

ΒΑΣΙΚΟΙ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- 1) Η γραφική παράσταση της $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της f .

ΑΛΗΘΕΣ

Η γραφική παράσταση της $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ ως προς τον άξονα $x'x$.

- 2) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

ΑΛΗΘΕΣ

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x, |f(x)|)$, τα οποία είναι είτε τα $M(x, f(x))$ αν $f(x) \geq 0$ (δηλαδή αυτά που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$) είτε τα $M(x, -f(x))$ αν $f(x) < 0$, τα οποία είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ ως προς τον άξονα $x'x$ και πάνω από αυτόν.

- 3) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες. Δηλαδή γενικά $f \circ g \neq g \circ f$.

ΑΛΗΘΕΣ

Αντιπαράδειγμα: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

- 4) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(gof)$, τότε ορίζεται και η $(hog)of$ και ισχύει $ho(gof) = (hog)of$.

ΑΛΗΘΕΣ

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε **σύνθεση των f, g και h** και τη συμβολίζουμε με $hogof$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

- 5) Αν μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη στο A .

ΨΕΥΔΕΣ

Αντιπαράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$, είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

- 6) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

ΨΕΥΔΕΣ

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f όμως δεν είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}^*$ αφού για $x_1 < 0 < x_2$ ισχύει

$$\frac{1}{x_1} < 0 < \frac{1}{x_2} \text{ δηλαδή } \frac{\alpha}{x_1} < 0 < \frac{\alpha}{x_2}. \text{ Δηλαδή}$$

Το γεγονός ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε δύο διαστήματα A και B δεν σημαίνει ότι η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως φθίνουσα και στην ένωση των διαστημάτων $A \cup B$.

- 7) **Πρόταση :**

α) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι 1-1

β) Η αντίστροφη μίας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας

Απόδειξη

α) Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, θα έχουμε για $x_1 < x_2$ ότι $f(x_1) < f(x_2)$ (αν η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα) ή $f(x_1) > f(x_2)$ (αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα). Δηλαδή σε κάθε περίπτωση θα είναι $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Επομένως η f είναι “1-1”.

β) Έστω ότι η $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο A .

Ας υποθέσουμε ότι η αντίστροφη f^{-1} της f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε θα υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ με $y_1 < y_2$ και $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε : $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$ δηλαδή $y_1 \geq y_2$, που είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $y_1 < y_2$.

Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Ανάλογα αποδεικνύεται η πρόταση και για γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο A .

- 8) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο A δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα.

ΨΕΥΔΕΣ

Αντιπαράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και έχει ελάχιστο το 0 και μέγιστο το 1.

- 9) Αν $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τότε για κάθε α, β πραγματικό αριθμό με $\alpha = \beta$ θα ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

ΨΕΥΔΕΣ

Αν $f(x) = \ln x$, το $-1 = -1$ όμως δεν ορίζεται το $f(-1)$.

- 10) Αν η f είναι περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της, τότε το $f(0)$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

ΨΕΥΔΕΣ

Αφού η f είναι περιττή θα έχουμε $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$. Άρα δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

- 11) Οι περιοδικές συναρτήσεις δεν παρουσιάζουν ολικά ακρότατα.

ΨΕΥΔΕΣ

Η $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -1.

- 12) Αν f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε x πραγματικό τότε $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ για κάθε x πραγματικό.

ΨΕΥΔΕΣ

Αν $f(x) = \begin{cases} 0, x \geq 0 \\ x, x < 0 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$ τότε $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x και δεν είναι καμία από τις δύο η μηδενική συνάρτηση.

- 13) Μία συνάρτηση δεν μπορεί να είναι και περιττή και άρτια.

ΨΕΥΔΕΣ

Η $f(x) = 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι και άρτια και περιττή αφού για κάθε x πραγματικό έχουμε $f(-x) = f(x) = -f(x) = 0$.

- 14) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τότε δεν έχει ακρότατα.

ΨΕΥΔΕΣ

Η $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει μέγιστο το 1 και ελάχιστο το -1.

- 15) Αν το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $[-1, 1]$, τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in A$ (A το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f) για το οποίο ισχύει $f(x_0) = -1$.

ΨΕΥΔΕΣ

Η $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ελάχιστο το -1 σε κάθε $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- 16) Μια συνάρτηση f έχει ελάχιστο και μέγιστο, αν και μόνο αν υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με $\kappa \leq f(x) \leq \lambda$ για κάθε $x \in D_f$.

ΨΕΥΔΕΣ

- Αν η f έχει ελάχιστο το $\kappa = f(x_1)$ και μέγιστο το $\lambda = f(x_2)$ τότε $\kappa \leq f(x) \leq \lambda$, για κάθε $x \in D_f$.
- Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αντιπαράδειγμα Αν η $f(x) = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $-2 \leq f(x) \leq 3$ χωρίς η f να έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 3 .

- 17) Είναι σωστός ο ορισμός: «Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο».

Η

Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες έχουν τον ίδιο τύπο.

ΛΑΘΟΣ

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$ με κοινό πεδίο ορισμού το $A = \{-1, 0, 1\}$, είναι ίσες, όμως δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

- 18) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$ και $g(x) = x^{\frac{m}{n}}$, $n, m \in \mathbb{N}^*$, είναι ίσες.

ΛΑΘΟΣ

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ δεν είναι ίσες, διότι $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [0, +\infty)$.

- 19) Αν η συνάρτηση $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τότε υποχρεωτικά και η f και η g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ΛΑΘΟΣ

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $D_f = [-1, 1]$ και $g(x) = \eta \mu x$, $D_g = \mathbb{R}$ και $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$.

20) Πρόταση:

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$.

Απόδειξη

Έστω κ μία λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$. Δηλαδή το σημείο $A(\kappa, \lambda)$ είναι κοινό σημείο των C_f και

$$C_{f^{-1}}. \text{ Δηλαδή } \left. \begin{matrix} f(\kappa) = \lambda \\ f^{-1}(\kappa) = \lambda \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} f(\kappa) = \lambda \\ f(\lambda) = \kappa \end{matrix} \right\} \text{ ❶}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το κ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x$, δηλαδή αρκεί $\kappa = \lambda$.

Έστω ότι $\kappa \neq \lambda$. Αν $\kappa < \lambda \xRightarrow{f \uparrow} f(\kappa) < f(\lambda) \xRightarrow{\text{❶}} \lambda < \kappa$, άτοπο. Ομοίως σε άτοπο καταλήγουμε και αν υποθέσουμε ότι $\kappa > \lambda$. Άρα τελικά $\kappa = \lambda$.

Αλλά και αντιστρόφως αν το κ είναι μια λύσης της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, θα έχουμε

$f(\kappa) = \kappa \Leftrightarrow f^{-1}(\kappa) = \kappa$ δηλαδή το κ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ **αφού** $f(\kappa) = f^{-1}(\kappa)$.

Παρατήρηση:

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα τότε αν οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινά σημεία, αυτά είναι πιθανό

να βρίσκονται και εκτός της ευθείας $y = x$. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} = f^{-1}(x)$, $x < 0$.

Επειδή σε αυτή την περίπτωση οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ ταυτίζονται, έχουν άπειρα κοινά σημεία, από τα οποία μόνο το $(-1,1)$ ανήκει στην $y = x$.

40 ΓΕΛ ΚΕΡΚΥΡΑΣ