ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ 2008
ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο (7ο – 2008)

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με:

$$g(x)=\frac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2},\ \kappa\in\mathbb{R}$$

α) Να αιτιολογήσετε την άποψη ότι έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

γ) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(2008)<0$, να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

δ) Αν $f(\kappa)\in[0,1]$ και για τη συνάρτηση $h(x)=g(x)+2008+\beta$, $x\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$, να βρείτε τις τιμές των β και $f(\kappa)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $g(x)=\dfrac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2},\ \kappa\in\mathbb{R}$

Μπορούμε να αναζητήσουμε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ αν το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ και $(\beta,+\infty)$ αντίστοιχα. Επειδή η g είναι ρητή της μορφής $g(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ το πεδίο ορισμού είναι $D_g=\mathbb{R}-\{x_0\in\mathbb{R}:Q(x_0)=0\}$

Επειδή μόνο μεμονωμένες τιμές μπορεί να μηδενίζουν τον παρονομαστή άρα το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty,\alpha)$ και $(\beta,+\infty)$.

β) Αν $f(\kappa)\neq 0$ και $f(\kappa)\neq 1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-f(\kappa))x^7+x^5+1}{f(\kappa)x^6+4x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot x\right]=\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot\lim_{x\to+\infty} x$$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}>0 \Leftrightarrow (1-f(\kappa))f(\kappa)>0 \Leftrightarrow 0<f(\kappa)<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

ii) Αν $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}<0 \Leftrightarrow f(\kappa)<0$ ή $f(\kappa)>1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

iii) Αν $f(\kappa)=1$ τότε $g(x)=\dfrac{x^5+1}{x^6+4x^4+2}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+1}{x^6+4x^4+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5}{x^6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

iv) Αν $f(\kappa)=0$ τότε $g(x)=\dfrac{x^7+x^5+1}{4x^4+2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^7}{4x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}x^3\right)=+\infty$

$$\text{Επομένως}\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν} \quad 0\le f(\kappa)<1\\ -\infty, & \text{αν} \quad f(\kappa)<0 \text{ ή } f(\kappa)>1\\ 0, & \text{αν} \quad f(\kappa)=1\end{cases}$$

γ) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, όμως $f(2008)<0$ άρα και $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα και $f(\kappa)<0$.

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty} x$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$, $f(\kappa)<0$, $1-f(\kappa)>0$, άρα $\dfrac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)}<0$ επομένως $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

δ) $h(x)=g(x)+2008+\beta \Leftrightarrow h(x)-\beta=g(x)+2008$

Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι αν το $f(\kappa)\in[0,1)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$, άτοπο γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=1$

Αν $f(\kappa)=1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-\beta)=\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)+2008)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)+2008=0+2008=2008$,

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)-\beta)=2008 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)-\lim\limits_{x\to+\infty}\beta=2008 \Leftrightarrow 1-\beta=2008 \Leftrightarrow \beta=-2007$

ΘΕΜΑ 2ο (8ο – 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\alpha^{\frac{1}{x}}+\alpha^x-2\alpha x$, με $\alpha>1$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to0^-} f(x),\ \lim_{x\to0^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x)=0$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

α) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^{\frac{1}{x}}\underset{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to0}\alpha^u\underset{\text{στο } 0}{\overset{\alpha^x\text{ συνεχής}}{=}}\alpha^0=1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2\alpha x)\overset{\alpha>1}{=}+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\left(x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\right)\underset{\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(\frac{1}{u^2}\cdot\alpha^u\right)=0$, γιατί $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{u^2}=0$ και $\lim\limits_{u\to-\infty}\alpha^u=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^-}\alpha^x=\alpha^0=1$ και $\lim\limits_{x\to0^-}(-2\alpha x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$.

$$\text{Είναι }\lim_{x\to0^+}\left(x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\right)\underset{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\alpha^u}{u^2}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{(\alpha^u)'}{(u^2)'}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\alpha^u\cdot\ln\alpha}{2u}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{\alpha^u\cdot(\ln\alpha)^2}{2}=+\infty.$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^+}\alpha^x=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(-2\alpha x)=0$, άρα $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.

$$\text{Είναι }\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(x\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}+\frac{\alpha^x}{x}-2\alpha\right)\right]=+\infty$$

β) Για κάθε $x\in A$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=2x\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}+x^2\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\alpha\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+\alpha^x\cdot\ln\alpha-2\alpha=2x\cdot\alpha^{\frac{1}{x}}-\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\alpha+\alpha^x\cdot\ln\alpha-2\alpha$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=2\alpha^{\frac{1}{x}}-2\cdot\dfrac{\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\ln\alpha}{x}+\dfrac{\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot(\ln\alpha)^2}{x^2}+\alpha^x\cdot(\ln\alpha)^2=$

$$=\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\left[2-2\cdot\frac{\ln\alpha}{x}+\left(\frac{\ln\alpha}{x}\right)^2\right]+\alpha^x\cdot(\ln\alpha)^2=\alpha^{\frac{1}{x}}\cdot\left[1+\left(1-\frac{\ln\alpha}{x}\right)^2\right]+\alpha^x\cdot(\ln\alpha)^2$$

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in A$, οπότε η f' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$. Άρα για $x>1$, επειδή f' γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, είναι

$f'(x)>f'(1)$, άρα $f'(x)>0$.

Για $0<x<1$ έχουμε $f'(x)<f'(1)$ άρα $f'(x)<0$.

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\ln\alpha-2\alpha<0$, γιατί για κάθε $\alpha>1$ είναι

$\begin{cases}\ln\alpha<\alpha-1\\-\alpha<-1\end{cases}$ άρα $\ln\alpha-\alpha<\alpha-2\Leftrightarrow\ln\alpha-2\alpha<-2$ άρα $\ln\alpha-2\alpha<0$.

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, οπότε

$f'((-\infty,0))=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x),\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)\right)=(-\infty,\ \ln\alpha-2\alpha)$. Άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$,

αφού $\ln\alpha-2\alpha<0$.

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f΄(x)	$-$	‖	$+$	0	$+$
f(x)	$+\infty \searrow 1$	‖	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$
				ελάχιστο	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=0$.

γ) Το σύνολο τιμών της είναι $f(A)=(1,+\infty)\cup[0,+\infty)=[0,+\infty)$.

δ) Από τον πίνακα μεταβολών έχουμε ότι $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

ΘΕΜΑ 3ο (9ο – 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- **Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.**
- **Η f έχει όριο στο $+\infty$**
- **$f(x)+e^{f(x)}=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

δ) Η f έχει δεύτερη παράγωγο και είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e+1$ είναι $E=\dfrac{3}{2}$ τ.μ .

ΛΥΣΗ

α) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+e^{f(x)}\right)=-\infty$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+e^{f(x)}\right)=\ell+e^{\ell}$, ενώ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο της f στο $+\infty$ υποχρεωτικά $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $\left(f(x)+e^{f(x)}\right)'=(x)'$, άρα $f'(x)\cdot\left(1+e^{f(x)}\right)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και ″1−1″, οπότε αντιστρέφεται και ισχύει:

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, άρα έχουμε $y + e^y = f^{-1}(y)$, οπότε $f^{-1}(x) = e^x + x$, $x \in R$.

δ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $\dfrac{1}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \dfrac{-f'(x)e^{f(x)}}{\left(1+e^{f(x)}\right)^2} < 0$

(αφού $f'(x) > 0$), οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 1$ είναι $f(x) \geq f(1) = 0$, άρα $E = \int_1^{e+1} |f(x)|dx = \int_1^{e+1} f(x)dx$

Θέτουμε $u = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$, οπότε $dx = \left(f^{-1}(u)\right)' du = \left(e^u + u\right)' du = \left(e^u + 1\right)du$

Για $x = 1$ είναι $u = f(1) = 0$, γιατί $f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και

για $x = e+1$ είναι $u = f(e+1) = 1$, γιατί $f^{-1}(1) = e+1 \Leftrightarrow f(e+1) = 1$, άρα

$$E = \int_0^1 u\left(e^u + 1\right)du = \int_0^1 ue^u du + \int_0^1 u du = \int_0^1 u\left(e^u\right)' du + \int_0^1 u du = \left[ue^u\right]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ 4ο (10ο – 2008)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 3$$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, $x \in \mathbb{R}$.

Β. Αν $g(x) = \ln f(x)$ τότε:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

β) Να βρείτε την g' και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx$

γ) Να αποδείξετε ότι $J + 9I = K$, όπου:

$$J = \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx \quad \text{και} \quad K = \int_0^4 \sqrt{x^2+9}\,dx$$

δ) Να αποδείξετε ότι $J + K = 20$

ε) Να υπολογίσετε τα J, K.

στ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την g^{-1}.

ΛΥΣΗ

Α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + f^2(x) = 2x \cdot f(x) + 10 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow \left(f(x) - x\right)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow h^2(x) = x^2 + 9 \quad (1),$$

όπου $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2+9>0 \Leftrightarrow h^2(x)>0 \Leftrightarrow h(x)\neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ έχουμε $h(0)=f(0)-0=3>0$, οπότε $h(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως από

$(1) \Leftrightarrow h(x)=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$

Β. α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $x+\sqrt{x^2+9}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\geq 0$. Άρα $A=\mathbb{R}$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+9}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)' \Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+9}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}\right) \Leftrightarrow$$

$$g'(x)=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+9}}}\cdot\frac{\cancel{x+\sqrt{x^2+9}}}{\sqrt{x^2+9}} \Leftrightarrow g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$$

Είναι $I=\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4 g'(x)dx=\left[g(x)\right]_0^4=g(4)-g(0)=\ln 9-\ln 3=\ln\frac{9}{3}=\ln 3$

γ) $J+9I=\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx+9\int_0^4\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\frac{x^2+9}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^4\sqrt{x^2+9}\,dx=K$

δ) $K=\int_0^4 (x)'\cdot\sqrt{x^2+9}\,dx=\left[x\cdot\sqrt{x^2+9}\right]_0^4-\int_0^4 x\cdot\left(\sqrt{x^2+9}\right)'dx=$

$$=20-\int_0^4 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+9}}\cdot\left(x^2+9\right)'dx=20-\int_0^4\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}dx=20-J$$. Άρα $J+K=20$

ε) Λύνουμε το σύστημα: $\left.\begin{matrix} J-K=-9I \\ J+K=20\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} J-K=-9\ln 3 \\ J+K=20\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} J=10-\frac{9}{2}\ln 3 \\ K=10+\frac{9}{2}\ln 3\end{matrix}\right.$

στ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}>0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και ″1−1″, άρα αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y=g(x)$ ως προς x. Είναι

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+9}=e^y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}=e^y-x\overset{e^y>x}{\Leftrightarrow}x^2+9=\left(e^y-x\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+9=e^{2y}-2xe^y+x^2\Leftrightarrow 2xe^y=e^{2y}-9\Leftrightarrow x=\frac{e^{2y}-9}{2e^y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\frac{e^{2y}-9}{2e^y}$$

Όμως $e^y>x\Leftrightarrow e^y>\frac{e^{2y}-9}{2e^y}\Leftrightarrow 2e^{2y}>e^{2y}-9\Leftrightarrow e^{2y}>-9$, αληθής για κάθε $y\in\mathbb{R}$

Άρα $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^{-1}(x)=\frac{e^{2x}-9}{2e^x}$.

ΘΕΜΑ 5ο (12ο – 2008)

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}=10$.

1) Να αποδείξετε ότι: α) $f(3)=7$ β) $f'(3)=5$

2) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y=5x-8$.

β) Ένα σημείο Σ, που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία (ε). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι $2\ m/sec$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

ΛΥΣΗ

1. α) Θέτουμε $h(x)=\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}\Leftrightarrow f(2x+1)=(x-1)h(x)+7$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}f(2x+1)=\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)h(x)+7\right]=7 \quad (1)$

Θέτουμε $2x+1=\omega$, (όταν $x\to 1$ το $\omega\to 3$), άρα η $(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{\omega\to 3}f(\omega)=7 \overset{f\ \text{συνεχής}}{\Leftrightarrow} f(3)=7$.

β) Για $x\neq 1$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-7}{x-1}=10 \overset{f(3)=7}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x+1)-f(3)}{x-1}=10 \quad (2)$

Θέτουμε $2x+1=\omega$, (όταν $x\to 1$ το $\omega\to 3$), άρα η (2) για $\omega\neq 3$ γίνεται

$$\lim_{\omega\to 3}\frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-1}{2}-1}=10\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 3}\frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-3}{2}}=10\Leftrightarrow \lim_{\omega\to 3}\left[2\cdot\frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3}\right]=10,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim\limits_{\omega\to 3}\dfrac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3}=5$, άρα $f'(3)=5$.

2. α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3,f(3))$

$$(\varepsilon):\ y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-7=5(x-3)\Leftrightarrow y=5x-8$$

β) Έστω $\Sigma(x,y)$ σημείο της (ε). Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$(\text{ΟΜΣ})=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\text{ΟΜ}},\overrightarrow{\text{ΟΣ}}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}3 & 7\\ x & y\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|3y-7x|=\frac{1}{2}|3(5x-8)-7x|=$$

$$=\frac{1}{2}|8(x-3)|=4|x-3|=4x-12,\ (x>3)$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$\left(E(x(t))\right)'=\left(4x(t)-12\right)'=4x'(t)=4\cdot 2=8\ m^2/sec$$

ΘΕΜΑ 6ο (13ο – 2008)

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+e^{x}-1$

1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x}=1-x$

3) Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x)+e^{g(x)}=2x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι $g(0)=0$

4) Να λύσετε την ανίσωση $(g\circ f)(x)>0$

5) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(e,1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο Μ.

ΛΥΣΗ

1) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=1+e^{x}>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2) Είναι $e^{x}=1-x\Leftrightarrow e^{x}+x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$. Προφανής λύση η $x=0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και ″1–1″ η λύση αυτή είναι μοναδική.

3) α) Έστω ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2\in A_g$ με $x_1<x_2$, ώστε

$$\begin{cases} g(x_1)\ge g(x_2) \\ e^{g(x_1)}\ge e^{g(x_2)} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} g(x_1)+e^{g(x_1)}\ge g(x_2)+e^{g(x_2)}\Leftrightarrow 2x_1+1\ge 2x_2+1\Leftrightarrow x_1\ge x_2$$ άτοπο, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα.

β) Ισχύει $g(0)+e^{g(0)}=1$ προφανής λύση η $g(0)=0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και ″1–1″ η λύση αυτή είναι μοναδική.

4) Είναι $g(f(x))>0\Leftrightarrow g(f(x))>g(0)\overset{g\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>0\Leftrightarrow f(x)>f(0)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x>0$

5) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και ″1–1″.

Το σημείο $M\in C_{f^{-1}}$, αν και μόνο αν, το συμμετρικό του Μ ως προς την $y=x$, δηλαδή το σημείο $N(1,e)\in C_f$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Ν είναι:

$$(\varepsilon):\ y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=(1+e)x-1$$

Η συμμετρική της (ε) ως προς την $y=x$ θα είναι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο Μ και βρίσκουμε ότι έχει εξίσωση $y=\dfrac{1}{1+e}x+\dfrac{1}{1+e}$

ΘΕΜΑ 7ο (17ο – 2008)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=(0,+\infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)f(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Η $g(x)=f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(-x)}{f(x)}dx=\frac{f^2(0)-f^2(-1)}{2}$

Γ) Αν $f(0)=1$ να βρείτε τη συνάρτηση f.

ΛΥΣΗ

Α) α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)f(-x)=1$ (1)

Η f έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$, επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(-x)>0$, άρα από (1) έχουμε $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2\Leftrightarrow -x_1>-x_2\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(-x_1)>f(-x_2)\underset{\text{ΜΕΛΗ}}{\overset{\text{ΘΕΤΙΚΑ}}{\Leftrightarrow}}\frac{1}{f(-x_1)}<\frac{1}{f(-x_2)}\Leftrightarrow f'(x_1)<f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Στο (β) ερώτημα δείξαμε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι:

$$f(-x_1)>f(-x_2)\Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$$

οπότε η $g(x)=f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Β) Θέτουμε $-x=u\Leftrightarrow x=-u$, οπότε $dx=-du$. Όταν $x=0$ το $u=0$ και όταν $x=1$ το $u=-1$.

Έχουμε $\displaystyle\int_0^1\frac{f(-x)}{f(x)}dx=-\int_0^{-1}\frac{f(u)}{f(-u)}du=-\int_0^{-1}f(u)\cdot f'(u)du=-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_0^{-1}=\frac{f^2(0)-f^2(-1)}{2}$

Γ) Η (1) ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα θα ισχύει και για $-x\in\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$f'(-x)\cdot f(x)=1\Leftrightarrow -f'(-x)\cdot f(x)=-1\Leftrightarrow\left[f(-x)\right]'\cdot f(x)=-1\qquad(2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(x)\cdot f(-x)+\left[f(-x)\right]'\cdot f(x)=0\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot f(-x)\right]'=0\Leftrightarrow f(x)\cdot f(-x)=c_1,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ είναι $f(0)\cdot f(0)=c_1\Leftrightarrow c_1=1$. Άρα $f(x)\cdot f(-x)=1,\ x\in\mathbb{R}$ (3)

Από (1) και (3) για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $f'(x)\cdot f(-x)=f(x)\cdot f(-x)\overset{f(-x)>0}{\Leftrightarrow}f'(x)=f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}f'(x)e^{-x}-e^{-x}f(x)=0\Leftrightarrow\left(f(x)\cdot e^{-x}\right)'=0\Leftrightarrow f(x)\cdot e^{-x}=c_2$$

Για $x=0$ είναι $f(0)\cdot e^0=c_2\Leftrightarrow c_2=1$. Επομένως $f(x)\cdot e^{-x}=1\Leftrightarrow f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 8ο (18ο – 2008)

Α) Να αποδείξετε ότι $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $\left(f'(x) - f(x)\right)e^x = (x-1)f'(x) - f(x)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{e^{\kappa} - e^{\lambda}} < e^{\kappa - \lambda}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ με $\kappa < \lambda$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς Α , Β έτσι, ώστε

$$x - 2 = A \cdot f'(x) + B \cdot f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{x-2}{e^x - x + 1}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$.

ΛΥΣΗ

Α) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = e^x - 1$

Είναι $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης h είναι

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h΄(x)	$-$	0	$+$
h(x)	$\searrow$	2	$\nearrow$
		ελάχιστο	

$h(0) = 2$

Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $h(0) = 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 2, \text{ άρα } h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$$

Β) α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\left(f'(x) - f(x)\right)e^x = (x-1)f'(x) - f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^x - f(x)e^x - x \cdot f'(x) + f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^x - x + 1\right) - f(x)\cdot\left(e^x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(e^x - x + 1\right) - f(x)\cdot\left(e^x - x + 1\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot\left(e^x - x + 1\right) - f(x)\cdot\left(e^x - x + 1\right)'}{\left(e^x - x + 1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x - x + 1}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x - x + 1} = c \Leftrightarrow f(x) = c\cdot\left(e^x - x + 1\right).$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) = c\cdot\left(e^0 - 0 + 1\right) \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Η $f(x) = e^x - x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ (βλέπε (Α) ερώτημα), άρα για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ με $\kappa < \lambda$ ισχύει

$$f(\kappa) < f(\lambda) \Leftrightarrow e^{\kappa} - \kappa + 1 < e^{\lambda} - \lambda + 1 \Leftrightarrow e^{\kappa} - \kappa < e^{\lambda} - \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{e^{\kappa} - \kappa} < e^{e^{\lambda} - \lambda} \Leftrightarrow \frac{e^{e^{\kappa}}}{e^{\kappa}} < \frac{e^{e^{\lambda}}}{e^{\lambda}} \Leftrightarrow \frac{e^{e^{\kappa}}}{e^{e^{\lambda}}} < \frac{e^{\kappa}}{e^{\lambda}} \Leftrightarrow e^{e^{\kappa} - e^{\lambda}} < e^{\kappa - \lambda}$$

γ) Αναζητούμε $A, B \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $x-2 = A \cdot f'(x) + B \cdot f(x) \Leftrightarrow$

$$x-2 = A\cdot\left(e^x-1\right)+B\cdot\left(e^x-x+1\right) \Leftrightarrow x-2=(A+B)e^x-Bx+B-A$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει και για συγκεκριμένες τιμές του x.

Για $x=0$ έχουμε $0-2=(A+B)e^0-B\cdot 0+B-A \Leftrightarrow -2=\cancel{A}+B+B-\cancel{A} \Leftrightarrow 2B=-2 \Leftrightarrow B=-1$

Για $x=1$ έχουμε $1-2=(A+B)e^1-B\cdot 1+B-A \Leftrightarrow -1=(A+B)e-\cancel{B}+\cancel{B}-A \overset{B=-1}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow -1=(A-1)e-A \Leftrightarrow (A-1)(e-1)=0 \Leftrightarrow A=1$$

δ) Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $g(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι:

$$E(\Omega)=-\int_0^1 g(x)dx=-\int_0^1\frac{x-2}{e^x-x+1}dx=-\int_0^1\frac{\left(e^x-1\right)-\left(e^x-x+1\right)}{e^x-x+1}dx=$$

$$=-\int_0^1\frac{e^x-1}{e^x-x+1}dx+\int_0^1\frac{e^x-x+1}{e^x-x+1}dx=-\int_0^1\frac{\left(e^x-x+1\right)'}{e^x-x+1}dx+\int_0^1 1dx=$$

$$=-\left[\ln\left(e^x-x+1\right)\right]_0^1+1(1-0)=-(\ln e-\ln 2)+1=\ln 2 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 9ο (19ο – 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$.

i) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$

ii) Έστω η συνάρτηση g με $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, $x>0$ και $g(0)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 g(x)dx$.

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)\underset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^2e^{-u}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u^2}{e^u}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}$

$$=\lim_{u\to+\infty}\frac{\left(u^2\right)'}{\left(e^u\right)'}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2u}{e^u}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{(2u)'}{\left(e^u\right)'}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2}{e^u}=0$$

ii) α) Για να είναι η g συνεχής στο $[0,1]$ πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $(0,1)$ και επιπλέον

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=g(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^-} g(x)=g(1)$$

Η g είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{1}\right)e^{-\frac{1}{1}}=g(1)$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0=1$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}\underset{\text{D.L.H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0=g(0)$,

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \underset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty}{\overset{u=\frac{1}{x}}{=}} \lim\limits_{u\to +\infty} e^u=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

β) 1ος τρόπος

Η συνάρτηση $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα και η αρχική της στο $[0,1]$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη:

$$G(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & 0<x\le 1 \\ c, & x=0 \end{cases} \quad \text{με} \quad c=\lim_{x\to 0^+}G(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right)=0, \quad \text{άρα} \quad c=0$$

Επομένως $I=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 G'(x)dx=\left[G(x)\right]_0^1=G(1)-G(0)=\frac{1}{e}-0=\frac{1}{e}$

2ος τρόπος

$$I=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}dx=\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt=\lim_{x\to 0^+}\left[\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt+\int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\int_x^1 (t)'\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt+\int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\left[t\cdot e^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1-\int_x^1 t\cdot\left(e^{-\frac{1}{t}}\right)'dt+\int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[e^{-1}-xe^{-\frac{1}{x}}-\cancel{\int_x^1 t\cdot\frac{1}{t^2}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt}+\cancel{\int_x^1\frac{1}{t}\cdot e^{-\frac{1}{t}}dt}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e}-xe^{-\frac{1}{x}}\right)=\frac{1}{e}$$

Διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\right)=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}=0$.

ΘΕΜΑ 10ο (23ο – 2008)

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=g(0)=1$, οι οποίες για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=2g'(x)+g^2(x)\cdot f(x)=0$ (1), $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\alpha$, $x=\alpha+1$ όπου $\alpha>0$, καθώς και το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$.

ΛΥΣΗ

α) Από (1) έχουμε $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=0 \overset{g(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 2f'(x)\cdot g(x)+f^2(x)\cdot g^2(x)=0$ (2) και

$$2g'(x)+g^2(x)\cdot f(x)=0 \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} 2g'(x)\cdot f(x)+f^2(x)\cdot g^2(x)=0 \quad (3)$$

Από (2), (3) έχουμε $2f'(x)\cdot g(x)+\cancel{f^2(x)\cdot g^2(x)}=2g'(x)\cdot f(x)+\cancel{f^2(x)\cdot g^2(x)}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)=g'(x)\cdot f(x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)=0\overset{g(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}=0\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0\Leftrightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=c,\ x\in(-1,+\infty).$$

Για $x=0$ είναι $\dfrac{f(0)}{g(0)}=c\Leftrightarrow c=\dfrac{1}{1}=1$, άρα $\dfrac{f(x)}{g(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

Οι f, g είναι συνεχείς στο $(-1,+\infty)$, $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$. Άρα οι f, g διατηρούν σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0)=g(0)=1>0$ έχουμε $f(x)>0$ και $g(x)>0$.

β) Είναι $2f'(x)+f^2(x)\cdot g(x)=0\overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow}2f'(x)+f^3(x)=0\Leftrightarrow 2f'(x)=-f^3(x)\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow -\frac{2f'(x)}{f^3(x)}=1\Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x)=1\Leftrightarrow\left(f^{-2}(x)\right)'=(x)'\Leftrightarrow\frac{1}{f^2(x)}=x+c$$

Για $x=0$ έχουμε $\dfrac{1}{f^2(0)}=0+c\Leftrightarrow c=1$

Άρα για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $f^2(x)=\dfrac{1}{x+1}\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

γ) Για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x+1}\right)'}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=-\frac{(x+1)'}{2\left(\sqrt{x+1}\right)(x+1)}=-\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)(x+1)}<0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$.

Για $x \in (-1, +\infty)$ έχουμε $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$, διότι για $x > -1$ είναι $\sqrt{x+1} > 0$ και $\lim\limits_{x \to -1^+} \sqrt{x+1} = 0$. Άρα η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Για $x \in (0, +\infty)$ είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{x} \right) = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $y = 0x + 0 = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) $E(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} |f(x)| dx \overset{f(x)>0}{=} \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2\sqrt{x+1} \right]_{\alpha}^{\alpha+1} = 2\sqrt{\alpha+2} - 2\sqrt{\alpha+1}$

Άρα $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} 2\left[\sqrt{\alpha+2} - \sqrt{\alpha+1} \right] = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{2\left(\sqrt{\alpha+2} - \sqrt{\alpha+1}\right)\left(\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}\right)}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} =$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2\left[\left(\sqrt{\alpha+2}\right)^2 - \left(\sqrt{\alpha+1}\right)^2 \right]}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2(\alpha+2-\alpha-1)}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = 0.$$

ΘΕΜΑ 11ο (24ο – 2008)

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για $x \in \mathbb{R}^*$ η οποία είναι «1-1» και έχει την ιδιότητα:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{για κάθε} \quad x \neq 0$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) = \frac{1}{x}$ και $f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \neq 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$ και $f(-1) = 1$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι αδύνατη.

δ) Αν η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$

ii) Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \neq 0$ (1)

Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $f(x) \neq 0$ και έχουμε:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow x = \frac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow f(f(x)) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad (2)$$

Στη σχέση (2) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x} \neq 0$ και έχουμε:

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x, \text{ άρα και } f^{-1}\left(f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f^{-1}(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = f^{-1}(x) f(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{για κάθε } x \neq 0 \quad (3)$$

β) Από τη σχέση (3) για $x=1$ έχουμε $f(1)f(1)=1 \Leftrightarrow f^2(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$ ή $f(1)=-1$

Έστω ότι $f(1)=1$, τότε $f^{-1}(1)=\dfrac{1}{f(1)}=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα για $x>1 \Leftrightarrow f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}<1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)<1$ άτοπο, αφού $f^{-1}(1)=1$. Άρα $f(1)=-1$

Από τη σχέση (3) για $x=-1$ έχουμε $f(f(-1))=-1 \underset{\text{ερώτημα}}{\overset{(\beta)}{\Leftrightarrow}} f(f(-1))=f(1) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(-1)=1$

γ) Για $x\neq 0$ έχουμε:

$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}$, άρα $x=\dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

Όμως για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$ άτοπο, αφού $f(1)=-1$ και για $x=-1$ έχουμε $f(-1)=-1$ άτοπο, αφού $f(-1)=1$. Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ είναι αδύνατη.

δ) i) Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(0,+\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(1)=-1<0$, οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(-\infty,0)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(-1)=1>0$, οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, τότε για κάθε $x_1,x_2\,(-\infty,0)$ με $x_1<x_2$ θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{f^{-1}(x_1)}<\dfrac{1}{f^{-1}(x_2)} \Leftrightarrow f^{-1}(x_1)>f^{-1}(x_2)$ άτοπο, αφού $f^{-1}(x_1)$, $f^{-1}(x_2)$ είναι ομόσημοι και f^{-1} διατηρεί τη μονοτονία της f.

ΘΕΜΑ 12ο (25ο – 2008)

Δίνονται:

- **Η ευθεία (ε): $y=x-e$**
- **Η συνάρτηση $g(x)=x\ln x-x$ και**
- **Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f'(\ln x)=x\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$**

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_g.

β) i) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$ τότε ισχύει $f(x)=g(e^x)$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Για κάθε $x\in(0,1)$, ισχύει $-1<f(x)<xe-1$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g'(x)=\ln x$.

Η ευθεία (ε): $y=x-e$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g, αν και μόνο αν, υπάρχει σημείο $M(x_o, g(x_o))$ τέτοιο, ώστε $\begin{cases} g(x_o)=x_o-e \\ g'(x_o)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o\ln x_o - x_o = x_o - e \\ \ln x_o = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_o=e$

Έχουμε λοιπόν $\begin{cases} g(e)=0 \\ g'(e)=1 \end{cases}$, συνεπώς η ευθεία (ε): $y=x-e$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $M(e,0)$.

β) i) Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(\ln x)=x\ln x \Leftrightarrow f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}=\ln x \Leftrightarrow$

$\left[f(\ln x)\right]'=(x\ln x-x)'$, άρα: $f(\ln x)=x\ln x-x+c$. Για $x=1$ έχουμε $f(0)=0-1+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα $f(\ln x)=x\ln x-x\Leftrightarrow f(\ln x)=g(x)$.

Αν θέσουμε όπου x το e^x έχουμε $g(e^x)=f(\ln e^x)\Leftrightarrow f(x)=g(e^x)$.

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα $[0,x]$, $0<x<1$ με $f'(x)=xe^x$. Ισχύει λοιπόν

το Θ.Μ.Τ. άρα θα υπάρχει $\xi\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow \xi e^{\xi}=\dfrac{f(x)+1}{x}$ (1)

Είναι $0<\xi<x<1\Leftrightarrow e^0<e^{\xi}<e^x<e^1\Leftrightarrow 1<e^{\xi}<e^x<e$ άρα $1<e^{\xi}<e$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases}0<\xi<1\\ 1<e^{\xi}<e\end{cases} \text{ άρα } 0<\xi e^{\xi}<e \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 0<\frac{f(x)+1}{x}<e\Leftrightarrow -1<f(x)<xe-1$$

ΘΕΜΑ 13ο (27ο – 2008)

Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ με πρώτη παράγωγο γνησίως φθίνουσα και συνεχή. Αν $f(0)=0$, $f'(0)>0$ και για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $f(x)\geq 0$ και $f'(x)\neq 0$ να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

β) Η εξίσωση $f'(x)=f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

γ) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{f^2(x)+1}<\frac{f(1)}{f'(1)}$

ΛΥΣΗ

α) Η f' είναι συνεχής και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f'(0)>0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$

τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}=f(1)$ (1).

Άρα η εξίσωση $f'(x)=f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Για $\xi<1\overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi)>f'(1)\overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(1)>f'(1)\overset{f'(1)>0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f(1)}{f'(1)}>1$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{f^2(x)+1}\leq 1\Leftrightarrow\int_0^1\frac{dx}{f^2(x)+1}\leq\int_0^1 1dx\Leftrightarrow\int_0^1\left(\frac{1}{f^2(x)+1}-1\right)dx\leq 0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1\frac{f^2(x)}{f^2(x)+1}dx\leq 0\Leftrightarrow\int_0^1\frac{f^2(x)}{f^2(x)+1}dx\geq 0,\ \text{το οποίο ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 14ο (31ο – 2008)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x)+3f(x)=x^5+x+1$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho\in(-1\,,0)$.

γ) Η f αντιστρέφεται.

δ) Το σημείο $N(0\,,\rho)\in C_{f^{-1}}$.

ε) Η εξίσωση $f(x)=f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Υπόδειξη

Θεωρείται γνωστό ότι:

$$\text{αν } f \nearrow \text{ στο Α, τότε } f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x,\ \ x\in B=A\cap f(A)$$

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση x^5+x+1 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x)+3f'(x)=5x^4+1\Leftrightarrow$$

$$3\left(f^2(x)+1\right)f'(x)=5x^4+1\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{5x^4+1}{3\left(f^2(x)+1\right)}>0\ ,\ \ x\in\mathbb{R}$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)\left(f^2(x)+3\right)=x^5+x+1\Rightarrow f(x)=\frac{x^5+x+1}{f^2(x)+3}\quad (2)$$

Είναι:

$$f(0)=\frac{1}{f^2(0)+3}>0\quad\text{και}\quad f(-1)=\frac{-1}{f^2(-1)+3}<0.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και $f(-1)f(0)<0$. Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ρίζα στο $(-1\,,0)$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και "1 - 1", άρα αντιστρέφεται.

δ) Αφού ρ ρίζα της $f(x)=0$ ισχύει $f(\rho)=0 \Leftrightarrow M(\rho\,,0)\in C_f \Leftrightarrow N(0\,,\rho)\in C_{f^{-1}}$.

ε) Η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=x$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0\,,1)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f^3(x)+3f(x)=x^5+x+1 \Leftrightarrow$$

$$f^3(x)-x^3+3f(x)-3x=x^5+x+1-x^3-3x \Leftrightarrow$$

$$\left[f(x)-x\right]\cdot\left[f^2(x)+xf(x)+x^2+3\right]=x^5-x^3-2x+1 \qquad (2)$$

Είναι γνωστό ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f^2(x)+x\,f(x)+x^2 \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x)+x\,f(x)+x^2+3 \geq 3$.

Αρκεί λοιπόν η συνάρτηση $g(x)=x^5-x^3-2x+1,\ x \in \mathbb{R}$, να έχει ρίζα στο $(0,1)$.

Παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$.
- $g(0)g(1)=1\cdot(-1)<0$.

Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano, οπότε η $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

ΘΕΜΑ 15ο (32ο – 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\alpha}(x+\alpha)e^{\alpha-x}, x \in R$ και $\alpha>0$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε α>0 οι γραφικές παραστάσεις των f και f΄ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

δ) Η ευθεία x=1 ορίζει με τις γραφικές παραστάσεις των f και f΄ ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε το τμήμα αυτό να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

ε) Η γραφική παράσταση της f για α=1, ο άξονας x΄x και η ευθεία $x=\lambda$ με $\lambda>-1$ ορίζουν ένα χωρίο με εμβαδόν Ε(λ). Να βρείτε το Ε(λ) και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$.

ΛΥΣΗ

α)

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$, η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.
- Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\alpha}{e^{x-\alpha}}=\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-\alpha}}=0$, οπότε η ευθεία y=0, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι οριζόντια ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f'(x)=\frac{1}{\alpha}e^{\alpha-x}-\frac{1}{\alpha}(x+\alpha)e^{\alpha-x}=\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}-1\right)e^{\alpha-x}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο R με:

$$f''(x)=\left(\frac{x}{\alpha}+1-\frac{2}{\alpha}\right)e^{\alpha-x}$$

Είναι:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1-\alpha$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<1-\alpha$
- $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=2-\alpha$ και $f''(x)>0 \Leftrightarrow x>2-\alpha$

Οπότε ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	1-α	2-α	$+\infty$
f΄(x)	+	0	−	−
f΄΄(x)	−		− 0	+
f(x)	↗		↘	↘

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $(-\infty, 1-\alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κοίλη στο $[1-\alpha, 2-\alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $[2-\alpha, +\infty)$. Η f έχει μοναδικό μέγιστο για $x=1-\alpha$ το $f(1-\alpha)=\frac{1}{\alpha}\cdot e^{2\alpha-1}$ και μοναδικό σημείο καμπής το $K\left(2-\alpha, \frac{2}{\alpha}e^{2\alpha-2}\right)$

γ) Έχουμε $f΄(x)=f(x) \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha}+1=\frac{1}{\alpha}-\frac{x}{\alpha}-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}-\alpha$, που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f΄ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

δ) Έστω d(α) το μήκος του τμήματος, τότε:

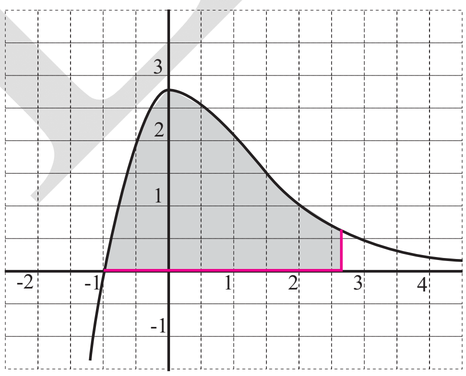
$$d(\alpha)=\left|f(1)-f΄(1)\right|=\left(\frac{1}{\alpha}+2\right)e^{\alpha-1} \quad \text{και} \quad d΄(\alpha)=d΄(\alpha)=\left(-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+2\right)e^{\alpha-1}$$

Επομένως $d΄(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}$ και $d΄(\alpha)>0 \Leftrightarrow \alpha>\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	½	$+\infty$
f΄(x)	−	0	+
f(x)	↓		↑

Άρα για $\alpha=\frac{1}{2}$ το d έχει ελάχιστο μήκος.

ε) $E(\lambda)=\int_{-1}^{\lambda} f(x)dx=\int_{-1}^{\lambda}(x+1)e^{x-1}dx=\left[(x+1)\left(-e^{1-x}\right)\right]_{-1}^{\lambda}-\int_{-1}^{\lambda}\left(-e^{1-x}\right)dx=e^2-(\lambda+2)e^{1-\lambda}$



και $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)=e^2-\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda+2}{e^{\lambda-1}}=e^2$