0 \Rightarrow \Delta'(x) > 0\,,\ x \in R$, οπότε η συνάρτηση Δ είναι γνησίως αύξουσα στο R. Είναι $\Delta(0) = e^0 - 0^2 - 1 = 0$. Άρα η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\Delta(x) = 0$ και ισχύει:

$$\Delta([0,1]) = [\Delta(0)\,,\Delta(1)] = [0\,, e-2]\ ,\ \text{άρα } \Delta(x) \ge 0 \text{ για κάθε } x \in [0\,,1]$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$E = \int_0^1 |\Delta(x)|dx \overset{\Delta(x)\ge 0}{=} \int_0^1 \left(e^x - x^2 - 1\right)dx = \left[e^x - \frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 =$$

$$= e - \frac{1}{3} - 1 - \left(e^0 - 0\right) = e - \frac{1}{3} - 2 = e - \frac{7}{3} \ \ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 6ο : (15ο – 2014):

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}=4$ και οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $g, h:R\to R$ με $g'(x)=f(x)$ και $h(x)=g(x+1)-g(x)$ για κάθε $x\in R$

Αν $g(1)=\frac{4}{3}$ και $g(2)=\frac{14}{3}$, να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=2$

β) $f(x)>0$, για κάθε $x\in R$

γ) Υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=3$

δ) Υπάρχουν $\theta_1,\theta_2\in(1,2)$ τέτοια, ώστε $\frac{f(\theta_1)+f(\theta_2)}{f(\theta_1)\cdot f(\theta_2)}=\frac{3}{5}$

ε) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho+1)-f(\rho)=2$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $\varphi(x)=\frac{f(x)\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ για x κοντά στο 1, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=4$

Για x κοντά στο 1 έχουμε:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)(\sqrt{x}-1)}{\eta\mu(x-1)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\varphi(x)(x-1)}{\eta\mu(x-1)(\sqrt{x}+1)}\Leftrightarrow f(x)=\varphi(x)\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}\overset{x-1=u}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

οπότε

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\left[\varphi(x)\cdot\frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]=4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=2$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$ ισχύει $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και για κάθε $x\in R$ είναι $f(x)\neq 0$, οπότε η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο στο R. Επειδή $f(1)=2>0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

γ) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα είναι και συνεχής στο R

Επίσης είναι:

$$g'(x) = f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R

Έχουμε:

- η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 2]$
- $g(1) \neq g(2)$
- $3 \in (g(1), g(2)) = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{14}{3}\right)$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, επομένως θα υπάρχει $\xi \in (1,2)$, το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα τέτοιο, ώστε $g(\xi) = 3$

δ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και σε καθένα από τα διαστήματα $[1, \xi]$ και $[\xi, 2]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\theta_1 \in (1, \xi)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\xi) - g(1)}{\xi - 1} \Rightarrow f(\theta_1) = \frac{3 - \frac{4}{3}}{\xi - 1} \Rightarrow \xi - 1 = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)} \qquad (1) \quad \text{και}$$

- $\theta_2 \in (\xi, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\theta_2) = \frac{g(2) - g(\xi)}{2 - \xi} \Rightarrow f(\theta_2) = \frac{\frac{14}{3} - 3}{2 - \xi} \Rightarrow 2 - \xi = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)} \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$1 = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)} + \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{f(\theta_1)} + \frac{1}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{f(\theta_1) f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$$

ε) Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[0, 1]$ με

$$h'(x) = \left(g(x+1) - g(x)\right)' = g'(x+1)(x+1)' - g'(x) =$$
$$= g'(x+1) - g'(x) = f(x+1) - f(x)$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\rho) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} \Rightarrow f(\rho + 1) - f(\rho) = h(1) - h(0)$$

Όμως:

$$h(1)=g(2)-g(1)=\frac{14}{3}-\frac{4}{3}=\frac{10}{3} \quad \text{και}$$

$$h(0)=g(1)-g(0)=\frac{4}{3}-0=\frac{4}{3}$$

Οπότε:

$$f(\rho+1)-f(\rho)=\frac{10}{3}-\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2$$

ΘΕΜΑ 7ο : (16ο – 2014):

Έστω $f:[0,1]\to R$ μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $\mathbf{f'(0)=f'(1)=0}$
- $\mathbf{f(0)=0}$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2+x$

α) Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στα σημεία της με τετμημένες $x_1=0$ και $x_2=1$ τέμνονται στο σημείο με τετμημένη $x_3=\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $g(1)=0$

ii) Υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $g'(\xi)+2\xi=1$

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1-x)f'(x)dx$

ii) Υπάρχει $x_o\in[0,1]$, ώστε $f'(x_o)=2\int_0^1 f(x)dx$

ΛΥΣΗ

α) i) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x+1$, οπότε

$$g'(0)=f'(0)+1=1 \quad \text{και} \quad g'(1)=f'(1)-1=-1$$

Επίσης:

$$g(0)=f(0)=0 \quad \text{και} \quad g(1)=f(1) \quad (1)$$

οπότε οι εφαπτόμενες της C_g στα σημεία $A(0,g(0))$ και $B(1,g(1))$ έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$$\varepsilon_A:\ y-g(0)=g'(0)(x-0)\Rightarrow y=x \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_B:\ y-g(1)=g'(1)(x-1)\Rightarrow y-f(1)=-1(x-1)\Rightarrow y=-x+1+f(1)$$

Το σημείο $M\left(\frac{1}{2}, y_o\right)$ είναι το σημείο τομής των εφαπτόμενων ε_A και ε_B, οπότε έχουμε:

$$y_o = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y_o = -\frac{1}{2} + 1 + f(1)$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} g(1) = 0$$

ii) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f'(x) = g'(x) + 2x - 1$

Είναι $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$, οπότε $f(0) = f(1)$, δηλαδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

Επομένως θα υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$

Επιπλέον

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi - 1 = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi = 1 \quad (2)$$

β) i) Είναι:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x-1)' f(x)\,dx = \left[(x-1)f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x)\,dx \overset{f(0)=0}{=} \int_0^1 (1-x)f'(x)\,dx \quad (6)$$

ii) Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ ως παραγωγίσιμη, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Αν m, M είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο $[0,1]$, τότε έχουμε:

$$m \le f'(x) \le M$$

Επειδή $1 - x \ge 0$ έχουμε:

$$(1-x)m \le (1-x)f'(x) \le (1-x)M \Rightarrow$$

$$m\int_0^1 (1-x)\,dx \le \int_0^1 (1-x)f'(x)dx \le M\int_0^1 (1-x)\,dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}m \le \int_0^1 (1-x)f'(x)\,dx \le \frac{1}{2}M \overset{(6)}{\Rightarrow} m \le 2\int_0^1 f(x)\,dx \le M$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $2\int_0^1 f(x)dx$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f', άρα υπάρχει $x_o \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o) = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

ΘΕΜΑ 8ο : (17ο – 2014):

Έστω $f:R\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f'(x)+1=2x\big(f(x)+x\big)$ για κάθε $x\in R$**
- **$f(0)=1$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x$, $x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{x^2-1}\geq 2x-1$ για κάθε $x\in R$

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την εξίσωση $e^{x^4-x^2}=\dfrac{1}{x}$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:R\to R$ με $g(1)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$g'(x)=f(x)+f(2-x) \text{ για κάθε } x\in R$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f'(x)+1=2x\big(f(x)+x\big)\Rightarrow f'(x)-2xf(x)=-1+2x^2\overset{\cdot e^{-x^2}}{\Rightarrow}$$

$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x)f(x)=-e^{-x^2}+2x^2e^{-x^2}\Rightarrow$$

$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-2x)f(x)=(-x)'e^{-x^2}+(-x)e^{-x^2}(-2x)\Rightarrow$$

$$f'(x)e^{-x^2}+e^{-x^2}(-x^2)'f(x)=(-x)'e^{-x^2}+(-x)e^{-x^2}(-x^2)'\Rightarrow$$

$$\left(f(x)e^{-x^2}\right)'=\left(-xe^{-x^2}\right)'\Rightarrow f(x)e^{-x^2}=-xe^{-x^2}+c$$

και $f(0)=1$, οπότε $c=1$

Άρα:

$$f(x)e^{-x^2}=-xe^{-x^2}+1$$

Επομένως:

$$f(x)=e^{x^2}-x,\ x\in R$$

β) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=2xe^{x^2}-1 \quad\text{και}\quad f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}=2(2x^2+1)e^{x^2}$$

Για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$f''(x)=2(2x^2+1)e^{x^2}>0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

γ) Είναι:

$$f(1)=e-1 \quad \text{και} \quad f'(1)=2e-1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=1$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-(e-1)=(2e-1)(x-1)\Rightarrow y=(2e-1)x-e$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R, η εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=1$ βρίσκεται από την C_f και κάτω.

Άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$f(x)\geq(2e-1)x-e \Rightarrow e^{x^2}-x\geq 2ex-x-e \Rightarrow$$

$$e^{x^2}\geq(2x-1)e \Rightarrow \frac{e^{x^2}}{e}\geq 2x-1\Rightarrow e^{x^2-1}\geq 2x-1$$

δ) 1ος τρόπος:

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$e^{x^4-x^2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}}=\frac{x}{x^2}\Leftrightarrow x^2e^{x^4}=xe^{x^2}\Leftrightarrow$$

$$2x^2e^{x^4}=2xe^{x^2}\Leftrightarrow 2x^2e^{x^4}-1=2xe^{x^2}-1\Leftrightarrow f'(x^2)=f'(x) \quad (1)$$

Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1 – 1», οπότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$x^2=x\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=1$$

2ος τρόπος:

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ έχουμε:

$$e^{x^4-x^2}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x\left(e^{x^4-x^2}\right)=1 \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=x\left(e^{x^4-x^2}\right),\ x\in(0,+\infty)$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$\varphi'(x)=(x)'\left(e^{x^4-x^2}\right)+x\left(e^{x^4-x^2}\right)'=$$

$$=e^{x^4-x^2}+xe^{x^4-x^2}\left(x^4-x^2\right)'=$$

$$=e^{x^4-x^2}+xe^{x^4-x^2}\left(4x^3-2x\right)'=$$

$$=e^{x^4-x^2}\left(4x^4-2x^2+1\right)=e^{x^4-x^2}\left[3x^4+\left(x^2-1\right)^2\right]>0$$

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι και «1 – 1», επομένως από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\varphi(x)=\varphi(1)\overset{\varphi:1-1}{\Leftrightarrow}x=1$$

ε) i) Η συνάρτηση g΄ είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g''(x) = f'(x) - f'(2-x)$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο R έχουμε:

- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(2-x) \Leftrightarrow x > 2-x \Leftrightarrow x > 1$
- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(2-x) \Leftrightarrow x < 2-x \Leftrightarrow x < 1$
- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$, κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$. Το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης g είναι το $M\big(1,\ g(1)\big)$, δηλαδή το $M\big(1,\ 0\big)$, αφού $g(1) = 0$

ΘΕΜΑ 9ο : (18ο – 2014):

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0) = 2$, η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{F(x) - x} + 1$, όπου F είναι μία αρχική συνάρτηση της f στο R

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

β) Αν $f(x) = e^x + 1$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{f(x)}dx$

ii) Να βρείτε το $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(\varepsilon\varphi x) - f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}$

iii) Αν μια συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$, ώστε

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx = h(\xi)\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{F(x)-x} + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = \frac{e^{2x}}{F(x)-x} \Leftrightarrow$$

$$(F(x)-x)(f(x)-1) = e^{2x} \Leftrightarrow (F(x)-x)(F(x)-x)' = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$2(F(x)-x)(F(x)-x)' = 2e^{2x} \Leftrightarrow \left[(F(x)-x)^2\right]' = \left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$(F(x)-x)^2 = e^{2x} + c \qquad (2)$$

Για $x = 0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(0) = \frac{e^0}{F(0)-0} + 1 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{F(0)} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{F(0)} = 1 \Leftrightarrow F(0) = 1$$

Για $x=0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$(F(0)-0)^2 = e^0 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Για $c=0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$(F(x)-x)^2 = e^{2x}, \quad x \in R$$

Επομένως:

$$\varphi^2(x) = e^{2x}, \quad x \in R \qquad (3)$$

όπου $\varphi(x) = F(x) - x$, $x \in R$ (4)

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\varphi^2(x) = e^{2x} > 0, \quad x \in R$$

Οπότε ισχύει:

$$\varphi(x) \neq 0, \quad x \in R$$

Η συνάρτηση φ δε μηδενίζεται και είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο R, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R

Για $x=0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\varphi(0) = F(0) - 0 = F(0) = 1 > 0$$

Άρα

$$\varphi(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in R$$

Οπότε από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\varphi(x) = e^x \overset{(4)}{\Leftrightarrow} F(x) - x = e^x \Leftrightarrow F(x) = e^x + x, \quad x \in R$$

Επειδή η F είναι μία αρχική συνάρτηση της f στο R, ισχύει:

$$f(x) = F'(x) = (e^x + x)' = e^x + 1, \quad x \in R$$

Επομένως:

$$f(x) = e^x + 1, \quad x \in R$$

β) i) Έχουμε:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{f(x)}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{e^x+1}dx$$

Αν θέσουμε $x = -u$ τότε, έχουμε $dx = -du$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ και

$$I = -\int_{1}^{-1} \frac{x^2+1}{e^{-x}+1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x^2+1)e^x}{e^x+1}dx$$

οπότε

$$2I = \int_{-1}^{1} \frac{(x^2+1)(e^x+1)}{e^x+1}dx = \int_{-1}^{1}(x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Άρα

$$I=\frac{4}{3}$$

ii) Είναι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\varepsilon\varphi x)-f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x}-e^{\eta\mu x}}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\eta\mu x}(e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1)}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}=1$$

διότι:

$$\lim_{x\to 0}e^{\eta\mu x}=1 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}-1}{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}(\varepsilon\varphi x-\eta\mu x)'}{(\varepsilon\varphi x-\eta\mu x)'}=1$$

iii) Η συνάρτηση h, ως συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ λαμβάνει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m. Επίσης $f(\sqrt{x})>0$, οπότε έχουμε:

$$m\le h(x)\le M\Rightarrow m f(\sqrt{x})\le h(x)f(\sqrt{x})\le Mf(\sqrt{x})\Rightarrow$$

$$m\int_0^1 f(\sqrt{x})dx\le\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx\le M\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

Επομένως, ο αριθμός

$$\frac{\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x})dx}$$

ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης h.

Άρα υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο, ώστε

$$h(\xi)=\frac{\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x})dx}\Rightarrow$$

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx=h(\xi)\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

που είναι το ζητούμενο.

ΘΕΜΑ 10ο : (19ο – 2014):

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x+2)-5}{x-1}=6$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $f(3)=5$ και ii) $f'(3)=6$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2-f(x)}{ημ(x-3)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=xf(x)-3x-7συνx$, $x\in R$, τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g : R \to R$, για την οποία ισχύει $g'(x)\le f'(3)$, για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x)=x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

ΛΥΣΗ

α) i) Για $x\neq 1$, θέτουμε $w(x)=\dfrac{f(x+2)-5}{x-1}$

Είναι:

$$\lim_{x\to 1} w(x)=6 \quad και \quad f(x+2)=(x-1)\,w(x)+5$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 1} f(x+2)=\lim_{x\to 1}\left[(x-1)w(x)+5\right]=5$$

Η συνάρτηση $f(x+2)$ είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 1} f(x+2)=f(1+2)=f(3)$$

οπότε:

$$f(3)=5$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι για x κοντά στο $x_o=3$ είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=6$$

Αν θέσουμε $x=u+2$ τότε όταν $x\to 3$ το $u\to 1$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{u\to 1}\frac{f(u+2)-f(3)}{u-1}=\lim_{u\to 1}\frac{f(u+2)-5}{u-1}=6$$

Επομένως:

$$f'(3)=6$$

β) Για x κοντά στο $x_o=3$ είναι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+2-f(x)}{ημ(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x+2-f(x)}{x-3}}{\dfrac{ημ(x-3)}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x+2-f(x)-5+5}{x-3}}{\dfrac{ημ(x-3)}{x-3}}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x-3-\left(f(x)-5\right)}{x-3}}{\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{\dfrac{x-3-\left(f(x)-f(3)\right)}{x-3}}{\dfrac{\eta\mu(x-3)}{x-3}}=\frac{1-f'(3)}{1}=1-6=-5 \text{ , γιατί}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}\overset{x-3=u}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$$

Σχόλιο: Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L' Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,3)\cup(3,\beta)$

γ) Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0,3]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης ισχύουν:

- $h(0)=-7<0$ και
- $h(3)=3f(3)-9-7\sigma\upsilon\nu 3=15-9-7\sigma\upsilon\nu 3=6-7\sigma\upsilon\nu 3>0$,

αφού $\dfrac{\pi}{2}<3<\pi$ και στο 2^{o} τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως $h(0)\cdot h(3)<0$

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,3]$, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,3)$, δηλαδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ) Έστω ότι η εξίσωση $g(x)=x^6$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις x_1 και x_2 με $1<x_1<x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-x^6$, $x\in[x_1,x_2]$. Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με παράγωγο $\varphi'(x)=g'(x)-6x^5$ και ισχύει $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$

Άρα η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=0$

Είναι:

$$\varphi'(\xi)=0\Leftrightarrow g'(\xi)-6\xi^5=0\Leftrightarrow g'(\xi)=6\xi^5$$

Όμως:

$$g'(\xi)\le f'(3)\Leftrightarrow g'(\xi)\le 6$$

Άρα:

$$6\xi^5\le 6\Leftrightarrow \xi^5\le 1\Leftrightarrow \xi\le 1 \text{ που είναι άτοπο, αφού } 1<x_1<\xi<x_2$$

Επομένως η εξίσωση $g(x)=x^6$, έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1

ΘΕΜΑ 11ο : (20ο – 2014):

Έστω συνάρτηση $\mathbf{f}$ ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{f(x) > 0}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$ και η συνάρτηση $\mathbf{g : R \to R}$ με $\mathbf{g(x) = \ln f(x)}$

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha < \beta < \gamma$ και οι $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

I) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(x_2)\cdot f'(x_1) = f(x_1)\cdot f'(x_2)$$

II) Υπάρχει $\xi \in R$, ώστε να ισχύει:

$$f(\xi)\cdot f''(\xi) = \left(f'(\xi)\right)^2$$

ΛΥΣΗ

I) Οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ονομάσουμε ω τη διαφορά της προόδου, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \alpha = \omega \quad (1) \quad \text{με } \omega > 0$$

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν ονομάσουμε λ το λόγο της προόδου, τότε έχουμε:

$$f^2(\beta) = f(\alpha)\cdot f(\gamma) \Rightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} = \lambda \quad (2) \quad \text{με } \lambda > 0$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\ln\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln\dfrac{f(\gamma)}{f(\beta)}$ (3)

Η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο R, με $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$, οπότε υπάρχουν:

- $x_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_1) = \dfrac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \overset{(1)}{=} \dfrac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\omega} = \dfrac{1}{\omega}\cdot\ln\dfrac{f(\beta)}{f(\alpha)}$ (4)

- $x_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_2) = \dfrac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} \overset{(1)}{=} \dfrac{\ln f(\gamma) - \ln f(\beta)}{\omega} = \dfrac{1}{\omega}\cdot\ln\dfrac{f(\gamma)}{f(\beta)}$ (5)

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) έχουμε:

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Rightarrow \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} \Rightarrow f(x_2)\cdot f'(x_1) = f(x_1)\cdot f'(x_2)$$

II) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$ με :

$$g''(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f''(x)\cdot f(x)-\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^2} \quad (6)$$

και $g'(x_1)=g'(x_2)$, επομένως η συνάρτηση g' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $g''(\xi)=0$

Οπότε από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\frac{f''(\xi)\cdot f(\xi)-\left(f'(\xi)\right)^2}{\left(f(\xi)\right)^2}=0\Rightarrow$$

$$f''(\xi)\cdot f(\xi)-\left(f'(\xi)\right)^2=0\Rightarrow$$

$$f''(\xi)\cdot f(\xi)=\left(f'(\xi)\right)^2$$

ΘΕΜΑ 12ο : (21ο – 2014):

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: R\to R$ με $g(0)=2e$, οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{2f(x)+f(1-y)+g(x)-g(y)=2e^x+e^y+3 \text{ για κάθε } x, y\in R \quad (1)}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{f(x)=2e^x-e^{1-x}+1 \quad \text{και} \quad g(x)=-2e^x+2e^{1-x}+2}$$

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f, g και $f-g$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\mathbf{4e^{x^2-2x}<4e^{x-2}+3e^{-x^2+2x+1}-3e^{-x+3}}$$

ΛΥΣΗ

α) Για $y=x$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x)+f(1-x)=3e^x+3 \quad (2)$$

Αν στη σχέση (2) θέσουμε όπου x το $1-x$ έχουμε:

$$2f(1-x)+f(x)=3e^{1-x}+3 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3)

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=3e^x+3 \\ f(x)+2f(1-x)=3e^{1-x}+3 \end{cases} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -4f(x)-2f(1-x)=-6e^x-6 \\ f(x)+2f(1-x)=3e^{1-x}+3 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$-3f(x) = -6e^x + 3e^{1-x} - 3 \Rightarrow f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad (4)$$

Για $y = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x) + f(1) + g(x) - g(0) = 2e^x + 4 \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$4e^x - 2e^{1-x} + 2 + f(1) + g(x) - g(0) = 2e^x + 4$$

Είναι:

$$f(1) = 2e = g(0)$$

οπότε έχουμε:

$$g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$$

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

- $f'(x) = 2e^x - e^{1-x}(1-x)' = 2e^x + e^{1-x} > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R
- $g'(x) = -2e^x + 2e^{1-x}(1-x)' = -2e^x - 2e^{1-x} < 0$, οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Επίσης για κάθε $x \in R$ είναι:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \left(2e^x - e^{1-x} + 1\right) - \left(-2e^x + 2e^{1-x} + 2\right) = 4e^x - 3e^{1-x} - 1 \text{ και}$$

$$(f-g)'(x) = 4e^x - 3e^{1-x}(1-x)' = 4e^x + 3e^{1-x} > 0$$, οπότε η $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο R

Επομένως οι συναρτήσεις f, g και $f-g$ δεν παρουσιάζουν ακρότατα.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x - 3e^{1-x} - 1 = 0$$

έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = 4e^x - 3e^{1-x} - 1, \ x \in R$$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο R, άρα και στο διάστημα $[0,1]$,
- $h(0) \cdot h(1) = (3-3e)(4e-4) = -12(e-1)^2 < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0,1]$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ έχει μια πραγματική ρίζα $x_o \in (0,1) \subseteq R$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Είναι:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} - 1 < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} - 1 \Leftrightarrow$$

$$h(x^2-2x) < h(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1\,,\,2)$$

ΘΕΜΑ 13ο : (23ο – 2014):

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{f(x^2+y) + f(f(x)-y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \ \text{για κάθε} \ x\,,\, y \in R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathbf{f^2(x) = x^4\,,\ x \in R}$ **και** $\mathbf{f(x) + f(-x) = 2x^2\,,\ x \in R}$

β) $\mathbf{f(x) = x^2\,,\ x \in R}$

γ) $\displaystyle \mathbf{\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}}$

ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος

Για κάθε $x\,,\, y \in R$ είναι:

$$f(x^2+y) + f(f(x)-y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \qquad (1)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y = -x^2$ έχουμε:

$$f(0) + f(f(x)+x^2) = 2f(f(x)) + 2x^4 \qquad (2)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $y = f(x)$ έχουμε:

$$f(x^2+f(x)) + f(0) = 2f(f(x)) + 2f^2(x) \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$2f(f(x)) + 2x^4 = 2f(f(x)) + 2f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = x^4 \qquad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε $x = 0$ έχουμε:

$$f(0+y) + f(f(0)-y) = 2f(f(0)) + 2y^2 \Leftrightarrow$$

$$f(y) + f(-y) = 2y^2$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = 2x^2\,,\quad x \in R \qquad (5)$$

2ος τρόπος

Για $x=y=0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(0)+f(f(0))=2f(f(0))\Rightarrow f(f(0))=f(0) \qquad (6)$$

Για $x=0$ και $y=f(0)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(f(0))+f(f(0)-f(0))=2f(f(0))+2f^2(0)\Rightarrow$$

$$f(0)=f(f(0))+2f^2(0)\overset{(6)}{\Rightarrow}2f^2(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

Για $x=0$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(y)+f(f(0)-y)=2f(f(0))+2y^2\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(y)+f(-y)=2y^2\ ,\ \ y\in R$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x)+f(-x)=2x^2,\ \ x\in R$$

Για $y=-x^2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x^2-x^2)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4$$

$$f(0)+f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2x^4 \qquad (7)$$

Για $y=f(x)$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(x^2+f(x))+f(f(x)-f(x))=2f(f(x))+2f^2(x)\Rightarrow$$

$$f(x^2+f(x))+f(0)=2f(f(x))+2f^2(x)\overset{f(0)=0}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x)+x^2)=2f(f(x))+2f^2(x) \qquad (8)$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) προκύπτει ότι:

$$2f^2(x)=2x^4\Rightarrow f^2(x)=x^4$$

β) 1ος τρόπος

Έστω $x_o\in R$, τότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(x_o)=x_o^4\Leftrightarrow f(x_o)=x_o^2 \quad ή \quad f(x_o)=-x_o^2 \qquad (9)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_o\in R^*$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=-x_o^2$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f(x_o)+f(-x_o)=2x_o^2\Rightarrow -x_o^2+f(-x_o)=2x_o^2\Rightarrow f(-x_o)=3x_o^2$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$\left[f(-x_o)\right]^2=9x_o^4\Rightarrow x_o^4=9x_o^4\Rightarrow 1=9$$, που είναι άτοπο.

Άρα από τη σχέση (9) προκύπτει ότι για κάθε $x\neq 0$ είναι $f(x)=x^2$

Όμως $f(0)=0$, οπότε $f(x)=x^2$, για κάθε $x\in R$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή, διότι επαληθεύει τη δοσμένη συνθήκη.

2ος τρόπος

Αν στη σχέση (4) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f^2(-x)=(-x)^4 \Rightarrow f^2(-x)=x^4,\quad x\in R$$

Άρα για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f^2(x)=f^2(-x)=x^4 \Rightarrow$$

$$\big(f(x)+f(-x)\big)\cdot\big(f(x)-f(-x)\big)=0 \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$2x^2\big(f(x)-f(-x)\big)=0,\quad x\in R$$

Επομένως για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$f(x)-f(-x)=0 \Rightarrow f(x)=f(-x) \qquad (10)$$

Από τις σχέσεις (5) και (10) προκύπτει ότι:

$$2f(x)=2x^2 \Rightarrow f(x)=x^2,\quad x\in R^* \quad (11)$$

Από τη σχέση (11) και δεδομένου ότι $f(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(x)=x^2,\quad x\in R$$

γ) Έστω $I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}dx$. Αν θέσουμε $x=-u$, τότε $dx=(-u)'du=-du$

Για $x=-1$ είναι $u=1$ και για $x=1$ είναι $u=-1$, οπότε έχουμε:

$$I=\int_{1}^{-1}\frac{(-u)^2}{e^{-u}+1}(-du)=-\int_{1}^{-1}\frac{u^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2}{e^{-u}+1}du=\int_{-1}^{1}\frac{u^2e^u}{1+e^u}du=\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{1+e^x}dx=J$$

Είναι:

- $I=J$ και
- $I+J=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+e^x}dx+\int_{-1}^{1}\frac{x^2e^x}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^2e^x}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+e^x)}{1+e^x}dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$

Επομένως έχουμε:

$$2I=\frac{2}{3},\ \text{οπότε}\ I=\frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 15ο : (24ο – 2014):

Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=(\alpha+1)^x-\alpha^x$, $\alpha>1$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f, για τις διάφορες τιμές του $x\in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα $[0,+\infty)$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

δ) Να λύσετε το σύστημα $3^x-2^y=3^y-2^x=19$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha+1>\alpha>1$$

Οπότε:

- Για $x>0$ είναι $(\alpha+1)^x>\alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x-\alpha^x>0 \Rightarrow f(x)>0$

  Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

- Για $x<0$ είναι $(\alpha+1)^x<\alpha^x \Rightarrow (\alpha+1)^x-\alpha^x<0 \Rightarrow f(x)<0$

  Άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$

- Για $x=0$ είναι $f(0)=(\alpha+1)^0-\alpha^0=1-1=0$

  Άρα $f(x)=0$ για $x=0$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=(\alpha+1)^x\ln(\alpha+1)-\alpha^x\ln\alpha$$

και

$$f''(x)=(\alpha+1)^x\ln^2(\alpha+1)-\alpha^x\ln^2\alpha$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^x>\alpha^x \quad (1)$$

Επειδή $\alpha>1$ είναι:

$$\ln(\alpha+1)>\ln\alpha>0 \quad (2)$$

και

$$\ln^2(\alpha+1)>\ln^2\alpha>0 \quad (3)$$

οπότε:

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

  $$(\alpha+1)^x\ln(\alpha+1)>\alpha^x\ln\alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x\ln(\alpha+1)-\alpha^x\ln\alpha>0 \Rightarrow f'(x)>0$$

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (3) βρίσκουμε ότι:

  $$(\alpha+1)^x\ln^2(\alpha+1)>\alpha^x\ln^2\alpha \Rightarrow (\alpha+1)^x\ln^2(\alpha+1)-\alpha^x\ln^2\alpha>0 \Rightarrow f''(x)>0$$

Δεδομένου ότι συνάρτηση f είναι και συνεχής στο $x_o=0$, συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[0,+\infty)$

γ) Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Για $x\in(-\infty,0)$ είναι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(\alpha+1)^x-\alpha^x\right]=0-0=0$$

οπότε η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Για $x \in (0\,,+\infty)$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\alpha+1)^x - \alpha^x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^x \cdot \left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x - 1\right]\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln\alpha\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^x\left[\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1) - \ln\alpha\right]\right) = +\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\alpha^x = +\infty\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1)\right) = +\infty \ \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\alpha\right) = \ln\alpha$$

Άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$

δ) 1^{ος} τρόπος:

Αν ένας τουλάχιστον από τους $x\,,y$ είναι αρνητικός, τότε ο αριθμός $3^x - 2^y$ δεν είναι ακέραιος. Επομένως, αναζητούμε μη αρνητικές λύσεις του συστήματος.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3^x - 2^x$, που προκύπτει από την παραπάνω συνάρτηση για $\alpha = 2$

Είναι:

$$x > y \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3^x > 3^y \\ 2^x > 2^y \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3^x > 3^y \\ -2^y > -2^x \end{Bmatrix} \Rightarrow 3^x - 2^y > 3^y - 2^x$$

Ομοίως

$$x < y \Rightarrow 3^x - 2^y < 3^y - 2^x$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει λύσεις $(x\,,y)$ με $x \neq y$

Για $x = y$ είναι:

$$3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 3$$

οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x\,,y) = (3\,,3)$

2^{ος} τρόπος:

Από τις δοσμένες σχέσεις παίρνουμε:

$$3^x - 2^y = 3^y - 2^x \Leftrightarrow 3^x + 2^x = 3^y + 2^y \Leftrightarrow g(x) = g(y) \quad (4)$$

όπου $g(x) = 3^x + 2^x\,,\ x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 > 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε είναι και $1-1$

Επομένως από τη σχέση (4) έχουμε $x = y$

Για $x = y$ το σύστημα γίνεται $3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \quad (5)$, όπου $f(x) = 3^x - 2^x$

Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ όμως η συνάρτηση είναι αρνητική, οπότε δεν έχουμε αρνητική ρίζα.

Επίσης είναι $f(0)=0\neq 19$, οπότε ούτε το 0 είναι ρίζα.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$, με βάση το ερώτημα (β) για $\alpha=2$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η σχέση (5) δίνει τη μοναδική λύση $x=3$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(3,3)$

ΘΕΜΑ 15ο : (25ο – 2014):

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **$f(x+y)=e^{-y}\cdot f(x)+e^{-x}\cdot f(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (1)**
- **$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ (2)**

Θεωρούμε επίσης και την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **$g'(x^3+1)=-x^3e^{-x^3-1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (3) και**
- **$g(0)=f(0)$ (4)**

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-f(x)+e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f(x)=xe^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

γ) $f=g$

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_o\in\mathbb{R}$. Για x κοντά στο x_0 θεωρούμε το λόγο μεταβολών $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

Θέτουμε $h=x-x_o$, δηλαδή $x=x_o+h$, όπου $h\neq 0$, διότι $x\neq x_o$

Έτσι έχουμε:

$$\lambda(x)=\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}\overset{(1)}{=}\frac{e^{-h}\cdot f(x_o)+e^{-x_o}\cdot f(h)-f(x_o)}{h}$$

$$=\frac{f(x_o)\cdot\left(e^{-h}-1\right)+e^{-x_o}\cdot f(h)}{h}=f(x_o)\cdot\frac{e^{-h}-1}{h}+e^{-x_o}\cdot\frac{f(h)}{h}$$

Είναι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\overset{(2)}{=}1 \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0}\frac{e^{-h}-1}{h}\overset{-h=t}{=}-\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-e^{0}}{t}=-\left.\frac{d(e^t)}{dt}\right|_{t=0}=-1 \quad (5)$$

Άρα:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{h\to 0}\left(f(x_o)\cdot\frac{e^{-h}-1}{h}+e^{-x_o}\cdot\frac{f(h)}{h}\right)\underset{(5)}{\overset{(2)}{=}}$$

$$=f(x_o)\cdot(-1)+e^{-x_o}\cdot 1=-f(x_o)+e^{-x_o}\in R$$

Δηλαδή, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο $x_o\in R$ με $f'(x_o)=-f(x_o)+e^{-x_o}$

Επομένως η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-f(x)+e^{-x}$, για κάθε $x\in R$

β) Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f'(x)=-f(x)+e^{-x}\Leftrightarrow f'(x)+f(x)=e^{-x}\overset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{x}\cdot\big(f'(x)+f(x)\big)=1\Leftrightarrow\big(e^{x}\cdot f(x)\big)'=(x)'$$

Άρα

$$e^{x}\cdot f(x)=x+c\ ,\ \ c\in R$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$e^{0}\cdot f(0)=c\Rightarrow c=0\,,$$

διότι από τη σχέση (1) για $x=y=0$ έχουμε ότι $f(0)=0$

Επομένως:

$$e^{x}\cdot f(x)=x\Leftrightarrow f(x)=x\cdot e^{-x}\,,\ \ x\in R$$

γ) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g'(x^3+1)=-x^3e^{-x^3-1}$$

Θέτουμε $x^3+1=t$, $t\in R$ και έχουμε:

$$g'(t)=(1-t)e^{-t}\ ,\ \text{για κάθε } t\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=(1-x)e^{-x}$$

Οπότε

$$f'(x)=g'(x),\ \ \text{για κάθε } x\in R$$

Άρα για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)=g(x)+c\ ,\ \ c\in R$$

Από υπόθεση είναι $f(0)=g(0)=0$, οπότε $c=0$

Δηλαδή είναι:

$$f(x)=g(x)\,,\ \text{για κάθε } x\in R$$

Επομένως

$$f=g$$

ΘΕΜΑ 16ο : (29ο – 2014):

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(1)=0$ και**
- **$2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}$, $x\in(0,1]$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

ii) το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot f^{-1}(x)\right)$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής $M(x_o, f(x_o))$ με $x_o\in(0,1)$

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ των συναρτήσεων f και f^{-1} αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ και για κάθε $x\in(0,1)$, έχουμε:

$$2\sqrt{1-x}\cdot f'(x)=1+\frac{2\sqrt{1-x}}{x}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)'$$

Άρα για κάθε $x\in(0,1)$ είναι:

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}+c$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o=1$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$

Επειδή $f(1)=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\left(\ln x-\sqrt{1-x}+c\right)=0\Rightarrow c=0$$

Επομένως:

$$f(x)=\begin{cases}\ln x-\sqrt{1-x} & , \ 0<x<1\\ 0 & , \ x=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(x)=\ln x-\sqrt{1-x}\ ,\ x\in(0,1]$$

β) Για τη συνάρτηση f έχουμε:

- είναι συνεχής στο διάστημα $\left(0,1\right]$ και
- $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}>0$, για κάθε $x\in(0,1)$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0,1\right]$, οπότε είναι και «1−1». Άρα η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι $A_{f^{-1}}=f\left(\left(0,1\right]\right)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left(0,1\right]$ θα είναι:

$f\left(\left(0,1\right]\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\ f(1)\right]=\left(-\infty,\ 0\right]$, γιατί:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\sqrt{1-x}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\sqrt{1-x}\right)=-1$
- $f(1)=0$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} είναι: $A_{f^{-1}}=\left(-\infty,0\right]$

ii) Είναι:

$$A_{f^{-1}}=\left(-\infty,0\right] \text{ και } f^{-1}\left(\left(-\infty,0\right]\right)=A_f=\left(0,1\right]$$

Επομένως για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right]$ ισχύει:

$$0<f^{-1}(x)\le 1\Leftrightarrow 0<x^2f^{-1}(x)\le x^2 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0}0=\lim_{x\to 0}x^2=0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2f^{-1}(x)\right]=0$

γ) Για κάθε $x\in\left(0,1\right)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \quad \text{και}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{3}{8(1-x)^2\sqrt{1-x}}>0$$

Άρα η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και επειδή είναι και συνεχής στο $(0,1)$, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f'' είναι:

$$f''\left(\left(0,1\right)\right)=\left(\lim_{x\to 0^+}f''(x),\ \lim_{x\to 1^-}f''(x)\right)=\left(-\infty,+\infty\right), \text{ γιατί:}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f''(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}=\dfrac{1}{4}$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}f''(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-1$

Η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ επομένως είναι και «$1-1$» και επειδή το $0 \in f''\big((0,1)\big)$ θα υπάρχει ένα ακριβώς $x_o \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_o)=0$

Επειδή η συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ θα ισχύει:

- για $0<x<x_o \Rightarrow f''(x)<f''(x_o) \Rightarrow f''(x)<0$ και
- για $x_o<x<1 \Rightarrow f''(x_o)<f''(x) \Rightarrow f''(x)>0$

Άρα το σημείο $M\big(x_o, f(x_o)\big)$ με $x_o \in (0,1)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

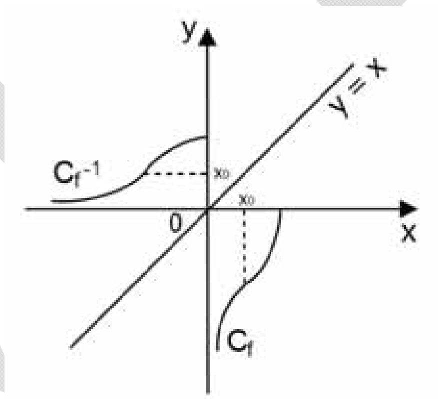
δ) Έχουμε:

$$A_f=(0,1] \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$$

άρα η ευθεία $(\varepsilon_1): x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Συμπληρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f και σχεδιάζουμε την C_f

x	0	x_0	1
f′(x)		+	+
f″(x)		− 0	+
f		↗ Σ.Κ.	↗



ΘΕΜΑ 17ο : (30ο – 2014):

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f'(0)=0$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x)+x \neq 0$, **για κάθε** $x \in R$ **(1)**
- $f(x-y)=\dfrac{f(x)+x}{f(y)+y}-x+y$, **για κάθε** $x, y \in R$ **(2)**

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύουν:

i) $f'(x)=f(x)+x-1$

ii) $f(x)=e^x-x$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του α , ώστε να ισχύει:

$$f(x)\geq \alpha x \ \text{ για κάθε } x \in R, \text{ όπου } \alpha>-1$$

γ) Αν $H(x)=xe^x-e^x+1$ για κάθε $x \in R$, τότε να βρείτε συνάρτηση G, η οποία να είναι συνεχής στο R, παραγωγίσιμη στο R^* και για την οποία ισχύει:

$$G'(x)+\frac{2G(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}+1 \ \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Είναι η συνάρτηση G παραγωγίσιμη στο $x_o=0$;

ΛΥΣΗ

α) i) Για $x = y = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(0-0) = \frac{f(0)+0}{f(0)+0} - 0 + 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(0) = 1 \quad (3)$$

Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (2) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$f'(x-y)\cdot(0-1) = \frac{-\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(y)+1\right)}{\left(f(y)+y\right)^2} - 0 + 1 \Rightarrow$$

$$f'(x-y) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(y)+1\right)}{\left(f(y)+y\right)^2} - 1$$

Για $y = 0$ από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$f'(x) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(f'(0)+1\right)}{\left(f(0)+0\right)^2} - 1 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) = \frac{\left(f(x)+x\right)\cdot\left(0+1\right)}{\left(1+0\right)^2} - 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) + x - 1 \text{, για κάθε } x \in R$$

ii) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = f(x) + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 = f(x) + x \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)+x\right)' = f(x) + x \Leftrightarrow f(x) + x = ce^x \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) + 0 = ce^0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Για $c = 1$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) + x = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x \text{, για κάθε } x \in R$$

β) Για $\alpha > -1$ και για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f(x) \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x - \alpha x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \quad (5),$$

όπου $g(x) = e^x - x - \alpha x$, $x \in R$ και $\alpha > -1$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = e^x - 1 - \alpha \text{, όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + \alpha \Leftrightarrow x = \ln(1+\alpha)$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + \alpha \Leftrightarrow x > \ln(1+\alpha)$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$\ln(1+\alpha)$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
		ελάχιστο	

Η συνάρτηση g παίρνει ελάχιστη τιμή:

$$g\big(\ln(1+\alpha)\big)=e^{\ln(1+\alpha)}-\ln(1+\alpha)-\alpha\ln(1+\alpha)=$$

$$=(1+\alpha)-(1+\alpha)\ln(1+\alpha)=(1+\alpha)\big(1-\ln(1+\alpha)\big)$$

Άρα για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g(x)\geq(1+\alpha)\big(1-\ln(1+\alpha)\big)$$

Για να είναι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$, αρκεί να ισχύει:

$$(1+\alpha)\big(1-\ln(1+\alpha)\big)\geq 0\ ,\ \text{όπου }\ \alpha>-1$$

Έχουμε:

$$(1+\alpha)\big(1-\ln(1+\alpha)\big)\geq 0\overset{1+\alpha>0}{\Leftrightarrow}1-\ln(1+\alpha)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\ln(1+\alpha)\leq 1\Leftrightarrow\ln(1+\alpha)\leq\ln e\Leftrightarrow 1+\alpha\leq e\Leftrightarrow\alpha\leq e-1$$

Άρα η μέγιστη τιμή του α είναι $\alpha=e-1$

γ) Για κάθε $x\in R^*$ είναι:

$$G'(x)+\frac{2G(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}+1\Leftrightarrow$$

$$x^2G'(x)+2xG(x)=xf(x)+x^2\qquad(6)$$

Η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο R, ως αρχική της συνεχούς στο R συνάρτησης $tf(t)+t^2$ με:

$$H'(x)=xf(x)+x^2\qquad(7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$x^2G'(x)+2xG(x)=H'(x)\Leftrightarrow$$

$$\big(x^2G(x)\big)'=H'(x)\ ,\quad x\in R^*$$

- Για κάθε $x\in(-\infty\,,0)$ είναι:

$$x^2G(x)=H(x)+c_1\Leftrightarrow x^2G(x)=xe^x-e^x+1+c_1\qquad(8)$$

- Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι:

$$x^2G(x)=H(x)+c_2\Leftrightarrow x^2G(x)=xe^x-e^x+1+c_2\qquad(9)$$

Επειδή η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_o=0$ θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^-}G(x)=\lim_{x\to 0^+}G(x)=G(0)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x\,e^x - e^x + 1 + c_1) \Rightarrow 0\cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\,e^x - e^x + 1 + c_2) \Rightarrow 0\cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$

Άρα για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$x^2 G(x) = x\,e^x - e^x + 1 \Rightarrow G(x) = \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2}\ , \quad x \neq 0$$

Επομένως για κάθε $x \in R$ είναι:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ G(0) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε:

$$G(0) = \lim_{x\to 0} G(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + x\,e^x - e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,e^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} - \dfrac{1}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\,e^x - 2e^x + 2 - x^2}{2x^3} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^x + 2x\,e^x - 2e^x - 2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\,e^x - 2x}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\,(e^x - 1)}{6x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}\ ,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = \dfrac{d(e^x)}{dx}\Big|_{x=0} = 1$

Άρα η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ με $G'(0) = \dfrac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 18ο : (31ο – 2014):

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$, μία συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$ και η συνάρτηση $g: R \to R$ με τύπο $g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} (x^2+1) f(t)dt - xe^{x^2+1}$

Αν ισχύει:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)^x \geq x+1, \text{ για κάθε } x \in R,$$

τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = e$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα x_o, για την οποία ισχύει:

$$\frac{2x_o^3 + 6x_o}{3} > e^{x_o^2} - 1$$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi: R \to R$, $\varphi(x) = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)^x - x - 1$

Παρατηρούμε ότι $\varphi(x) \geq \varphi(0)$, για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση φ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_1 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη ως πράξη μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)^x \ln\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right) - 1$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)^0 \ln\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right) = 1 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = e \quad (1)$$

β) Από (α) ερώτημα για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = e$$

Άρα

$$g(x) = (x^2+1)e - xe^{x^2+1}$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = 2ex - \left((x)'e^{x^2+1} + xe^{x^2+1}(x^2+1)'\right) =$$
$$= 2ex - e^{x^2+1} - 2x^2 e^{x^2+1} =$$
$$= -e \cdot \left((2x^2+1)e^{x^2} - 2x \right)$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

- $x^2 + 1 \geq 2x$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 1$
- $x^2 \geq 0$ με το «ίσον» να ισχύει μόνο για $x = 0$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $2x^2 + 1 > 2x \quad (2)$

Επίσης είναι:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} > e^0 \Rightarrow e^{x^2} > 1 \quad (3)$$

Για $x > 0$, αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$(2x^2+1)\cdot e^{x^2} > 2x \cdot 1 \Rightarrow (2x^2+1)\cdot e^{x^2} - 2x > 0 \overset{\cdot(-e)<0}{\Rightarrow}$$
$$-e\cdot\left((2x^2+1)e^{x^2} - 2x\right) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \quad , \quad x > 0$$

Για $x \leq 0$ προφανώς ισχύει $g'(x) < 0$. Άρα $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in R$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R

Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$g(R) = \left(\lim_{x\to+\infty} g(x) \ , \ \lim_{x\to-\infty} g(x) \right)$$

Είναι:

- ♦ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e + \dfrac{e}{x^2} - \dfrac{e^{x^2+1}}{x}\right) = -\infty$, διότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(2xe^{x^2+1}\right) = +\infty$$

- ♦ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(ex^2 + e - xe^{x^2+1}\right) = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτηση g είναι το $g(R) = R$

γ) Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο R και έχει σύνολο τιμών το R, άρα θα υπάρχει μοναδικό x_o τέτοιο, ώστε $g(x_o) = 0$

- Για $x < x_o \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_o) \Rightarrow g(x) > 0$
- Για $x > x_o \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_o) \Rightarrow g(x) < 0$

Το πρόσημο της συνάρτησης g φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	x_o	$+\infty$
g(x)	+	0	−

Επειδή $g(0)=e>0$, συμπεραίνουμε ότι $0\in(-\infty\,,\,x_o)$. Άρα $x_o>0$

Για κάθε $x\in[0\,,\,x_o]$ είναι $g(x)\ge 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=x_o$, επομένως

$$\int_0^{x_o} g(x)\,dx>0 \Rightarrow \int_0^{x_o}\left(ex^2+e-xe^{x^2+1}\right)dx>0\Rightarrow$$

$$e\int_0^{x_o} x^2\,dx+\int_0^{x_o} e\,dx-\int_0^{x_o} xe^{x^2+1}\,dx>0\Rightarrow$$

$$e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_o}+e(x_o-0)-\frac{1}{2}\int_0^{x_o}\left(e^{x^2+1}\right)'dx>0\Rightarrow$$

$$e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{x_o}+e(x_o-0)-\frac{1}{2}\left[e^{x^2+1}\right]_0^{x_o}>0\Rightarrow$$

$$\frac{ex_o^3}{3}+e\,x_o-\frac{1}{2}\left(e^{x_o^2+1}-e\right)>0\Rightarrow$$

$$\frac{x_o^3}{3}+x_o>\frac{1}{2}\left(e^{x_o^2}-1\right)\Rightarrow$$

$$\frac{2x_o^3+6x_o}{3}>e^{x_o^2}-1$$

ΘΕΜΑ 19ο : (34ο – 2014):

Έστω η συνάρτηση $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(2)=0$, η οποία είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και κυρτή στο $(2\,,+\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2\,,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4\,,5)$

Αν επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}=\dfrac{1}{6}$

γ) i) Να βρείτε τις τιμές των $f(3)$ και $f\,'(3)$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2,+\infty)$, οπότε είναι παραγωγίσιμη με f' γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$, άρα η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ και $g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-2)-f(x)}{(x-2)^2}$ (1)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,x)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2,x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{f(x)}{x-2}$$

Είναι:

$$2<\xi<x\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x-2}<f'(x)\overset{x>2}{\Rightarrow}f'(x)(x-2)-f(x)>0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=(2x-9)f(x+6)-(7x-32)f(x),\ x\in[4,5]$$

Η h συνεχής στο $[4,5]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $h(4)=-f(10)+4f(4)=-8g(10)+8g(4)=8\big(g(4)-g(10)\big)$

Για $4<10\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(4)<g(10)\Rightarrow g(4)-g(10)<0$, άρα $h(4)<0$

- $h(5)=f(11)-3f(5)=9g(11)-g(5)=9\big(g(11)-g(5)\big)$

Για $5<11\overset{g\nearrow}{\Rightarrow}g(5)<g(11)\Rightarrow g(11)-g(5)>0$, άρα $h(5)>0$

Συνεπώς $h(4)\cdot h(5)<0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση:

$$h(x)=0\Leftrightarrow(2x-9)f(x+6)=(7x-32)f(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(4,5)$

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+\sqrt{x+6}}{x-3}\text{, για } x \text{ κοντά στο } x_o=3$$

Είναι:

$$\lim_{x\to3}\varphi(x)=\frac{1}{6}$$

Για x κοντά στο $x_o=3$ έχουμε:

$$f(x)=\varphi(x)(x-3)-\sqrt{x+6}$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)(x-3)-\sqrt{x+6}\right)=\frac{1}{6}\cdot 0-\sqrt{9}=-3$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=-3$$

Όμως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3, οπότε $f(3)=-3$

Για x κοντά στο $x_o=3$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\varphi(x)-\sqrt{x+6}+3}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{x+6-9}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+6}+3\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$$

Άρα $f'(3)=0$

ii) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(2\,,+\infty)$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(2\,,+\infty)$, οπότε έχουμε:

- Για $2<x<3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(3)\Rightarrow f'(x)<0$
- Για $x>3 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(3)\Rightarrow f'(x)>0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$
	τοπ.μεγ.		ελάχ.		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2\,,3]$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(2\,,3)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2\,,3]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[3,+\infty)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(3\,,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_o=3$ με ελάχιστη τιμή $f(3)=-3$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=2$ με τιμή $f(2)=0$

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\left(4\,,f(4)\right)$ είναι:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4)\Leftrightarrow y=f'(4)(x-4)+f(4)$$

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[2,+\infty\right)$ άρα $f(x)\geq y \Leftrightarrow f(x)\geq f'(4)(x-4)+f(4)$

Έχουμε $f'(4)>0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f'(4)(x-4)+f(4)\right)=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=\left[2,3\right]$, άρα $f\left(\Delta_1\right)=\left[-3\,,\,0\right]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[3,+\infty\right)$, άρα $f\left(\Delta_2\right)=\left[-3,+\infty\right)$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$f\left(\Delta\right)=f\left(\Delta_1\right)\cup f\left(\Delta_2\right)=\left[-3\,,+\infty\right)$$

ΘΕΜΑ 20ο : (36ο – 2014):

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f:R\to R$, με $\left|f(\alpha)-f(\beta)\right|\leq\frac{1}{2}\left|\alpha-\beta\right|$ για κάθε $\alpha\,,\beta\in R$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $F:R\to R$ με $F(0)=0$ και $F'(x)=f(x)-x$ για κάθε $x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R

γ) Να αποδείξετε ότι $F(x)\leq 0$ για κάθε $x\in R$

δ) Να αποδείξετε ότι $F(x+1)-F(x)<F'(x)<F(x)-F(x-1)$ για $x\geq 1$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\in R$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}F'(x)$

ΛΥΣΗ

α) Για $x_o\in R$ έχουμε:

$$\left|f(x)-f(x_o)\right|\leq\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|\leq f(x)-f(x_o)\leq\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|+f(x_o)\leq f(x)\leq f(x_o)+\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|$$

Είναι:

$$\lim_{x\to x_o}\left(-\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|+f(x_o)\right)=f(x_o)$$

$$\lim_{x\to x_o}\left(\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|+f(x_o)\right)=f(x_o)$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_o\in R$, άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R

β) Είναι:

$$F'(x)=f(x)-x\text{, για κάθε } x\in R$$

Για $x_1<x_2$ έχουμε:

$$\frac{F'(x_1)-F'(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2}{x_1-x_2}=$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-\frac{x_1-x_2}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-1$$

Όμως:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le\frac{1}{2}|x_1-x_2|\Leftrightarrow\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\le\frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}-1<0\Rightarrow\frac{F'(x_1)-F'(x_2)}{x_1-x_2}<0\overset{x_1<x_2}{\Rightarrow}F'(x_1)>F'(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R

γ) Η συνάρτηση f είναι περιττή στο R, άρα για κάθε $x\in R$ είναι:

$$-x\in R \quad \text{και} \quad f(-x)=-f(x)$$

Για $x=0$ έχουμε:

$$f(0)=-f(0)\Rightarrow 2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

Είναι:

$$F'(0)=f(0)-0=0$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο της $\left(0\,,\,F(0)\right)$ είναι:

$$y-F(0)=F'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=0$$

Η συνάρτηση F είναι κοίλη στο R, άρα για κάθε $x\in R$ είναι:

$$F(x)\le y \;\Leftrightarrow\; F(x)\le 0$$

δ) Η συνάρτηση F είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[x-1,\,x]$, $[x\,,\,x+1]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(x-1,\,x)$, $(x\,,\,x+1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

♦ $\xi_1\in(x-1,\,x)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_1)=\dfrac{F(x)-F(x-1)}{x-(x-1)}=F(x)-F(x-1)$

♦ $\xi_2\in(x\,,\,x+1)$ τέτοιο, ώστε $F'(\xi_2)=\dfrac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x}=F(x+1)-F(x)$

Είναι:

$$x-1<\xi_1<x<\xi_2<x+1\Rightarrow\xi_1<x<\xi_2$$

Η συνάρτηση F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε έχουμε:

$$F'(\xi_1)>F'(x)>F'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$F(x)-F(x-1)>F'(x)>F(x+1)-F(x)$$

$$F(x+1)-F(x)<F'(x)<F(x)-F(x-1)$$

ε) Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell, \quad \ell \in R$$

Οπότε:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to+\infty} F(u) = \ell \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x-1) \overset{u=x-1}{=} \lim_{x\to+\infty} F(u) = \ell$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \big(F(x+1) - F(x)\big) = \ell - \ell = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(F(x) - F(x-1)\big) = \ell - \ell = 0$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής αξιοποιώντας το ερώτημα (δ) είναι και

$$\lim_{x\to+\infty} F'(x) = 0$$

ΘΕΜΑ 21ο : (37ο – 2014):

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x + 1 \le f(x) \le e^x \quad \text{για κάθε } x \in R \quad (1)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $O\big(0, f(0)\big)$

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to0} \dfrac{f(x) - 2xe^x - x^2e^x - 1}{2x}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \dfrac{6-x}{e^x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

δ) Αν $\displaystyle\int_{\ell n3}^{\ell n8} \left(\sqrt{1+e^t} \left(\int_{\ell n3}^{\ell n8} f(t)dt \right) \right) dt = 4 + \ell n\frac{9}{4}$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \ell n3$ και $x = \ell n8$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε $1 \le f(0) \le 1$, άρα $f(0) = 1$ (2)

Για $x \ne 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$x + 1 \le f(x) \le e^x \Leftrightarrow x \le f(x) - 1 \le e^x - 1 \quad (3)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν $x > 0$ τότε από τη σχέση (3) έχουμε $1 \le \dfrac{f(x) - 1}{x} \le \dfrac{e^x - 1}{x}$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - e^0}{x-0} = \dfrac{d(e^x)}{dx}\Big|_{x=0} = 1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x} = 1$

Αν $x<0$ τότε από τη σχέση (3) έχουμε $1 \ge \dfrac{f(x)-1}{x} \ge \dfrac{e^x-1}{x}$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^-} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x - e^0}{x-0} = \dfrac{d(e^x)}{dx}\Big|_{x=0} = 1$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-1}{x} = 1$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = 1$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$ με $f'(0) = 1$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

β) Είναι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2xe^x - x^2e^x - 1}{2x} = \frac{f(x) - 1 - x(2+x)e^x}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x)-1}{x} - \frac{e^x(2+x)}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x f(x) + x - 6$, $x \in [0, 1]$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $g(0) = e^0 f(0) + 0 - 6 \overset{(2)}{=} 1 - 6 = -5 < 0$
- $g(1) = ef(1) + 1 - 6 = ef(1) - 5 > 0$,

διότι για $x = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2 \le f(1) \le e \overset{\cdot e}{\Leftrightarrow} 2e \le ef(1) \le e^2 \Leftrightarrow 2e - 5 \le ef(1) - 5 \le e^2 - 5$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow$ $e^x f(x) + x - 6 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{6-x}{e^x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

δ) Επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\ell n3,\ell n8]$, το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\ell n3$ και $x=\ell n8$ είναι:

$$E=\int_{\ell n3}^{\ell n8} f(x)dx$$

Έχουμε:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8}\left(\sqrt{1+e^t}\left(\int_{\ln 3}^{\ln 8} f(t)\,dt\right)\right)dt=4+\ell n\frac{9}{4}\Leftrightarrow$$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8}\left(E\cdot\sqrt{1+e^t}\right)dt=4+\ell n\frac{9}{4}\Leftrightarrow$$

$$E\cdot\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+e^t}\,dt=4+\ell n\frac{9}{4}\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{4+\ell n\frac{9}{4}}{\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{1+e^t}\,dt}$$

Έστω:

$$I=\int_{\ell n3}^{\ell n8}\sqrt{1+e^t}dt$$

Θέτουμε:

$$u=\sqrt{1+e^t}\Rightarrow u^2=1+e^t$$

Οπότε:

$$2udu=e^t dt\Leftrightarrow dt=\frac{2u}{u^2-1}$$

Για $t=\ell n3$ είναι $u=\sqrt{1+e^{\ell n3}}=2$ και για $t=\ell n8$ είναι $u=\sqrt{1+e^{\ell n8}}=3$

Έχουμε:

$$I=\int_2^3 u\cdot\frac{2u}{u^2-1}du=\int_2^3\frac{2u^2}{u^2-1}du=\int_2^3\left(2+\frac{2}{u^2-1}\right)du$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς A,B έτσι, ώστε για κάθε $u\in(2,3)$ να ισχύει:

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}\Leftrightarrow A(u+1)+B(u-1)=2\Leftrightarrow$$

$$(A+B)u+A-B=2\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\A-B=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases}$$

Άρα:

$$I=\int_2^3 2du+\int_2^3 \frac{2}{u^2-1}du=2\cdot(3-2)+\int_2^3\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du=$$

$$=2+\int_2^3 \frac{1}{u-1}(u-1)'du-\int_2^3 \frac{1}{u+1}(u+1)'du=$$

$$=2+\int_2^3 \frac{1}{u-1}(u-1)'du-\int_2^3 \frac{1}{u+1}(u+1)'du=$$

$$=2+\left[\ell n|u-1|\right]_2^3-\left[\ell n|u+1|\right]_2^3=2+\ell n\frac{3}{2}$$

Οπότε:

$$E=\frac{4+\ell n\frac{9}{4}}{2+\ell n\frac{3}{2}}=\frac{4+\ell n\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2+\ell n\frac{3}{2}}=\frac{4+2\ell n\frac{3}{2}}{2+\ell n\frac{3}{2}}=\frac{2\left(2+\ell n\frac{3}{2}\right)}{2+\ell n\frac{3}{2}}=2$$

ΘΕΜΑ 22ο : (38ο – 2014):

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\mathbf{f(x)\neq 0}$ **για κάθε** $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$
- $\mathbf{\left(3x^2f^2(x)-1\right)f'(x)+xf''(x)=0}$, **για κάθε** $\mathbf{x\neq 0}$
- $\mathbf{f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **και** $\mathbf{f'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{4}}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$ **,** $\mathbf{x\in\mathbb{R}}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της $\mathbf{C_f}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\mathbf{f(x)+f(3x)=f(2x)+f(5x)}$

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\mathbf{h(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}}$ **ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι**

$$\mathbf{f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)f(\beta)}\ \ \textbf{για}\ \ \mathbf{1<\alpha<\beta}$$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(1)=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$\left(3x^2f^2(x)-1\right)f'(x)+xf''(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)-f'(x)+xf''(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2f^2(x)f'(x)=f'(x)-xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)f'(x)=\frac{f'(x)-xf''(x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(f^3(x)\right)'=\left(-\frac{f'(x)}{x}\right)'$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_1 \Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_1x$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$f^3(x)=-\frac{f'(x)}{x}+c_2 \Leftrightarrow f'(x)=-xf^3(x)+c_2x$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-xf^3(x)+c_1x\right)=0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-xf^3(x)+c_2x\right)=0$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=0$$

Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o=0$ ισχύει $f'(0)=\lim_{x\to 0} f'(x)=0$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases} -xf^3(x)+c_1x &, \quad x<0 \\ 0 &, \quad x=0 \\ -xf^3(x)+c_2x &, \quad x>0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και ισχύει:

$$f''(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} \qquad (1)$$

Για $x<0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-xf^3(x)+c_1x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left(-f^3(x)+c_1\right)=-f^3(0)+c_1$$

Για $x>0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-xf^3(x)+c_2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-f^3(x)+c_2\right)=-f^3(0)+c_2$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\Leftrightarrow$$

$$-f^3(0)+c_1=-f^3(0)+c_2\Leftrightarrow c_1=c_2$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$f'(1)=-f^3(1)+c_2\Rightarrow-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+c_2\Rightarrow c_2=0,\text{ οπότε και } c_1=0$$

Άρα:

$$f'(x)=\begin{cases}-xf^3(x) & , \ x<0\\ 0 & , \ x=0\\ -xf^3(x) & , \ x>0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=-xf^3(x),\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=-xf^3(x)\Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x)=-x\Leftrightarrow$$

$$f^{-3}(x)f'(x)=-x\Leftrightarrow-2f^{-3}(x)f'(x)=2x\Leftrightarrow$$

$$\left(f^{-2}(x)\right)'=(x^2)'\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)}=x^2+c$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$\frac{1}{f^2(1)}=1+c\Rightarrow 2=1+c\Rightarrow c=1$$

Άρα:

$$\frac{1}{f^2(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f^2(x)=\frac{1}{x^2+1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in R$$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f'(x)=-xf^3(x)$$

Όμως $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow x<0$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$
- Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o=0$ με μέγιστη τιμή $f(0)=1$

Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f''(x)=-f^3(x)-x\cdot 3f^2(x)f'(x)=-f^2(x)\left(f(x)+3xf'(x)\right)=$$

$$=-f^2(x)\left(f(x)+3x\left(-xf^3(x)\right)\right)=-f^3(x)\left(1-3x^2f^2(x)\right)=$$

$$=-f^3(x)\left(1-3x^2\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)=-f^3(x)\left(\frac{1-2x^2}{x^2+1}\right)=\frac{2x^2-1}{x^2+1}\cdot f^3(x)$$

Όμως $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, οπότε:

- $f''(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f''(x)>0\Leftrightarrow x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$

Το πρόσημο της $f''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\cup$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cap$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cup$	
			Σ.Κ.		Σ.Κ.		

Επομένως:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

- Η f'' μηδενίζεται στο $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

- Η f'' μηδενίζεται στο $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

γ) Προφανής λύση η $x = 0$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x > 2x \\ 3x > 5x \end{cases} \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\begin{cases} x < 2x \\ 3x < 5x \end{cases} \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Άρα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-x f^3(x)}{f(x)} = -x f^2(x) = -\frac{x}{x^2+1}$$

Οπότε:

$$h'(x) = -\frac{(x^2+1) - x\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot f^2(x)\ , \quad x \in R$$

Όμως $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad ή \quad x > 1$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↗		↘		↗	

Επομένως:

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[-1\,,1]$ και $h'(x)<0$ για κάθε $x\in(-1\,,1)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1\,,1]$
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1\,,+\infty)$ και $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1\,,+\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\ell nf(x)\ ,\ x>1$,

Για κάθε $x\in(1\,,+\infty)$ είναι:

$$K'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=h(x)$$

Η συνάρτηση K είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\alpha\,,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right]\,,\ \left[\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \beta\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(\alpha\,,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\,,\ \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \beta\right)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

- ♦ $\xi_1\in\left(\alpha\,,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $K'(\xi_1)=\dfrac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\dfrac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

- ♦ $\xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,,\ \beta\right)$ τέτοιο, ώστε $K'(\xi_2)=\dfrac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Είναι:

$$1<\xi_1<\xi_2\overset{K'\uparrow}{\Rightarrow}K'(\xi_1)<K'(\xi_2)\Rightarrow\frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<\frac{K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}\Rightarrow$$

$$K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-K(\alpha)<K(\beta)-K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow 2K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<K(\alpha)+K(\beta)\Rightarrow$$

$$2\ell nf\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\ell nf(\alpha)+\ell nf(\beta)\Rightarrow\ell nf^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\ell n\big(f(\alpha)f(\beta)\big)\Rightarrow$$

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<f(\alpha)f(\beta)$$

ΘΕΜΑ 23ο : (39ο – 2014):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f(1)+f(-1)=0$ και**
- **$f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$**

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}$ είναι σταθερή στο R

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=2\left(e^x-e^{-x}\right)$, $x \in R$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και την αντίστροφη συνάρτηση της f

ε) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 \ell n\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}dx = 3\ell n2-1$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η συνάρτηση $\sqrt{16+f^2(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο R

Από υπόθεση είναι $f'(x)=\sqrt{16+f^2(x)}$ για κάθε $x \in R$, οπότε η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με:

$$f''(x)=\frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{16+f^2(x)}}=\frac{f(x)f'(x)}{f'(x)}=f(x)$$

Άρα:

$$f''(x)=f(x) \text{ για κάθε } x \in R \quad (1)$$

Η συνάρτηση

$$g(x)=\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}, \quad x \in R$$

είναι παραγωγίσιμη στο R, ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x)=\left(f''(x)+f'(x)\right)e^{-x}+\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}(-x)'=$$

$$=e^{-x}\left(f''(x)+f'(x)-f'(x)-f(x)\right)=e^{-x}\left(f''(x)-f(x)\right)\overset{(1)}{=}0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R

β) Έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \overset{(1)}{=} \int_{-1}^{1} f''(x)dx=\left[f'(x)\right]_{-1}^{1}=f'(1)-f'(-1)=$$

$$=\sqrt{16+f^2(1)}-\sqrt{16+f^2(-1)}=\frac{f^2(1)-f^2(-1)}{\sqrt{16+f^2(1)}+\sqrt{16+f^2(-1)}}=$$

$$=\frac{\left(f(1)-f(-1)\right)\left(f(1)+f(-1)\right)}{\sqrt{16+f^2(1)}+\sqrt{16+f^2(-1)}}=0, \text{ αφού } f(1)+f(-1)=0$$

γ) Η συνάρτηση g είναι σταθερή στο R, άρα για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g(x) = c \Leftrightarrow \left(f'(x) + f(x)\right)e^{-x} = c \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ce^{x} \quad (2)$$

Είναι:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = \sqrt{16 + f^2(0)} = \sqrt{16} = 4$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(0) + f(0) = ce^0 \Leftrightarrow 4 + 0 = c \Leftrightarrow c = 4$$

Οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x) + f(x) = 4e^{x}, \ x \in R \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με e^x, οπότε έχουμε:

$$f'(x)e^x + f(x)e^x = 4e^{2x} \Leftrightarrow \left(f(x)e^x\right)' = \left(2e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x)e^x = 2e^{2x} + c_1 \Rightarrow f(x) = 2e^x + c_1 e^{-x}, \ x \in R \quad (4)$$

Για $x = 0$ από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) = 2e^0 + c_1 e^0 \Leftrightarrow 0 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

Οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) = 2e^x - 2e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 2\left(e^x - e^{-x}\right), \ x \in R$$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = 2\left(e^x + e^{-x}\right) > 0, \ x \in R$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) \ , \ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[2(e^x - e^{-x})\right] = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} \overset{-x=t}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[2(e^x - e^{-x})\right] = +\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \overset{-x=t}{=} \lim\limits_{t\to-\infty} e^t = 0$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A) = (-\infty, +\infty) = R$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, θα είναι και "1−1", οπότε αντιστρέφεται. Αν θέσουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = 2(e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow y = 2e^x - \frac{2}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$2(e^x)^2 - ye^x - 2 = 0 \overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \ell n\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4}\right), \ y \in R$$

Άρα:

$$f^{-1}: R \to R \text{ με } f^{-1}(x) = \ell n\left(\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}\right)$$

ε) Είναι:

$$I = \int_0^3 \ell n\frac{x+\sqrt{x^2+16}}{4}dx = \int_0^3 f^{-1}(x)\,dx$$

Θέτουμε:

$$u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u),\ \text{οπότε } dx = f'(u)\,du$$

Για $x=0$ είναι $u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \ell n\dfrac{0+\sqrt{16}}{4} = \ell n1 = 0$

Για $x=3$ είναι $u = f^{-1}(3) \Leftrightarrow u = \ell n\dfrac{3+\sqrt{9+16}}{4} = \ell n2$

Είναι:

$$I = \int_0^{\ell n2} u f'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^{\ell n2} - \int_0^{\ell n2} f(u)du =$$

$$= \ell n2 \cdot f(\ell n2) - \int_0^{\ell n2}\left(2e^u - 2e^{-u}\right)du =$$

$$= \ell n2 \cdot f(\ell n2) - \left[2e^u + 2e^{-u}\right]_0^{\ell n2} =$$

$$= \ell n2 \cdot f(\ell n2) - \left(2e^{\ell n2} + \frac{2}{e^{\ell n2}} - 4\right) =$$

$$= 3\ell n2 - (4+1-4) = 3\ell n2 - 1,$$

αφού:

$$f(\ell n2) = 2e^{\ell n2} + \frac{2}{e^{\ell n2}} = 2 + \frac{2}{2} = 3$$

ΘΕΜΑ 24ο : (40ο – 2014):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- **$f'(1) = 1-\alpha$, $\alpha > 0$ και**
- **$f\left(\dfrac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \dfrac{\alpha x}{y}$ για κάθε $x, y > 0$ (1)**

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ell nx - \alpha x$, $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e, f(e))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α για την οποία ισχύει $f(x) \le 1$, για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$

δ) Αν $g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x})$, $x \in R$, $\alpha > 0$, να βρείτε τη τιμή του α ώστε η ελάχιστη τιμή της g να γίνεται μέγιστη.

ΛΥΣΗ

α) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερά, έχουμε:

$$\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right)' = \left(f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = 0 - f'(y) + 0 - \alpha + \frac{\alpha x}{y^2}\,,\ y > 0$$

Για $y = 1$ έχουμε:

$$f'(x)(-x) = -f'(1) - \alpha + \alpha x \Leftrightarrow$$

$$-x f'(x) = -(1-\alpha) - \alpha + \alpha x \Leftrightarrow$$

$$x f'(x) = 1 - \alpha x \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ell n x - \alpha x)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ell n x - \alpha x + c\,,\ x > 0 \quad (2)$$

Για $x = y = 1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f(1) = f(1) - f(1) + \alpha - \alpha - \alpha \Leftrightarrow$$

$$f(1) = -\alpha \quad (3)$$

Για $x = 1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(1) = \ell n 1 - \alpha + c \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$-\alpha = -\alpha + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$f(x) = \ell n x - \alpha x\,,\ x > 0$$

β) Για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ell n x - \alpha x)' = \frac{1}{x} - \alpha$$

Οπότε:

$$f'(e) = \frac{1}{e} - \alpha$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $A(e\,, f(e))$ είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow$$

$$y-(1-\alpha e)=\left(\frac{1}{e}-\alpha\right)(x-e)\Leftrightarrow$$

$$y=\left(\frac{1}{e}-\alpha\right)x$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, αφού επαληθεύεται για $x=0$ και $y=0$

γ) Για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\alpha=\frac{1-\alpha x}{x}$$

Είναι:

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-\alpha x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\alpha}$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow 1-\alpha x>0\Leftrightarrow \alpha x<1\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} x<\dfrac{1}{\alpha}$

Το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\ell n\alpha-1$	$\searrow$	
			μέγιστο		

Η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o=\dfrac{1}{\alpha}$ με μέγιστη τιμή $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\ell n\dfrac{1}{\alpha}-\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}=-\ell n\alpha-1$,

επομένως έχουμε:

$$f(x)\le-\ell n\alpha-1 \text{ για κάθε } x\in(0\,,+\infty)$$

Για να ισχύει $f(x)\le 1$ για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ πρέπει και αρκεί

$$-\ell n\alpha-1\le 1\Leftrightarrow \ell n\alpha\ge-2\Leftrightarrow \ell n\alpha\ge \ell ne^{-2}\Leftrightarrow \alpha\ge\frac{1}{e^2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του α ώστε να ισχύει $f(x)\le 1$ για κάθε $x\in(0\,,+\infty)$ είναι $\alpha=\dfrac{1}{e^2}$

δ) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$g(x)=-\frac{1}{\alpha}f(e^{\alpha x})=-\frac{1}{\alpha}\cdot(\ell ne^{\alpha x}-\alpha e^{\alpha x})=-\frac{1}{\alpha}\cdot(\alpha x-\alpha e^{\alpha x})=e^{\alpha x}-x$$

$$g'(x)=(e^{\alpha x}-x)'=\alpha e^{\alpha x}-1$$

Είναι:

- $g'(x)=0\Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x}=1\Leftrightarrow e^{\alpha x}=\dfrac{1}{\alpha}\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\ell ne^{\alpha x}=\ell n\dfrac{1}{\alpha}\Leftrightarrow \alpha x=-\ell n\alpha\Leftrightarrow x=-\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$
- $g'(x)>0\Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x}>1\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} e^{\alpha x}>\dfrac{1}{\alpha}\Leftrightarrow \ell ne^{\alpha x}>\ell n\dfrac{1}{\alpha}\Leftrightarrow \alpha x>-\ell n\alpha\Leftrightarrow x>-\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	$-\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\dfrac{1+\ell n\alpha}{\alpha}$	$\nearrow$
		ελάχιστο	

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha}$ με ελάχιστη τιμή

$$g\left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right) = e^{\alpha\left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right)} - \left(-\frac{\ell n\alpha}{\alpha}\right) = e^{-\ell n\alpha} + \frac{\ell n\alpha}{\alpha} = \frac{1}{e^{\ell n\alpha}} + \frac{\ell n\alpha}{\alpha} = \frac{1+\ell n\alpha}{\alpha}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(\alpha) = \frac{1+\ell n\alpha}{\alpha}\ ,\ \alpha > 0$$

Για κάθε $\alpha \in (0, +\infty)$ είναι:

$$h'(\alpha) = \frac{\left(1+\ell n\alpha\right)'\cdot\alpha - 1\cdot\left(1+\ell n\alpha\right)}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{1-1-\ell n\alpha}{\alpha^2} = -\frac{\ell n\alpha}{\alpha^2}$$

Είναι:

- $h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \ell n\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$
- $h'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\ell n\alpha}{\alpha^2} > 0 \Leftrightarrow \ell n\alpha < 0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < 1$

Το πρόσημο της $h'(\alpha)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0	1	$+\infty$
$h'(\alpha)$	$+$	0	$-$
$h(\alpha)$	$\nearrow$		$\searrow$
		μέγιστο	

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση h παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\alpha = 1$, οπότε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g γίνεται μέγιστη όταν $\alpha = 1$

ΘΕΜΑ 25ο : (41ο – 2014):

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in R^*$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και ότι η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \frac{1}{2}x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο κοινό της σημείο με τον άξονα $y'y$

γ) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$\left(xf(x)\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow xf(x) = \begin{cases} e^x + c_1 & , \quad x < 0 \\ e^x + c_2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, άρα είναι συνεχής και στο $x_o = 0$, οπότε:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Είναι:

- $\lim_{x \to 0^-} \left(xf(x)\right) = \lim_{x \to 0^-} \left(e^x + c_1\right) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1$
- $\lim_{x \to 0^+} \left(xf(x)\right) = \lim_{x \to 0^+} \left(e^x + c_2\right) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1$

Άρα για κάθε $x \in R^*$ έχουμε:

$$xf(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 0$, άρα:

$$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0} = 1 \qquad (1)$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

β) Για κάθε x κοντά στο $x_o = 0$ είναι:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x} = \frac{e^x-1-x}{x^2}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right) \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$ με $f'(0) = \frac{1}{2}$

Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι το $A(0, f(0))$, δηλαδή σημείο $A(0,1)$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο A έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon):\ y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x+1$$

γ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \frac{e^x x-(e^x-1)}{x^2} = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},$$

όπου $g(x) = xe^x - e^x + 1,\ x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$g'(x) = \left(xe^x - e^x + 1\right)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ελάχιστο

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$ με ελάχιστη τιμή $g(0) = 0\cdot e^0 - e^0 + 1 = 0$

Έχουμε:

- Για $x < 0 \overset{g\searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$
- Για $x > 0 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$

Οπότε είναι:

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Επειδή $f'(0) = \frac{1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R

δ) Για κάθε $x \in R^*$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\right)' = \frac{(xe^x - e^x + 1)' \cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1)\cdot (x^2)'}{x^4} =$$

$$= \frac{(e^x + xe^x - e^x)\cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{x^3e^x - 2x^2e^x + 2xe^x - 2x}{x^4} = \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3},$$

όπου $h(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$, $x \in R$

Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$h'(x) = \left(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2\right)' =$$
$$= 2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2e^x$$

Άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $x_o = 0$, οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο R

Όμως $h(0) = 0\cdot e^0 - 2\cdot 0\cdot e^0 + 2e^0 - 2 = 0$ και η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε έχουμε:

- Για $x < 0 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- Για $x > 0 \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

Επομένως

- Αν $x < 0$ τότε $f''(x) > 0$, αφού $h(x) < 0$ και $x^3 < 0$
- Αν $x > 0$ τότε $f''(x) > 0$, αφού $h(x) > 0$ και $x^3 > 0$

Άρα

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in R^*$$

Είναι:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{xe^x - e^x + e^x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

Οπότε η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o = 0$

Αφού $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in R^*$ και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $x_o = 0$, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R

ΘΕΜΑ 26ο : (42ο – 2014):

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha\ell nx+x+\alpha$ και $g(x)=\dfrac{x\ell nx}{x+\alpha}$, όπου $\alpha>0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ

β) Να αποδείξετε ότι $g(x)\geq -\dfrac{\rho}{\alpha}$ για κάθε $x>0$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha\left(x\ell nx-\lambda\right)=\lambda x$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$f'(x)=\frac{\alpha}{x}+1>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to 0^+}f(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\alpha\ell nx+x+\alpha\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(\alpha\ell nx)\overset{\alpha>0}{=}-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+\alpha\right)=\alpha$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha\ell nx+x+\alpha\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(\alpha\ell nx)\overset{\alpha>0}{=}+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\alpha)=+\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(A)=(-\infty,+\infty)=R$

Το $0\in f(A)=R$ επομένως θα υπάρχει $\rho\in A=(0,+\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$

β) Είναι:

$$A_g=(0,+\infty),\ \text{αφού}\ x+\alpha>0\ \text{για κάθε}\ x>0$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\frac{x\ell nx}{x+\alpha}\right)'=\frac{(\ell nx+1)(x+\alpha)-x\ell nx}{(x+\alpha)^2}=\frac{\alpha\ell nx+x+\alpha}{(x+\alpha)^2}=\frac{f(x)}{(x+\alpha)^2}\qquad(1)$$

Από το (α) ερώτημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

- Για $0<x<\rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)<f(\rho)\Rightarrow f(x)<0$
- Για $x>\rho \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x)>f(\rho)\Rightarrow f(x)>0$

Από τη σχέση (1) και επειδή $(x+\alpha)^2>0$ για κάθε $x\in A_g$, έχουμε:

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=\rho$
- $g'(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<\rho$
- $g'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow x>\rho$

Το πρόσημο της $g'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		ρ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\dfrac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha}$	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=\rho$ με ελάχιστη τιμή $g(\rho)=\dfrac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha}$

Άρα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$g(x)\geq g(\rho) \Rightarrow g(x)\geq \frac{\rho\ell n\rho}{\rho+\alpha} \qquad (2)$$

Όμως ρ ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$, οπότε ισχύει $\alpha\ell n\rho+\rho+\alpha=0 \Leftrightarrow \ell n\rho=-\dfrac{\rho+\alpha}{\alpha}$ (3)

Η σχέση (2) με βάση τη σχέση (3) γράφεται:

$$g(x)\geq \frac{\rho\cdot\left(-\dfrac{\rho+\alpha}{\alpha}\right)}{\rho+\alpha} \Rightarrow g(x)\geq -\frac{\rho}{\alpha}\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

γ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$g''(x)=\left(\frac{\alpha\ell nx+x+\alpha}{(x+\alpha)^2}\right)'=\frac{\left(\dfrac{\alpha}{x}+1\right)(x+\alpha)^2-2(x+\alpha)(\alpha\ell nx+x+\alpha)}{(x+\alpha)^4}=$$

$$=\frac{(x+\alpha)^2-2x(\alpha\ell nx+x+\alpha)}{x(x+\alpha)^3}=\frac{\alpha^2-x^2-2x\alpha\ell nx}{x(x+\alpha)^3}=\frac{h(x)}{x(x+\alpha)^3} \qquad (4)$$

όπου $h(x)=\alpha^2-x^2-2x\alpha\ell nx\ ,\ x>0$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι:

$$h'(x)=-2x-2\alpha\ell nx-2\alpha=-2(\alpha\ell nx+x+\alpha)=-2f(x)$$

Είναι:

- $h'(x)=0 \Leftrightarrow -2f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=\rho$
- $h'(x)>0 \Leftrightarrow -2f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x<\rho$

Το πρόσημο της $h'(x)$ καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης h φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		ρ		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\alpha^2 \nearrow$	$h(\rho)$	$\searrow$	
			μέγιστο		

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+} h(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x\ell nx\right) = \alpha^2$$

Αφού

$$\lim_{x\to0^+}(x\ell nx) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \underset{\text{D.L.H}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0 \qquad (5)$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0\,,\,\rho]$, επομένως:

$$h(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to0^+} h(x)\,,\,h(\rho)\right] = \left(\alpha^2\,,\,h(\rho)\right]$$

Άρα για κάθε $x\in\Delta_1 = (0\,,\,\rho]$ είναι:

$$h(\rho) \ge h(x) > \alpha^2 > 0 \qquad (6)$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x\ell nx\right) = -\infty$$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\rho\,,+\infty)$, επομένως:

$$h(\Delta_2) = \left(\lim_{x\to+\infty} h(x)\,,\,h(\rho)\right] = \left(-\infty\,,\,h(\rho)\right]$$

Το $0\in h(\Delta_2)$ επομένως θα υπάρχει $x_o\in\Delta_2 = [\rho\,,+\infty)$ και μάλιστα μοναδικό, αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [\rho\,,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) = 0$

Έχουμε:

- Για $\rho < x < x_o \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_o) \Rightarrow h(x) > 0 \qquad (7)$
- Για $x > x_o \overset{h\searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_o) \Rightarrow h(x) < 0 \qquad (8)$

Από τις σχέσεις (6) και (7) για κάθε $x\in(0\,,x_o)$ έχουμε:

$$h(x) > 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} g''(x) > 0\,,\quad \text{αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x\in A_g = (0\,,+\infty)$$

Από τη σχέση (8) για κάθε $x\in(x_o\,,+\infty)$ έχουμε:

$$h(x) < 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} g''(x) < 0\,,\quad \text{αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x\in A_g = (0\,,+\infty)$$

Αφού $x(x+\alpha)^3 > 0$ για κάθε $x\in A_g = (0\,,+\infty)$

Το πρόσημο της $g''(x)$ καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	0		x_o		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\cup$	$g(x_o)$	$\cap$	
			Σ.Κ.		

Επομένως η συνάρτηση g έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $M(x_o, g(x_o))$

δ) Έχουμε:

$$\alpha(x\ell nx-\lambda)=\lambda x \Leftrightarrow \alpha x\ell nx=\lambda(\alpha+x) \Leftrightarrow \frac{x\ell nx}{\alpha+x}=\frac{\lambda}{\alpha} \Leftrightarrow g(x)=\frac{\lambda}{\alpha} \qquad (9)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (9) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g και της ευθείας $y=\frac{\lambda}{\alpha}$, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Από (β) ερώτημα έχουμε:

x	0		ρ		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\rho}{\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$
			ελάχιστο		

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ell nx}{x+\alpha}\overset{(5)}{=}\frac{0}{0+\alpha}=0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\ell nx}{x+\alpha}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\ell nx}{x\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ell nx}{1+\frac{\alpha}{x}}=+\infty$
- $g(x)=0 \Leftrightarrow x\ell nx=0 \Leftrightarrow x=1$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}<-\frac{\rho}{\alpha} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \lambda<-\rho$, τότε η εξίσωση (9) είναι αδύνατη.
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}=-\frac{\rho}{\alpha} \Leftrightarrow \lambda=-\rho$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1=\rho$
- Αν $-\frac{\rho}{\alpha}<\frac{\lambda}{\alpha}<0 \Leftrightarrow -\rho<\lambda<0$, τότε η εξίσωση (9) έχει δύο ρίζες $\rho_1\in(0,\rho)$ και $\rho_2\in(\rho,1)$
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \lambda=0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1=1$
- Αν $\frac{\lambda}{\alpha}>0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \lambda>0$, τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα $\rho_1>1$