ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ 2010
ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο (7ο – 2010):

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=2$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x))+4f(x)=6-x^4$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f\left(-\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=0$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+4f(x)-5}{x-1}=-4$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(f(x))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x))+1=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x=0$ από την (1) έχουμε: $f(f(0))+4f(0)=6\Rightarrow f(2)+4\cdot 2=6\Rightarrow f(2)=-2$.

Για $x=2$ από την (1) έχουμε: $f(f(2))+4f(2)=6-2^4\Rightarrow f(-2)+4\cdot(-2)=6-16\Rightarrow f(-2)=-2$.

β) Είναι $f(-2)=-2<0<2=f(0)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2,0]$, επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(-2\ ,\ 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_o)=0$.

Για $x=x_o$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_o))+4f(x_o)=6-x_o^4\Rightarrow f(0)+4\cdot 0=6-x_o^4\Rightarrow 2=6-x_o^4\Rightarrow x_o^4=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_o=\sqrt{2}\text{ ή }x_o=-\sqrt{2}\Rightarrow x_o=-\sqrt{2},\text{ αφού }x_o\in(-2\ ,\ 0).\quad\text{Άρα }f\left(-\sqrt{2}\right)=0.$$

Είναι $f(2)=-2<0<2=f(0)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0\ ,\ 2]$, επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0\ ,\ 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$.

Για $x=x_1$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_1))+4f(x_1)=6-x_1^4\Rightarrow f(0)+4\cdot 0=6-x_1^4\Rightarrow 2=6-x_1^4\Rightarrow x_1^4=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\sqrt{2}\text{ ή }x_1=-\sqrt{2}\Rightarrow x_1=\sqrt{2},\text{ αφού }x_1\in(0\ ,\ 2).\quad\text{Άρα }f\left(\sqrt{2}\right)=0.$$

γ) Για $x \neq 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{x^4+4f(x)-5}{x-1}$, οπότε $f(x)=\dfrac{(x-1)g(x)-x^4+5}{4}$ (2)

Από υπόθεση είναι $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-4$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)g(x)-x^4+5}{4}=1$, και

$\lim\limits_{x\to 1} f(f(x)) \overset{u=f(x)}{=} \lim\limits_{u\to 1} f(u)=1.$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(f(x))+1,\ \ x\in R$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-\sqrt{2},0]$ και $[0,\sqrt{2}]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της $f(f(x))$ που είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και της σταθερής συνάρτησης 1.

Είναι:

- $g(-\sqrt{2})=f(f(-\sqrt{2}))+1=f(0)+1=2+1=3.$
- $g(0)=f(f(0))+1=f(2)+1=-2+1=-1.$
- $g(\sqrt{2})=f(f(\sqrt{2}))+1=f(0)+1=2+1=3.$

Επομένως $g(-\sqrt{2})\cdot g(0)=-3<0$ και $g(0)\cdot g(\sqrt{2})=-3<0$.

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε δύο διαστήματα, άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(f(x))+1=0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\sqrt{2},0)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\sqrt{2})$, δηλαδή δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

ΘΕΜΑ 2ο (8ο – 2010)

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: R\to R$. Αν $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{f(x+1)}=1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu x)}{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y=x-1$ σε ένα ακριβώς σημείο (x_o, y_o) με $x_o\in(0,1)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{f(x+1)}=1 \overset{u=x+1}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{f(u)}=1$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u)=\dfrac{u}{f(u)}$, για u κοντά στο 0, οπότε $g(u)\cdot f(u)=u$ και από (1)

έχουμε $\lim\limits_{u\to 0} g(u)=1$ (2).

Είναι $\lim\limits_{u\to 0}[g(u)\cdot f(u)]=\lim\limits_{u\to 0} u \Leftrightarrow \lim\limits_{u\to 0} g(u)\cdot \lim\limits_{u\to 0} f(u)=0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{u\to 0} f(u)=0$ και αφού η f είναι συνεχής

ισχύει $f(0)=0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για x κοντά στο 0 είναι:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\overset{u=\eta\mu x}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{u}{f(u)}}\overset{(1)}{=}\frac{1}{1}=1.$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1.$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_o\in(0\,,1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x+1,\ x\in R$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0\,,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(0)=f(0)-0+1\overset{(\alpha)}{=}1>0$ και $h(1)=f(1)-1+1=f(1)<0$, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε $1>0\Leftrightarrow f(1)<f(0)=0$. Άρα $h(0)h(1)<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x-1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_o\in(0\,,1)$.

Για $x_1,x_2\in(0\,,1)$ με $x_1<x_2$ ισχύουν:

$$f(x_1)>f(x_2)\qquad\text{και}\qquad -x_1+1>-x_2+1,$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x_1)-x_1+1>f(x_2)-x_2+1\Leftrightarrow h(x_1)>h(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,1)$, οπότε η ρίζα x_o είναι μοναδική.

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=x-1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_o\in(0\,,1)$.

ΘΕΜΑ 3ο (9ο – 2010)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)=x^6$ για κάθε $x\in R$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty\,,0)$ και $(0\,,+\infty)$.

γ) Αν $f(-2)>0$ και $f(2)<0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^3$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow x^6=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο R μοναδική ρίζα την $x=0$.

β) Η συνάρτηση f στο $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η συνάρτηση f στο $(0,+\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

γ) Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$ και από υπόθεση είναι $f(-2)>0$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x)=x^6 \Leftrightarrow f(x)=-x^3, \text{ αφού } x<0.$$

Επειδή $f(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(x)=-x^3 \text{ για κάθε } x\in(-\infty,0] \quad (1).$$

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και από υπόθεση είναι $f(2)<0$, οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x)=x^6 \Leftrightarrow f(x)=-x^3, \text{ αφού } x>0.$$

Επειδή $f(0)=0$ έχουμε τελικά:

$$f(x)=-x^3 \text{ για κάθε } x\in[0,+\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x)=-x^3 \text{ για κάθε } x\in R.$$

δ) Έστω $x_1,x_2\in R$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1^3=-x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3=x_2^3 \Leftrightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι «1 – 1» στο R, οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1}, λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x.

Έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=-x^3 \Leftrightarrow (-x)^3=y \Leftrightarrow -x=\begin{cases}-\sqrt[3]{-y}, & y<0\\ \sqrt[3]{y}, & y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow x=\begin{cases}\sqrt[3]{-y}, & y<0\\ -\sqrt[3]{y}, & y\ge 0\end{cases}.$$

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ έχουμε $f^{-1}(y)=\begin{cases}\sqrt[3]{-y}, & y<0\\ -\sqrt[3]{y}, & y\ge 0\end{cases}$.

Επομένως:

$$f^{-1}:R\to R \text{ με } f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{-x}, & x<0\\ -\sqrt[3]{x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \overset{f:1\text{-}1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f\left(f^{-1}(x)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = -x^3 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x^3 + y^3 + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ (x+y)\left(\underbrace{x^2 - xy + y^2 + 1}_{\neq 0}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = -1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1) \text{ ή } (0, 0) \text{ ή } (1, -1).$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι τα:

$$A(-1, 1) \ , \ O(0, 0) \ \text{ και } \ B(1, -1).$$

ΘΕΜΑ 4ο (10ο – 2010)

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:

$$\textbf{(1)} \quad f^2(x) + ημ^2 x = 2x f(x) \text{ για κάθε } x \in R \quad \text{και}$$

$$\textbf{(2)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \ell .$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\ell = 1$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(ημx)}{x^2 - x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης f.

ΛΥΣΗ

α) i) Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x^2 \neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{ημx}{x}\right)^2 = 2\frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in R^* \qquad (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in R$. Αν πάρουμε τα όρια και των δύο μελών στη σχέση (3) έχουμε:

$$\ell^2 + 1 = 2\ell \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 1, \quad \text{δηλαδή } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (4).$$

β) Για x κοντά στο $x_o = 0$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \overset{u=\eta\mu x}{=} \lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} \overset{(4)}{=} 1$ (5), οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x-1} \overset{(5)}{=} 1\cdot 1\cdot(-1) = -1.$$

γ) Για κάθε $x\in R$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$f^2(x) - 2x f(x) + x^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 - \eta\mu^2 x$ (6).

Αν ισχύει $g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0$.

Θυμίζουμε ότι, για κάθε $x\in R$ ισχύει $|\eta\mu x| \le |x|$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα για $x \ne 0$ έχουμε $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \ne 0$

Η συνάρτηση λοιπόν $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται στο R^*, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

♦ Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

- Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (I).$$

- Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (II).$$

♦ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

- Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (III).$$

- Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (IV).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις:

➢ (I) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x\in R$.

➢ (I) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}, & x \ge 0 \end{cases}$.

- (ΙΙ) και (ΙΙΙ) και επειδή $f(0)=0$ έχουμε $f(x)=\begin{cases} x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, & x<0 \\ x-\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}, & x\geq 0 \end{cases}$.

- (ΙΙ) και (ΙV) και επειδή $f(0)=0$ έχουμε $f(x)=x+\sqrt{x^2-\eta\mu^2 x}\ ,\ x\in R$.

ΘΕΜΑ 5ο (13ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,e)\to R$ με $f(1)=0$ η οποία για κάθε $x\in(0,e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ell n\left(f'(x)\right)=f(x)-\ell nx$.

Α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Β. Αν $f(x)=-\ell n\left(1-\ell nx\right),\ x\in(0,e)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1-\ell nx=\dfrac{1}{e^{\alpha}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$.

ΛΥΣΗ

Α. Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι:

$$\ell n\left(f'(x)\right)=f(x)-\ell nx \Leftrightarrow f'(x)=e^{f(x)-\ell nx} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{-f(x)}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(-e^{-f(x)}\right)'=\left(\ell nx\right)' \Leftrightarrow -e^{-f(x)}=\ell nx+c.$$

Είναι $f(1)=0$, οπότε $-e^{o}=\ell n1+c \Leftrightarrow c=-1$.

Επομένως έχουμε:

$$-e^{-f(x)}=\ell nx-1 \Leftrightarrow e^{-f(x)}=1-\ell nx \Leftrightarrow -f(x)=\ell n\left(1-\ell nx\right) \Leftrightarrow f(x)=-\ell n\left(1-\ell nx\right),\ x\in(0,e).$$

Β. α) Στο διάστημα $(0,e)$ από υπόθεση ορίζεται η $\ell n\left(f'(x)\right)$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,e)$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e)$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,e)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to e^-}f(x)\right)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-\ell n\left(1-\ell nx\right)\right)\overset{1-\ell nx=t}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(-\ell nt\right)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\left(-\ell n\left(1-\ell nx\right)\right)\overset{1-\ell nx=t}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\left(-\ell nt\right)=+\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A)=R$.

γ) Για κάθε $x \in (0\,,e)$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(1-\ell n x)}\right)' = \frac{-\left[x(1-\ell n x)\right]'}{\left[x(1-\ell n x)\right]^2} = \frac{-(1-\ell n x)+1}{x^2(1-\ell n x)^2} = \frac{\ell n x}{x^2(1-\ell n x)^2}$$

Το πρόσημο της f'', η μονοτονία και τα ακρότατα της f', φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0		1		e
f''	‖	$-$	0	$+$	‖
f'	‖	↘	1	↗	‖
			ελάχ.		

Έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $(0\,,1]$ και $f''(x)<0$ στο $(0\,,1)$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,1]$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[1\,,e)$ και $f''(x)>0$ στο $(1\,,e)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1\,,e)$.
- Η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=1$, με ελάχιστη τιμή $f'(1)=1$.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, όταν $x=1$.

δ) Για κάθε $x \in (0\,,e)$ είναι:

$$1-\ell n x = \frac{1}{e^{\alpha}} \Leftrightarrow \ell n(1-\ell n x) = -\alpha \Leftrightarrow -\ell n(1-\ell n x) = \alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0\,,e)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $f\big((0,e)\big)=R$.
Άρα για κάθε $\alpha \in R$, η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 6ο (14ο – 2010)

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)-f(x)=xe^x$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x\left(\frac{x^2}{2}+1\right)$, $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1\,,0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}\,,1\right)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2=e^{-x}-2$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon:(3e-2)x-2y+6=0$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) - f(x) = xe^x \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^x f'(x) - e^x f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)'. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{e^x} = \frac{x^2}{2} + c,\ x \in R.$$

Είναι $f(0) = 1$ άρα $c = 1$, επομένως $f(x) = e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$, $x \in R$.

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x) = \left[e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\right]' = e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) + e^x x = e^x\left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 2\right)e^x > 0,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «1 – 1» , οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \qquad \text{και} \qquad f(1) = \frac{3}{2}e \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}e\right) = 1$$

Άρα η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Έχουμε:

- $$\lim_{x\to-\infty} e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{2} + 1}{e^{-x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-e^{-x}} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0.$$

- $$\lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2} = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (0\ ,\ +\infty)$.

δ) Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 = e^{-x} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x\left(x^2 + 2\right) = 1 \Leftrightarrow e^x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Επειδή το $\frac{1}{2} \in (0\ ,\ +\infty) = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$, άρα και η ισοδύναμή της εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει μία πραγματική ρίζα, η οποία είναι και μοναδική, γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0\,,1]$ με $f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+2x+2\right)e^x$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. επομένως θα υπάρχει $x_o\in(0\,,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_o)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{\frac{3e}{2}-1}{1-0}=\frac{3e}{2}-1=\frac{3e-2}{2}$$

Είναι $\varepsilon:(3e-2)x-2y+6=0\Leftrightarrow y=\frac{3e-2}{2}x+3$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda_\varepsilon=\frac{3e-2}{2}$

Παρατηρούμε ότι $f'(x_o)=\lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη $x_o\in(0\,,1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon:(3e-2)x-2y+6=0$

ΘΕΜΑ 7ο (15ο – 2010)

Α) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι ″1-1″ και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Β) Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R με $f^{(3)}(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Αν $f'(2)>0$, $f^{(3)}(2)>0$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(x)+f(4-x)=3$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο R.

δ) Αν η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Μ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

ε) Για $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x+1)=f(x)+f(x+2)$ είναι αδύνατη.

ΛΥΣΗ

Α) Έστω $x_1,x_2,x_3\in\Delta$ με $x_1<x_2<x_3$, οπότε αφού η f είναι ″1-1″ οι τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο.

Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη, οπότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις $f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)$ και $f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)$. Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_3)$.

Επομένως θα ισχύει μία από τις παρακάτω ανισότητες:

$f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$ (1) $\qquad f(x_2)<f(x_3)<f(x_1)$ (2)

$f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$ (3) $\qquad f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$ (4)

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1), τότε εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και του $f(x_2)$, θα υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(x_3)$. Επομένως για $x_1<\xi<x_2<x_3$, δηλαδή για $\xi < x_3$ έχουμε $f(\xi) = f(x_3)$ που είναι άτοπο, αφού η f είναι ″1-1″. Ομοίως θα καταλήξουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύει μία από τις ανισότητες (2), (3) και (4).

Β) α) Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f'' είναι ″1-1″.

Αν υποθέσουμε ότι η f'' δεν είναι ″1-1″, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f''(x_1)=f''(x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$, οπότε έχουμε:

- Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R.
- $f''(x_1)=f''(x_2)$.

Άρα η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. Άρα η συνάρτηση f'' είναι ″1-1″ στο R.

Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο R, οπότε η f'' είναι συνεχής στο R.

Επίσης η f'' είναι ″1-1″, οπότε σύμφωνα με το (Α) ερώτημα η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) + f(4-x) = 3$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$f'(x) - f'(4-x) = 0 \quad \text{και} \quad f''(x) + f''(4-x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in R$$

Για $x=2$ είναι $f''(2) + f''(4-2) = 0 \Leftrightarrow 2f''(2) = 0 \Leftrightarrow f''(2) = 0$ (1).

Η f'' είναι γνησίως μονότονη στο R και επειδή από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει ή $f^{(3)}(x)>0$ ή $f^{(3)}(x)<0$. Όμως $f^{(3)}(2)>0$, άρα $f^{(3)}(x)>0$ για κάθε $x \in R$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Για $x<2$ είναι $f''(x) < f''(2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) < 0$, ενώ για $x>2$ είναι $f''(x) > f''(2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) > 0$.

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	3/2	$\cup$	

Σ. Κ.

Για $x=2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

$f(2) + f(4-2) = 3 \Leftrightarrow 2f(2) = 3 \Leftrightarrow f(2) = \dfrac{3}{2}$ (2).

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και $f''(x)<0$ στο $(-\infty, 2)$, άρα η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και $f''(x)>0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2,+\infty)$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_o=2$ και το σημείο καμπής είναι το $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

γ) Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $2f(x)=3$ έχει ρίζα τον αριθμό $x=2$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε:

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
f''	$-$ 0 $+$
f'	$\searrow$ $f'(2)$ $\nearrow$

ελάχ.

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o=2$, άρα $f'(x)\geq f'(2)$ για κάθε $x\in R$. Όμως από υπόθεση είναι $f'(2)>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε η ρίζα $x=2$ είναι μοναδική.

δ) Αν x_o η τετμημένη του σημείου M, στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$g(x_o)=0 \Leftrightarrow \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}=0 \Leftrightarrow f(x_o)=0 \qquad (3).$$

Για κάθε $x\in R$ είναι $g'(x)=\dfrac{\left[f'(x)\right]^2-f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$.

Άρα $g'(x_o)=\dfrac{\left[f'(x_o)\right]^2-f(x_o)f''(x_o)}{\left[f'(x_o)\right]^2} \overset{(3)}{=} \dfrac{\left[f'(x_o)\right]^2}{\left[f'(x_o)\right]^2}=1$, οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_g, της συνάρτησης g στο σημείο M, στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $\lambda_\varepsilon=g'(x_o)=1$, οπότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ είναι 45^o.

ε) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1)$ (4).

Για $x\geq 2$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$, άρα θα υπάρχει:

- $\xi_1\in(x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=f'(\xi_1)$.
- $\xi_2\in(x+1, x+2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(x+2)-f(x+1)}{(x+2)-(x+1)} \Leftrightarrow f(x+2)-f(x+1)=f'(\xi_2)$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ (5). Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$, άρα θα είναι και ″1-1″, οπότε από (5) έχουμε $\xi_1=\xi_2$ που είναι αδύνατο, γιατί τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $2f(x+1)=f(x)+f(x+2)$ είναι αδύνατη, για $x\geq 2$.

ΘΕΜΑ 8ο (16ο – 2010)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x)=\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2} \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x+2010)-f(x)\big)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=\left(\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2}\right)'=\frac{(2e^x+x^2)'(e^x+x^2)-(2e^x+x^2)(e^x+x^2)'}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{(2e^x+2x)(e^x+x^2)-(2e^x+x^2)(e^x+2x)}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{2e^{2x}+2x^2e^x+2xe^x+2x^3-2e^{2x}-4xe^x-x^2e^x-2x^3}{(e^x+x^2)^2}=$$

$$=\frac{x^2e^x-2xe^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{(x^2-2x)e^x}{(e^x+x^2)^2}=\frac{x(x-2)e^x}{(e^x+x^2)^2}.$$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f''	$+$	0 $-$	0 $+$	
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ και $f''(x)>0$ στο $(-\infty,0)$, άρα η f κυρτή στο $(-\infty,0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και $f''(x)<0$ στο $(0,2)$, άρα η f κοίλη στο $[0,2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και $f''(x)>0$ στο $(2,+\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2,+\infty)$.

β) Για κάθε $x \in R$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} - 1 = \frac{2e^x + x^2 - e^x - x^2}{e^x + x^2} = \frac{e^x}{e^x + x^2} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Επίσης η f είναι συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Για κάθε $x \in (-\infty\ , 0)$ έχουμε:

$$g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0) \qquad (2).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+f(0)) = -\infty$, οπότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Για κάθε $x \in (0\ , +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0) \qquad (1).$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+f(0)) = +\infty$, οπότε θα είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(R) = (-\infty\ , +\infty)$.

δ) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x\ , x+2010]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x\ , x+2010)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+2010)-f(x)}{x+2010-x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x+2010)-f(x)}{2010} \Leftrightarrow f(x+2010) - f(x) = 2010 f'(\xi).$$

Για $x > 2$ η συνάρτηση f είναι κυρτή, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως για $2 < x < \xi < x + 2010 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x + 2010) \overset{\cdot 2010}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow 2010 f'(x) < 2010 f'(\xi) < 2010 f'(x + 2010) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2010 f'(x) < f(x + 2010) - f(x) < 2010 f'(x + 2010).$$

Για $x > 2$ είναι:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x + 2x}{e^x + 2x} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x + 2}{e^x + 2} \underset{\text{D.L.H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x}{e^x} = 2$.

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2010 f'(x)\right) = 2010 \cdot 2 = 4020$.
- Αν θέσουμε $x + 2010 = u$, τότε όταν το $x \to +\infty$ και το $u \to +\infty$, άρα έχουμε:

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2010 f'(x + 2010)\right) = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(2010 f'(u)\right) = 2010 \cdot 2 = 4020$.

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x + 2010) - f(x)\right) = 4020$.

ΘΕΜΑ 9ο (17ο – 2010)

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f(1)=0$. Αν η συνάρτηση $f\,o\,f'$ ορίζεται στο $(0,+\infty)$ και για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\left(f\,o\,f'\right)(x)=-f(x)$ (1), να αποδείξετε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f' είναι το $A_{f'}=(0,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) $f'(1)=1$

δ) $\left(f'o\,f'\right)(x)=x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ε) $x f''(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

στ) $f(x)=\ell n x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Κατ' αρχάς είναι $A_{f'}\subseteq A_f=(0,+\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ή $A_{f'}=(0,+\infty)$
- ή θα υπάρχει $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_o\notin A_{f'}$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_o\notin A_{f'}$ τότε και με δεδομένο ότι $A_{fof'}=\left\{x\in A_{f'}\,/\,f'(x)\in A_f\right\}$ συμπεραίνουμε ότι το $x_o\notin A_{fof'}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί $x_o\in(0,+\infty)$ και $A_{fof'}=(0,+\infty)$ από υπόθεση. Άρα $A_{f'}=(0,+\infty)$.

β) Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\,o\,f'$:

$$A_{fof'}=\left\{x\in A_{f'}\,/\,f'(x)\in A_f\right\}=\left\{x\in A_{f'}\,/\,f'(x)\in(0,+\infty)\right\}$$

προκύπτει ότι $f'(x)\in(0,+\infty)$ για κάθε $x\in A_{f'}$ δηλαδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

γ) Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\left(f\,o\,f'\right)(1)=-f(1)\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow}\left(f\,o\,f'\right)(1)=0\overset{f(1)=0}{\Leftrightarrow}f\left(f'(1)\right)=f(1)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}f'(1)=1.$$

δ) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (1) όπου x το $f'(x)$, οπότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\left(f\,o\,f'\right)(f'(x))=-f(f'(x))\Leftrightarrow f\left(f'(f'(x))\right)=-\left(f\,o\,f'\right)(x)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f\left(f'(f'(x))\right)=-\left(-f(x)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(f'(f'(x))\right)=f(x)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}f'(f'(x))=x\Leftrightarrow\left(f'o\,f'\right)(x)=x\qquad(2).$$

ε) Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\left(f(f'(x))\right)' = \left(-f(x)\right)' \Leftrightarrow f'(f'(x))\cdot f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \left(f'\mathrm{o}f'\right)(x)\cdot f''(x) = -f'(x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow xf''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow xf''(x) + f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

στ) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$xf''(x)+f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(xf'(x)\right)'=0 \Leftrightarrow xf'(x)=c_1\ ,\ c_1\in R.$$

Για $x=1$ είναι $f'(1)=c_1 \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow} c_1=1$, άρα $xf'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f(x)=\ell nx + c_2,\ x\in(0,+\infty)$.

Όμως $f(1)=0$, άρα $c_2=0$, οπότε $f(x)=\ell nx$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 10ο (18ο – 2010)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x)+2xf(x)=1,\ \text{για κάθε } x\in R.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Β. Αν $f(0)=1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x,\ x\in R$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu f(x)\right)$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

ε. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$.

ΛΥΣΗ

Α. Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f^2(x)+2xf(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x)+x^2=1+x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)+x\right)^2=1+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g^2(x)=1+x^2 \quad (1),\ \text{όπου } g(x)=f(x)+x\ ,\ x\in R.$$

Για κάθε $x\in R$ είναι $1+x^2>0 \Leftrightarrow g^2(x)>0 \Leftrightarrow g(x)\neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο R, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R.

Β. α) Για $x=0$ έχουμε $g(0)=f(0)+0=1>0$, οπότε $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

Αφού $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$, από (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x)=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{1+x^2}-x,\ x\in R.$$

β) Για κάθε $x\in R$ είναι:

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\geq x-x=0$$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ (2).

γ) Για κάθε $x \in (0\,,+\infty)$ είναι:

$$\left|\eta\mu f(x)\right| \le \left|f(x)\right| \overset{(2)}{=} f(x),\ \ \text{άρα}\ \ -f(x) \le \eta\mu f(x) \le f(x).$$

Είναι $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$,

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}+1}\right)=0\cdot\dfrac{1}{2}=0.$

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-f(x)\right)=0.$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu f(x)\right)=0.$

δ) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$f'(x)=\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)'=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}-1=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}}\overset{(2)}{<}0.$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, άρα είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1}, λύνουμε την εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x.

Έχουμε:

$$y=\sqrt{1+x^2}-x \Leftrightarrow y+x=\sqrt{1+x^2} \overset{y+x\ge 0}{\Leftrightarrow} \left(y+x\right)^2=1+x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2+2xy+\cancel{x^2}=1+\cancel{x^2} \Leftrightarrow 2xy=1-y^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} x=\frac{1-y^2}{2y} \qquad (3).$$

Είναι $y+x\ge 0 \Leftrightarrow y+\dfrac{1-y^2}{2y}\ge 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2y^2+1-y^2\ge 0 \Leftrightarrow y^2+1\ge 0$, που είναι αληθές.

Η $(3) \Leftrightarrow f^{-1}\left(y\right)=\dfrac{1-y^2}{2y}$, $y>0$.

Επομένως $f^{-1}:\left(0\,,+\infty\right)\to R$ με $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x^2}{2x}$.

ε. Από το (δ) ερώτημα έχουμε $f'(x)=\dfrac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, άρα

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int_1^0 -\frac{f'(x)}{f(x)}dx=-\int_1^0 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln\left(f(x)\right)\right]_0^1=\ln\left(\sqrt{2}-1\right).$$

ΘΕΜΑ 11ο (20ο – 2010)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x, \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0,+\infty)$.

β) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} > \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g, για την οποία ισχύει $g^2(x) = f\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και $g(1) = 1$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x$, $x \in R$.

Για κάθε $x \in R$ είναι $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «$1-1$».

Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x)) = \varphi(\ln x) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \ln x$, $x \in (0,+\infty)$.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ και } f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ και
- $\xi_2 \in (\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

Είναι $0 < \alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε $f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} > \dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

γ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln e^x - \ln x \Leftrightarrow g^2(x) = x - \ln x \quad (2).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x_o) = 0$, τότε $x_o - \ln x_o = 0 \Leftrightarrow \ln x_o = x_o$ που είναι άτοπο, γιατί $\ln x \le x - 1$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

(Εφαρμογή 2 σχολ. Βιβλίου (Νέου) σελ. 148).

Άρα $g(x) \ne 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Η συνάρτηση g λοιπόν είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επομένως από (2) προκύπτει ότι $g(x)=\sqrt{x-\ln x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$g'(x)=\left(\sqrt{x-\ln x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x-\ln x}}\left(x-\ln x\right)'=\frac{x-1}{2x\sqrt{x-\ln x}}.$$

Είναι $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ και $g'(x)>0\Leftrightarrow x>1$, άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης g είναι:

x	0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	1	$\nearrow$	
			ελάχιστο		

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=1$ με ελάχιστη τιμή $g(1)=1$.

Είναι:

$$\lim_{x\to0^+}g(x)=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x-\ln x}=+\infty,\ \text{γιατί}\ \lim_{x\to0^+}(x-\ln x)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\sqrt{1-\frac{\ln x}{x}}\right)=+\infty,\ \ \text{γιατί}\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\ \text{οπότε}\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{\ln x}{x}}=1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A)=[1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 12ο (21ο – 2010)

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)\ge xe^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(x)}{x\etaμx}=1$.

γ) Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,1]$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^{2x}$, $x \in R$.

Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x) - xe^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_o = 0$ του πεδίου ορισμού της τοπικό ακρότατο.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων με $g'(x) = \left(f(x) - xe^{2x}\right)' = f'(x) - e^{2x} - 2xe^{2x}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o = 0$ με $g'(0) = f'(0) - 1$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Είναι $f'(0) = 1$, οπότε για $x \neq 0$ έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

Έχουμε $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^2(x)}{x\,\eta\mu x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f^2(x)}{x^2 \dfrac{\eta\mu x}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{f(x)}{x} \right)^2 \dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu x}{x}} \right] = 1^2 \cdot \dfrac{1}{1} = 1$.

γ) Για κάθε $x \in R$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} \geq xe^{x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^{x} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$, όπου $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^{x}$, $x \in R$.

Είναι $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 x'e^x\,dx = e - \int_0^1 e^x\,dx = e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1,$

οπότε $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \left(f(x)e^{-x} - xe^x\right)dx = \int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx - \int_0^1 xe^x\,dx = 1 - 1 = 0.$

Έχουμε λοιπόν $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^{x} \geq 0$ για κάθε $x \in R$ και $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx = 0$ (1).

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_o \in [0,1]$ τέτοιο, ώστε $h(x_o) \neq 0$, τότε $h(x_o) > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ αλλά η συνεχής συνάρτηση h δεν είναι παντού μηδέν, οπότε $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,dx > 0$, που είναι άτοπο λόγω της (1).

Επομένως για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^{x} = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x}$.

ΘΕΜΑ 13ο (23ο – 2010)

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=2x$ (Ι) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o)=2x_o$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)}{x}$.

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) έχουμε $f'(x)=\frac{2}{3f^2(x)+1}>0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

β) Είναι $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=\int_0^1 f'(t)dt=\left[f(t)\right]_0^1=f(1)-f(0)$.

Από τη σχέση (Ι) για $x=0$ έχουμε $f^3(0)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+1\right]=0 \Leftrightarrow f(0)=0$.

Από τη σχέση (Ι) για $x=1$ έχουμε $f^3(1)+f(1)=2 \Leftrightarrow f^3(1)+f(1)-2=0$ (2).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	0	1	–2	1
///	1	1	2	
1	1	2	0	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(1)-1)\underbrace{\left(f^2(1)+f(1)+2\right)}_{\neq 0}=0\Leftrightarrow f(1)=1.$$

Άρα $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=f(1)-f(0)=1-0=1$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και στο $[0,1]$ με $g'(x)=f'(x)-2x$.
- Είναι $g(0)=g(1)$, αφού $g(0)=0$ και $g(1)=0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$g'(x_o)=0 \Leftrightarrow f'(x_o)-2x_o=0 \Leftrightarrow f'(x_o)=2x_o$.

δ) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow f(x)\left(f^2(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\frac{2}{1+f^2(x)}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+f^2(x)\right)=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{1+f^2(x)}=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x)+f(x)=2x \Leftrightarrow f^3(x)=2x-f(x) \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x}=2-\frac{f(x)}{x}$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{f(x)}{x}\right)=2-0=2$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^3(x)}{x}=2$.

ΘΕΜΑ 14ο (24ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$, $x\in R$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

iii) Για τις διάφορες τιμές του $\kappa\in R$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa$.

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x\in R$ έχουμε: $f'(x)=-e^{-2x}+1=1-\frac{1}{e^{2x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$.

Είναι:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow x=0$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{2x}-1>0 \Leftrightarrow e^{2x}>1 \Leftrightarrow x>0$.

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x)<0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o=0$, με ελάχιστη τιμή $f(0)=0$.

ii) ∘ Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, άρα $f(\Delta_1)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{e^{-2x}}{2x}+1-\frac{1}{2x}\right)\right]=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)=1-0=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-2x}}{x}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2e^{-2x}\right)=-\infty$.

Άρα $f(\Delta_1)=[0,+\infty)$.

∘ Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}\right)=+\infty,$$

γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right)=\frac{1}{2}\cdot 0=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$.

Άρα $f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[0,+\infty)$.

iii) Αν $\kappa<0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ είναι αδύνατη.

Αν $\kappa=0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει μια λύση.

Αν $\kappa>0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει δύο λύσεις.

ΘΕΜΑ 15ο (25ο – 2010)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το R, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+2f(x)=x+3$, (1) για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f, της συνάρτησης f και τους άξονες $x΄x$ και $y΄y$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, που διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο R, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)\left(3f^2(x)+2\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3f^2(x)+2} \qquad (2).$$

Είναι $f'(x)=\dfrac{1}{3f^2(x)+2}>0$ για κάθε $x\in R$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y) \quad \text{με } x\,,y\in R, \text{ αφού } f(R)=R.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $y^3+2y=f^{-1}(y)+3 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+2y-3$, $y\in R$.

Άρα $f^{-1}:R\to R$ με $f^{-1}(x)=x^3+2x-3$ (3).

β) 1ος τρόπος:

Είναι $f^{-1}(0)=-3$, άρα $f(-3)=0$, οπότε το $K(-3,0)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $x'x$.

Είναι $f^{-1}(1)=0$, άρα $f(0)=1$, οπότε το $\Lambda(0\,,1)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{0}|f(x)|\,dx\,.$$

Θέτουμε $y=f(x)$ άρα $x=f^{-1}(y)=y^3+2y-3$ οπότε $dx=\left(y^3+2y-3\right)'dy=\left(3y^2+2\right)dy$.

Επίσης ισχύουν οι ισοδυναμίες $x=-3 \Leftrightarrow y=0$ και $x=0 \Leftrightarrow y=1$, οπότε έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_{-3}^{0}|f(x)|\,dx=\int_{0}^{1}|y|(3y^2+2)\,dy=\int_{0}^{1}y(3y^2+2)\,dy=$$

$$=\int_{0}^{1}(3y^3+2y)\,dy=\left[\frac{3y^4}{4}+y^2\right]_0^1=\frac{3}{4}+1-0=\frac{7}{4}\ \text{τ. μ.}$$

2ος τρόπος:

Τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι αντίστοιχα τα $K(-3,0)$ και $\Lambda(0,1)$.

Τα συμμετρικά των $K\,,\Lambda$ ως προς την ευθεία δ: y=x είναι τα σημεία $K'(0,-3)$ και $\Lambda'(1,0)$.

Είναι $f^{-1}(x)=x^3+2x-3=(x-1)\left(x^2+x+3\right)$, οπότε στο διάστημα $\left[0\,,1\right]$ είναι $f^{-1}(x)\le 0$.

Λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία δ: y=x το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega)=-\int_{0}^{1}f^{-1}(x)\,dx=-\int_{0}^{1}(x^3+2x-3)\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}+x^2-3x\right]_0^1=-\left(\frac{1}{4}+1-3\right)=\frac{7}{4}\ \text{τ.μ.}$$

γ) 1^{ος} τρόπος:

Έστω $M\big(x_o\,,f(x_o)\big)$ το σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon:\ y-f(x_o)=f'(x_o)(x-x_o)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\varepsilon:\ y-f(x_o)=\frac{1}{3f^2(x_o)+2}(x-x_o).$$

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-1,0)$, θα ισχύει:

$$0-f(x_o)=\frac{1}{3f^2(x_o)+2}(-1-x_o)\Leftrightarrow 3f^3(x_o)+2f(x_o)=x_o+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f^3(x_o)+\big(f^3(x_o)+2f(x_o)\big)=x_o+1\overset{(1)}{\Leftrightarrow}2f^3(x_o)+x_o+3=x_o+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x_o)=-1\Leftrightarrow f(x_o)=-1.$$

Από την (1) έχουμε $(-1)^3+2(-1)=x_o+3\Leftrightarrow x_o=-6$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\big(-6,-1\big)$ είναι:

$$\varepsilon:\ y-(-1)=\frac{1}{3(-1)^2+2}\big(x-(-6)\big)\Leftrightarrow\ \varepsilon:\ y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}.$$

2^{ος} τρόπος:

Το συμμετρικό του σημείου $A(-1,0)$ ως προς την ευθεία $\delta:\ y=x$ είναι το σημείο $B(0,-1)$. Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ που διέρχεται από το σημείο B.

Έστω $N\big(x_o\,,f^{-1}(x_o)\big)$ το σημείο επαφής και ζ η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο N, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\zeta:\ y-f^{-1}(x_o)=\big(f^{-1}\big)'(x_o)\cdot(x-x_o)\overset{(3)}{\Leftrightarrow}\zeta:\ y-\big(x_o^3+2x_o-3\big)=\big(3x_o^2+2\big)(x-x_o).$$

Επειδή η ευθεία ζ διέρχεται από το σημείο $B(0,-1)$, θα ισχύει:

$$-1-\big(x_o^3+2x_o-3\big)=\big(3x_o^2+2\big)(0-x_o)\Leftrightarrow -x_o^3-2x_o+2=-3x_o^3-2x_o\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_o^3=-2\Leftrightarrow x_o^3=-1\Leftrightarrow x_o=-1.$$

Για κάθε $x\in R$ είναι $\big(f^{-1}\big)'(x)=\big(x^3+2x-3\big)'=3x^2+2$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) για $x_o=-1$ έχουμε $f^{-1}(-1)=-6$ και $\big(f^{-1}\big)'(-1)=5$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N\big(-1,-6\big)$ είναι:

$$\zeta:\ y-(-6)=5\big(x-(-1)\big)\Leftrightarrow\ \zeta:\ y=5x-1.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συμμετρική της $\zeta:\ y=5x-1$, ως προς την ευθεία $\delta:\ y=x$, που είναι η ευθεία ε. Αντιμεταθέτοντας τις μεταβλητές x, y έχουμε $\varepsilon:\ x=5y-1\Leftrightarrow\varepsilon:\ y=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ 16ο (26ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(2-x)e^x$, $1 \le x \le 2$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται.

ii) Η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} και η ευθεία $y=x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_o \in (1,2)$.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$, θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $[0,e]$.

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η C_f με την ευθεία $\delta: y=x$, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αφού η ευθεία δ είναι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Τα κοινά σημεία των C_f και της ευθείας $\delta: y=x$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$f(x)=x \Leftrightarrow (2-x)e^x - x = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(2-x)e^x - x$, $x\in[1,2]$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1,2]$, ως πράξεις συνεχών.
- $g(1)g(2)=(e-1)(-2)<0$.

Η συνάρτηση λοιπόν g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,2]$, οπότε η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Για κάθε $x\in[1,2]$ είναι:

$$g'(x)=[(2-x)e^x-x]'=-e^x+(2-x)e^x-1=\underbrace{(1-x)e^x}_{\le 0}\ \underbrace{-1}_{<0}<0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

iii) Είναι $I=\int_0^e f^{-1}(x)\,dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x)=u \Leftrightarrow x=f(u)$, άρα $dx=f'(u)du$.

Για $x=0$ έχουμε $u=f^{-1}(0)\Leftrightarrow f(u)=0 \Leftrightarrow f(u)=f(2) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u=2$.

Για $x=e$ έχουμε $u=f^{-1}(e)\Leftrightarrow f(u)=e \Leftrightarrow f(u)=f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} u=1$.

Άρα έχουμε:

$$I=\int_0^e f^{-1}(x)\,dx=\int_2^1 uf'(u)\,du=\big[uf(u)\big]_2^1-\int_2^1 f(u)\,du=f(1)-2f(2)+\int_1^2(2-u)e^u du=$$

$$=e+\int_1^2(2-u)(e^u)'du=e+\Big[(2-u)\,e^u\Big]_1^2-\int_1^2(2-u)'e^u du=e-e+\int_1^2 e^u du=\Big[\,e^u\Big]_1^2=e^2-e.$$

ΘΕΜΑ 17ο (30ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-1}$, $x\neq\pm1$

Α) Να βρείτε:

α) Το σύνολο τιμών της f.

β) Τις ασύμπτωτες της C_f.

Β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$.

Γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(-1\,,1)$ ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,\text{συν}x\,dx=0$.

ΛΥΣΗ

Α) α) Για κάθε $x\in A_f=R-\{-1\,,1\}$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{(4x)'(x^2-1)-(4x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=\frac{4(x^2-1)-(4x)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2}<0.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Είναι:

- $f'(x)<0$ στο $(-\infty,-1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$.
- $f'(x)<0$ στο $(-1\,,1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1\,,1)$.
- $f'(x)<0$ στο $(1\,,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1\,,+\infty)$.

Βρίσκουμε τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του A_f.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0.$

- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{4x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right) = -\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{1}{x+1} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to -1^+}\left(\dfrac{4x}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x+1}\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{1}{x+1} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{4x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = -\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{4x}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (-\infty, +\infty)$.

β)
- Η ευθεία με εξίσωση y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$.
- Η ευθεία με εξίσωση y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
- Η ευθεία με εξίσωση $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, αφού $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$.
- Η ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, αφού $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

Β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, e]$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, e]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = e$, είναι:

$$E = \int_2^e f(x)dx = \int_2^e \frac{4x}{x^2-1}dx = 2\int_2^e \frac{2x}{x^2-1}dx = 2\int_2^e \frac{1}{x^2-1}(x^2-1)'dx =$$

$$= 2\Big[\ell n\left|x^2-1\right|\Big]_2^e = 2\ell n\left(e^2-1\right) - 2\ell n3 = 2\ell n\frac{e^2-1}{3} \quad \text{τ.μ.}$$

Γ) Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x)\cdot \text{συν}x = \dfrac{4x\,\text{συν}x}{x^2-1}$ είναι ορισμένη στο $(-1, 1)$ και είναι περιττή.

Πράγματι, για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε:

- $-x \in (-1, 1)$
- $\varphi(-x) = \dfrac{4(-x)\text{συν}(-x)}{(-x)^2-1} = -\dfrac{4x\,\text{συν}x}{x^2-1} = -\varphi(x)$.

Είναι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_0^{\alpha}\varphi(x)\,dx = I_1 + I_2$

Θέτουμε $x = -u$, οπότε $dx = -du$. Για $x = -\alpha$ το $u = \alpha$, ενώ για $x = 0$ το $u = 0$.

$$I_1 = \int_{-\alpha}^{0}\varphi(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0}\varphi(-u)(-du) = -\int_{\alpha}^{0}\varphi(-u)du =$$

$$= \int_0^{\alpha}\varphi(-u)du \overset{\varphi:\text{περιττή}}{=} \int_0^{\alpha} -\varphi(u)du = -\int_0^{\alpha}\varphi(u)du = -I_2$$

Είναι $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\varphi(x)\,dx = I_1 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0.$

ΘΕΜΑ 18ο (31ο – 2010)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)} + f(x) = x$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = 1 + e$.

δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $2f(x) + 1 = x$

ε) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x) < f(x) < \dfrac{x-1}{2}$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$\left(e^{f(x)} + f(x)\right)' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)} + 1\right) f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \quad (2).$$

Είναι $f'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1 – 1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{με } x, y \in \mathbb{R}, \text{ αφού } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $e^y + y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + y$, $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x + x$ (3).

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, άρα και η $\dfrac{1}{e^{f(x)} + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = -\dfrac{e^{f(x)} f'(x)}{\left(e^{f(x)} + 1\right)^2} < 0$, άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Για $x = 0$ από τη σχέση (3) έχουμε $f^{-1}(0) = 1$ άρα $f(1) = 0$ (4).

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[1\,,e+1\right]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[1\,,e+1\right]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=1+e$ είναι:

Είναι $E(\Omega)=\int_1^{1+e} f(x)\,dx$. Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u) \Leftrightarrow x=e^u+u$, άρα $dx=\left(e^u+1\right)du$.

Για $x=1$ έχουμε $1=f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(0)=f^{-1}(u) \Leftrightarrow u=0$.

Για $x=1+e$ έχουμε $1+e=f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(1)=f^{-1}(u) \Leftrightarrow u=1$.

Άρα έχουμε:

$$E(\Omega)=\int_1^{1+e} f(x)\,dx=\int_0^1 u\left(e^u+1\right)du=\int_0^1 ue^u\,du+\int_0^1 u\,du=\int_0^1 u\left(e^u\right)'du+\int_0^1 u\,du=$$

$$=\left[ue^u\right]_0^1-\int_0^1 (u)'e^u du+\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=e-\int_0^1 e^u du+\frac{1}{2}=e-\left[e^u\right]_0^1+\frac{1}{2}=e-\left(e-1\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\ \text{τ.μ.}$$

δ) Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$

Είναι:

$$\varepsilon: y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f'(1)=\dfrac{1}{e^{f(1)}+1}\overset{(4)}{=}\dfrac{1}{e^0+1}=\dfrac{1}{2}$

Άρα:

$$\varepsilon: y-0=\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ είναι από την C_f και πάνω, δηλαδή για κάθε $x\in R$ ισχύει:

$$f(x)\leq y \Leftrightarrow f(x)\leq \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x)\leq x-1 \Leftrightarrow 2f(x)+1\leq x$$

με το ίσον να ισχύει μόνο για την τετμημένη του σημείου επαφής. Επομένως μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[1\,,x\,\right]$, άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ. , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(1\,,x\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\overset{(4)}{\Leftrightarrow} f'(\xi)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ (5).

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R, επομένως για $1<\xi<x \Rightarrow f'(1)>f'(\xi)>f'(x) \Rightarrow f'(x)<f'(\xi)<f'(1)$ (6).

Για $x=1$ από τη σχέση (2) έχουμε $f'(1)=\dfrac{1}{e^{f(1)}+1}\overset{(4)}{=}\dfrac{1}{e^o+1}=\dfrac{1}{2}$ (7).

Η (6) $\overset{(5),(7)}{\Rightarrow} f'(x)<\dfrac{f(x)}{x-1}<\dfrac{1}{2} \overset{x>1}{\Rightarrow} (x-1)f'(x)<f(x)<\dfrac{x-1}{2}$.

ΘΕΜΑ 19ο (32ο – 2010)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f^4(x)+3f'(x)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτησης f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x\geq 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(0,f(0))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x=7$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι:

- $f'(x)=-\dfrac{1}{3}f^4(x)<0$, αφού $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.
- $f''(x)=-\dfrac{4}{3}f^3(x)f'(x)=-\dfrac{4}{3}f^3(x)\left(-\dfrac{1}{3}f^4(x)\right)=\dfrac{4}{9}f^7(x)$.

  Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,+\infty)$. Επειδή $f(0)=1>0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

β) Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ έχουμε:

$$f^4(x)+3f'(x)=0 \Leftrightarrow -3f'(x)=f^4(x) \Leftrightarrow -3f^{-4}(x)f'(x)=1,\ \text{άρα}$$

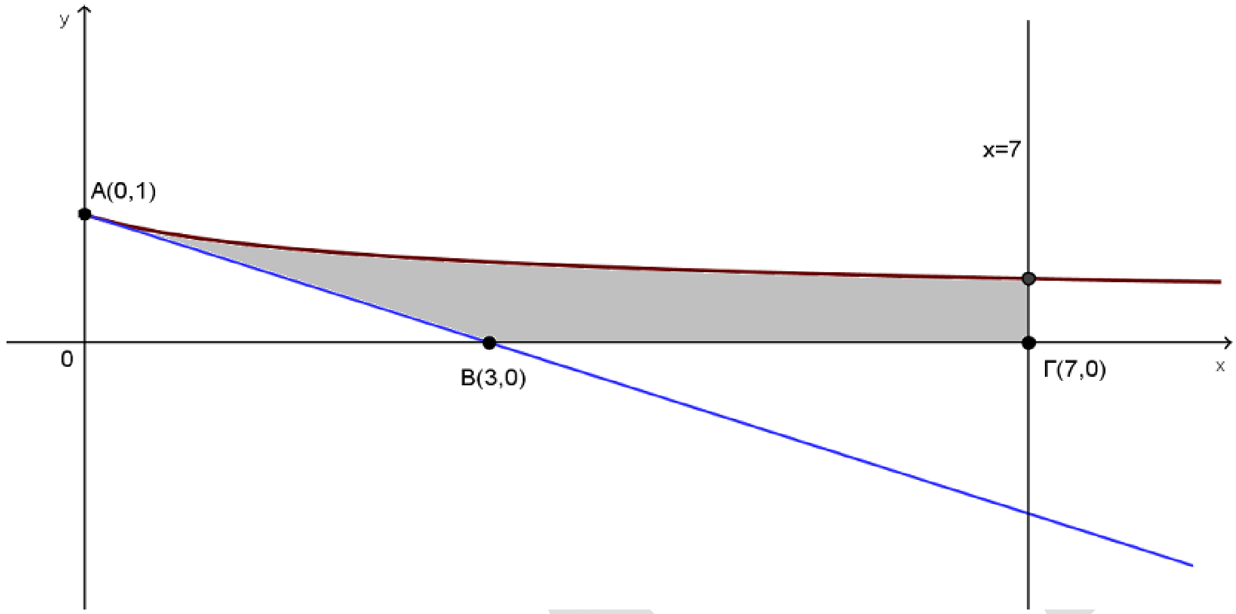
$$\left(-3\frac{f^{-3}(x)}{-3}\right)'=(x)' \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^3(x)}\right)'=(x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^3(x)}=x+c.$$

Είναι $f(0)=1$, άρα $c=1$, οπότε $\dfrac{1}{f^3(x)}=x+1 \Leftrightarrow f^3(x)=\dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x\in[0,+\infty)$.

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{3}x \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+1 \qquad (1).$$

δ) Για $y=0$ από την (1) έχουμε $-\dfrac{1}{3}x+1=0 \Leftrightarrow x=3$. Άρα η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο $B(3,0)$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x=7$, είναι:



$$E(\Omega)=\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}dx-(OAB)=\int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}}dx-\frac{1}{2}(OA)(OB)=$$

$$=\left[\frac{(x+1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right]_0^7-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(4-1)-\frac{3}{2}=3 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 20ο (33ο – 2010)

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+f(x)=e^{-3x^2}+e^{-x^2}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{1}{f(x)}-e\cdot f(x)$, $x\in\mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx+e\int_1^0 f(x)dx<e-1$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx=\frac{1-e}{4}$, αν είναι γνωστό ότι $h'(x)=2e^{4x^2}$ και $h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$, οπότε η (1) γράφεται $g\big(f(x)\big)=g\big(e^{-x^2}\big)$ (2). Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι «1 – 1». Επομένως από τη σχέση (2) έχουμε $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in R$ είναι:

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - e \cdot f(x) = e^{x^2} - e \cdot e^{-x^2} = e^{x^2} - e^{1-x^2},\ x \in R.$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο R, με $\varphi'(x) = e^{x^2} 2x - e^{1-x^2}(-2x) = 2x\left(e^{x^2} + e^{1-x^2}\right)$.

Είναι:

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2} + e^{1-x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x\left(e^{x^2} + e^{1-x^2}\right) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Το πρόσημο της φ΄, η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ΄	$-$	0	$+$
φ	$\searrow$	$1-e$ ελάχ.	$\nearrow$

Έχουμε:

- Η φ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $\varphi'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $\varphi'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$, με ελάχιστη τιμή $\varphi(0) = 1 - e$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^1 e^{x^2} dx + e\int_1^0 e^{-x^2} dx < e - 1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{1-x^2} dx < e - 1 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 \left(e^{x^2} - e^{1-x^2}\right) dx < e - 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x)\, dx < e - 1.$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $\varphi(0) \le \varphi(x) \le \varphi(1)$. Είναι $\varphi(0) = e^0 - e^{1-0} = 1 - e$ και $\varphi(1) = e - e^0 = e - 1$, άρα $1 - e \le \varphi(x) \le e - 1$.

Είναι $e - 1 \ge \varphi(x) \Leftrightarrow e - 1 - \varphi(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

Επομένως $\int_0^1 [e - 1 - \varphi(x)] dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (e-1) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (e-1) dx > \int_0^1 \varphi(x) dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x)\, dx < \int_0^1 (e-1)\, dx \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x)\, dx < e - 1.$$

δ) Είναι:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x)' h(x)\, dx = [x h(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x h'(x)\, dx = \frac{1}{2} h\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 2 e^{4x^2} dx =$$

$$= 0 - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{4x^2}\right)' dx = -\frac{1}{4}\left[e^{4x^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}(e-1) = \frac{1-e}{4}.$$

ΘΕΜΑ 21ο (34ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-\ell n\left(x^4+1\right)<1-\ell n2$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in R$ έχουμε:

$$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R, οπότε το σύνολο τιμών της είναι: $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\right)=0$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(R)=(0,+\infty)$.

γ) Είναι:

$$x^2-\ell n\left(x^4+1\right)<1-\ell n2 \Leftrightarrow x^2<1-\ell n2+\ell n\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow x^2<\ell ne-\ell n2+\ell n\left(x^4+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2<\ell n\frac{e\left(x^4+1\right)}{2}\Leftrightarrow e^{x^2}<\frac{e\left(x^4+1\right)}{2}\Leftrightarrow\frac{e^{x^2}}{x^4+1}<\frac{e}{2}\Leftrightarrow\frac{e^{x^2}}{(x^2)^2+1}<\frac{e}{2}\Leftrightarrow f\left(x^2\right)<f(1)\quad(3).$$

Για τους αριθμούς x^2 και 1 υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: ή $x^2>1$, ή $x^2=1$, ή $x^2<1$. Αν υποθέσουμε ότι $x^2>1$ και με δεδομένο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, προκύπτει $f(x^2)>f(1)$ που είναι άτοπο λόγω της (3). Αν υποθέσουμε ότι $x^2=1$, τότε από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει $f(x^2)=f(1)$ που επίσης είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα από τη σχέση (3) προκύπτει $x^2<1$. Έχουμε λοιπόν $x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

ΘΕΜΑ 22ο (36ο – 2010)

Δίνεται συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)=2f(x)f'(x)$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f^2(x)+1$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R με σύνολο τιμών το R για την οποία ισχύει g(0)=0 $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=g(f(x))-g(\varepsilon\varphi x)$ είναι σταθερή στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\varepsilon\varphi x$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g, της συνάρτησης g, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $g(1)=E+\frac{\ell n2}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$\left(f'(x)\right)'=\left(f^2(x)\right)' \Leftrightarrow f'(x)=f^2(x)+c.$$

Όμως $f'(0)=f^2(0)+c \Leftrightarrow 1=0+c \Leftrightarrow c=1$. Άρα $f'(x)=f^2(x)+1$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

β) Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h'(x)=g'(f(x))f'(x)-g'(\varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left(1+f^2(x)\right)-\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}\cdot\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)=1-1=0.$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι σταθερή. Έστω $h(x) = c_1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για $x = 0$ έχουμε $h(0) = c_1 \Leftrightarrow g(f(0)) - g(\varepsilon\varphi 0) = c_1 \Leftrightarrow g(0) - g(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Άρα $h(x) = 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) - g(\varepsilon\varphi x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = g(\varepsilon\varphi x) \overset{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \varepsilon\varphi x$$

δ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, άρα για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $g(0) \le g(x) \le g(1)$, οπότε $g(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g , της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$, είναι:

$$E = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (x)' g(x)dx = [x\,g(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x)dx = g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$= g(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = g(1) - \frac{1}{2}\left[\ell n\left|1+x^2\right|\right]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2}(\ell n2 - \ell n1) = g(1) - \frac{\ell n2}{2}.$$

Είναι $E = g(1) - \frac{\ell n2}{2}$, οπότε $g(1) = E + \frac{\ell n2}{2}$