Ομοιότητα

2ο Θέμα

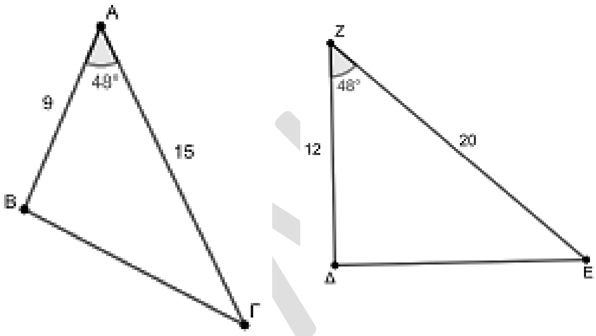
14535. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι: ΑΒ = 9, ΑΓ =15 και $\hat{A}=48^\circ$, $Z\Delta=12,\ ZE=20$ και $\hat{Z}=48^\circ$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

Λύση



α) Είναι $\dfrac{AB}{Z\Delta}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$ και $\dfrac{A\Gamma}{ZE}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$, άρα $\dfrac{AB}{Z\Delta}=\dfrac{A\Gamma}{ZE}$.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $A=Z$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

β) i. Είναι $\dfrac{AB}{Z\Delta}=\dfrac{A\Gamma}{ZE}=\dfrac{B\Gamma}{\Delta E}$

ii. Επειδή $\dfrac{AB}{Z\Delta}=\dfrac{3}{4}$, είναι $\lambda=\dfrac{3}{4}$

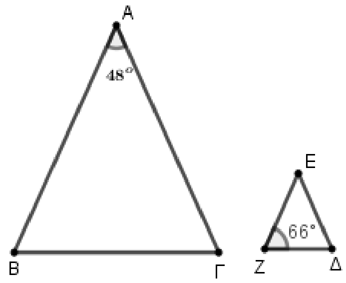
14536. Για δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΕΔΖ (ΕΔ = ΕΖ) γνωρίζουμε ότι: $\hat{A}=48^\circ$, $\hat{Z}=66^\circ$ και $AB=3\cdot E\Delta$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΖ είναι όμοια.

β) i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων.

ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

Λύση



α) Επειδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές με ΕΔ = ΕΖ, είναι $Z=\Delta=66^\circ$, τότε: $E+Z+\Delta=180^\circ \Leftrightarrow$

$E+66^\circ+66^\circ=180^\circ \Leftrightarrow E=180^\circ-132^\circ=48^\circ$.

Επειδή $AB=3\cdot E\Delta$ και ΑΒ = ΑΓ, ΕΔ = ΕΖ, είναι $\dfrac{AB}{E\Delta}=3$, $\dfrac{A\Gamma}{EZ}=3$,

δηλαδή $\dfrac{AB}{E\Delta}=\dfrac{A\Gamma}{EZ}$.

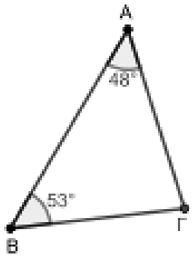
Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν $A=E$, έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

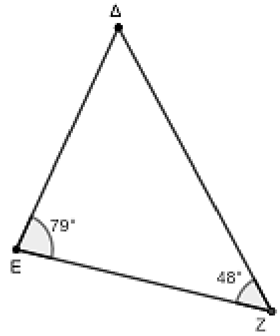
β) i. Είναι $\dfrac{AB}{E\Delta}=\dfrac{A\Gamma}{EZ}=\dfrac{B\Gamma}{Z\Delta}$

ii. Επειδή $\dfrac{AB}{E\Delta}=3$, είναι και $\dfrac{B\Gamma}{Z\Delta}=3$.

14537. Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:
$\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{B} = 53^\circ$, $\hat{E} = 79^\circ$ και $\hat{Z} = 48^\circ$.
α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.
β) i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων;
ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

Λύση



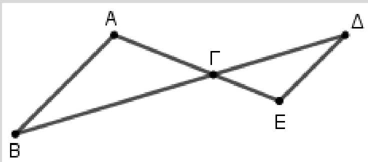


α) Από το άθροισμα γωνιών του τριγώνου ΔΕΖ έχουμε: $\Delta + E + Z = 180^\circ \Leftrightarrow \Delta + 79 + 48^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$
$\Delta = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.
Επειδή $B = \Delta$ και $A = Z$ τα δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε είναι όμοια.

β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:
Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ είναι οι πλευρές ΑΓ και ΕΖ, οπότε είναι ομόλογες, απέναντι από τις ίσες γωνίες A, Z είναι οι πλευρές ΒΓ και ΔΕ, οπότε είναι ομόλογες. Τέλος απέναντι από τις ίσες γωνίες Γ, E είναι οι πλευρές ΑΒ και ΔΖ, οπότε είναι ομόλογες.

ii. Οι ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων είναι: $\frac{A\Gamma}{EZ} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{AB}{\Delta Z}$

14538. Στο διπλανό σχήμα τα τμήματα ΑΒ και ΔΕ είναι παράλληλα και τα τμήματα ΑΓ και ΓΕ είναι τέτοια, ώστε ΑΓ= 2ΓΕ.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΔΓ είναι όμοια.
β) i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.
ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;



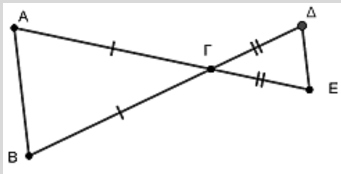
Λύση

α) Επειδή ΑΒ//ΔΕ είναι $A = E$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΕ και $B = \Delta$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΔΕ που τέμνονται από την ΒΔ.
Τα δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

β) i. Ομόλογες είναι οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, οπότε:
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες A, E ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες B, Δ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}$ και
- Απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\Gamma B$, $\Delta\Gamma E$ ο λόγος των ομόλογων πλευρών είναι $\frac{AB}{\Delta E}$.

ii. Ο λόγος ομοιότητας είναι ο λόγος των ομόλογων πλευρών τους, οπότε
$$\lambda = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E} = \frac{2\cancel{\Gamma E}}{\cancel{\Gamma E}} = 2.$$

14546. Στο διπλανό σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε ΑΒ = 2·ΔΕ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια.
β) i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).
ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

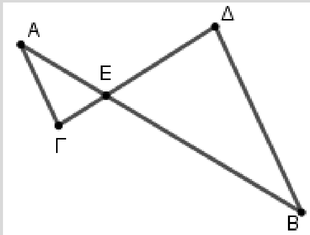
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΔΕ είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΑΒ και ΔΕ, είναι ΓΑ = ΓΒ και ΓΔ = ΓΕ. Είναι $\frac{ΓΑ}{ΓΔ}=\frac{ΓΒ}{ΓΕ}$ και $ΑΓΒ = ΔΓΕ$ ως κατακορυφήν, οπότε τα δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι όμοια.

β) i. Είναι $\frac{ΓΑ}{ΓΕ}=\frac{ΓΒ}{ΓΔ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$

ii. Είναι $\frac{ΓΑ}{ΓΕ}=\frac{ΓΒ}{ΓΔ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{2\cancel{ΔΕ}}{\cancel{ΔΕ}}=2 \Leftrightarrow \frac{ΓΑ}{ΓΕ}=2 \Leftrightarrow ΓΑ = 2\cdot ΓΕ$.

16100. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι ΑΕ = 5, ΑΓ = 4, ΕΓ = 2, ΔΕ = 6, ΒΕ = 15 και ΒΔ = 12.



α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΔ}{ΑΓ}, \frac{ΔΕ}{ΕΓ}, \frac{ΒΕ}{ΑΕ}$.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια.
γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΓ και ΒΕΔ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας .
$\hat{Α} = ...$, $\hat{Γ} = ...$, $Α\hat{Ε}Γ = ...$

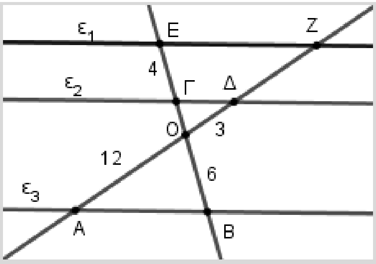
Λύση

α) $\frac{ΒΔ}{ΑΓ}=\frac{12}{4}=3,\ \frac{ΔΕ}{ΕΓ}=\frac{6}{2}=3,\ \frac{ΒΕ}{ΑΕ}=\frac{15}{5}=3$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια διότι έχουν τις πλευρές τους ανάλογες μία προς μία.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΒΕΔ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε:
- $Α = Β$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΕΓ και ΔΕ αντίστοιχα
- $Γ = Δ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΕ και ΒΕ αντίστοιχα
- $ΑΕΓ = ΒΕΔ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα.

16086. Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ είναι παράλληλες.
Δίνονται ότι ΓΕ = 4, ΟΔ = 3, ΟΑ = 12, ΟΒ = 6.



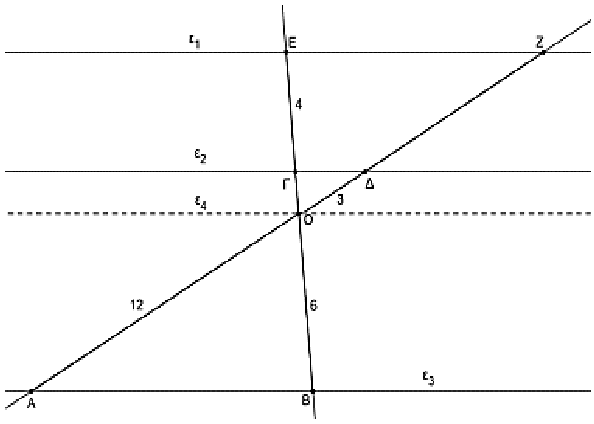
α) Να υπολογίσετε τα τμήματα ΟΓ και ΔΖ.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ είναι όμοια.
γ) Αν ΟΓ = 1.5 και ΔΖ = 8, να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΕΖ}{ΑΒ}$.

Λύση

α) Φέρνουμε ε_4 // ε_2 που διέρχεται από το Ο. Τότε από το θεώρημα του Θαλή για τις παράλληλες ε_2, ε_4, ε_3 που τέμνονται από τις ΓΒ και ΔΑ, έχουμε

$$\frac{ΟΑ}{ΟΔ} = \frac{ΟΒ}{ΟΓ} \Leftrightarrow \frac{12}{3} = \frac{6}{ΟΓ} \Leftrightarrow$$

$$12ΟΓ = 18 \Leftrightarrow ΟΓ = \frac{3}{2}.$$



β) Τα τρίγωνα ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουν:

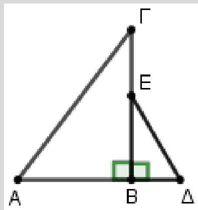
- $ΕΖΟ = ΒΑΟ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΖΑ.
- $ΖΕΟ = ΑΒΟ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΕΖ και ΑΒ που τέμνονται από την ΕΒ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ) Από την ομοιότητα των τριγώνων ΟΕΖ και ΟΒΑ έχουμε:

$$\frac{ΕΖ}{ΑΒ} = \frac{ΟΖ}{ΟΑ} = \frac{ΟΔ + ΔΖ}{ΟΑ} = \frac{3+8}{12} = \frac{11}{12}.$$

16099. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $\hat{Α} = \hat{Δ}$, ΑΓ = 36, ΒΔ = 16 και ΕΔ = 24.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια.
β) Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ έχουν:

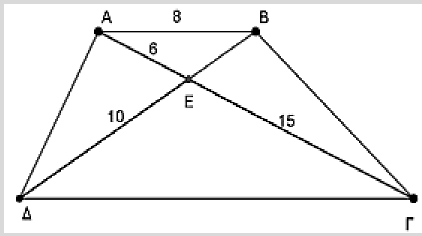
- $Α = Δ$ (υπόθεση)
- $ΑΒΓ = ΕΒΔ = 90^\circ$

Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΕ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες.

Άρα $\frac{ΑΓ}{ΕΔ} = \frac{ΑΒ}{ΒΔ} \Leftrightarrow \frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{24}_{6}} = \frac{ΑΒ}{16} \Leftrightarrow 6ΑΒ = 144 \Leftrightarrow ΑΒ = \frac{144}{6} = 24$

16113. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΔΓ, Ε σημείο τομής των διαγώνιων, ΑΕ = 6, ΑΒ = 8, ΓΕ = 15 και ΔΕ = 10.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΓΕΔ είναι όμοια.
β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους.
γ) Να υπολογίστε τα τμήματα ΒΕ και ΓΔ.

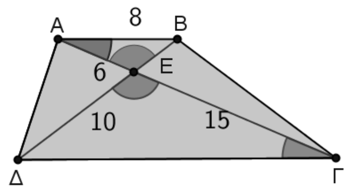


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ έχουν :

- $Ε\hat{Α}Β = Α\hat{Γ}Δ$ ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ και
- $Α\hat{Ε}Β = Δ\hat{Ε}Γ$ γιατί είναι κατακορυφήν.

Επομένως τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία και είναι όμοια.

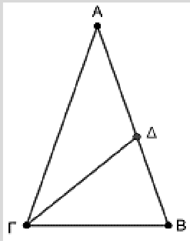


β) Αφού τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι όμοια είναι: $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΒΕ}{ΕΔ}=\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$.

γ) $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}=\frac{ΒΕ}{ΕΔ}=\frac{ΑΒ}{ΓΔ}\Leftrightarrow\frac{6}{15}=\frac{ΒΕ}{10}=\frac{8}{ΓΔ}$ $\frac{6}{15}=\frac{ΒΕ}{10}\Leftrightarrow 15\cdot ΒΕ=60\Leftrightarrow ΒΕ=4$

$\frac{6}{15}=\frac{8}{ΓΔ}\Leftrightarrow 6\cdot ΓΔ=120\Leftrightarrow ΓΔ=20$.

16126. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ = 36 και ΒΓ =24.
Το σημείο της Δ πλευράς ΑΒ είναι τέτοιο ώστε ΒΔ = 16.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{2}$.
β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΓΔ.



Λύση

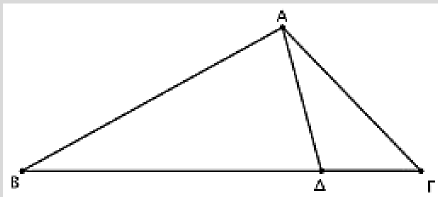
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ έχουν:

- $\hat{Β}$ κοινή
- $\frac{ΑΒ}{ΓΒ}=\frac{ΒΓ}{ΒΔ}$ γιατί $\frac{ΑΒ}{ΓΒ}=\frac{36}{24}=\frac{3}{2}$ και $\frac{ΒΓ}{ΒΔ}=\frac{24}{16}=\frac{3}{2}$.

Επομένως είναι όμοια αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και την περιεχόμενη στις πλευρές αυτές γωνία κοινή. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι $\frac{3}{2}$.

β) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΓΒΔ είναι όμοια, θα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, οπότε
$\frac{ΑΒ}{ΓΔ}=\frac{ΑΒ}{ΓΒ}\Leftrightarrow\frac{36}{ΓΔ}=\frac{36}{24}\Leftrightarrow ΓΔ=24$.

16755. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΓ και σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε ΑΓ = 2ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.
α) Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}$ και $\frac{ΑΓ}{ΓΔ}$.
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια.
γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΑΓ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
$Β\hat{Α}Γ=$..........., $\hat{Β}=$............



Λύση

α) $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{2ΑΓ}{ΑΓ}=2$ και $\frac{ΑΓ}{ΓΔ}=\frac{2ΓΔ}{ΓΔ}=2$

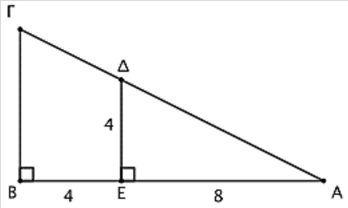
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ έχουν:

- $\hat{Γ}$ κοινή και
- $\frac{ΒΓ}{ΑΓ}=\frac{ΑΓ}{ΓΔ}=2$

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, αφού έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες.

γ) Αφού τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι όμοια, τότε θα έχουν ίσες τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από ομόλογες πλευρές τους. Επομένως, έχουμε: $ΒΑΓ = ΓΔΑ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα και $Β = ΔΑΓ$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις πλευρές ΑΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

21350. Στο σχήμα δίνονται ότι $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, ΑΕ = 8, ΕΒ = 4 και ΔΕ = 4.
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ είναι όμοια.
β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΕΔ και ΑΒΓ.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ.



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΒΓ έχουν $ΑΕΔ = Β = 90^\circ$ και κοινή τη γωνία Α. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

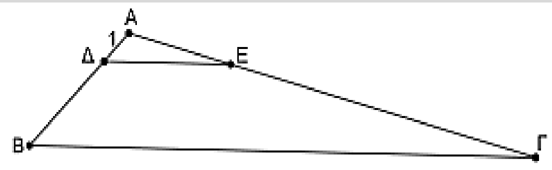
Οπότε $\dfrac{ΔΕ}{ΒΓ} = \dfrac{ΑΔ}{ΑΓ} = \dfrac{ΑΕ}{ΑΒ}$

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A}$ κοινή	$Α\hat{Ε}Δ = Α\hat{Β}Γ = 90^\circ$	$Α\hat{Δ}Ε = \hat{Γ}$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΕΔ	ΔΕ	ΑΔ	ΑΕ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΒΓ	ΒΓ	ΑΓ	ΑΒ

γ) Είναι

$$\frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{ΑΕ}{ΑΒ} \Leftrightarrow \frac{4}{ΒΓ} = \frac{8}{12} \Leftrightarrow 8ΒΓ = 48 \Leftrightarrow ΒΓ = 6.$$

21986. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΒΓ και ΑΔ = 1, όπως στο σχήμα.
α) Να αποδείξετε ότι ΑΕ · ΒΔ = ΓΕ .
β) Αν επιπλέον ΒΔ = ΑΕ και ΓΕ = 9:
i. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = 3 και ΑΒ = 4.
ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.



Λύση

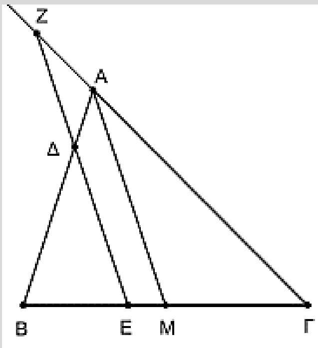
α) Σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή, η ευθεία ΔΕ που είναι παράλληλη στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ σε μέρη ανάλογα.
Επομένως $\dfrac{ΑΔ}{ΒΔ} = \dfrac{ΑΕ}{ΓΕ} \Leftrightarrow \dfrac{1}{ΒΔ} = \dfrac{ΑΕ}{ΓΕ} \Leftrightarrow ΓΕ = ΑΕ \cdot ΒΔ$

β) i. Είναι $ΓΕ = ΑΕ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow 9 = ΒΔ \cdot ΒΔ \Leftrightarrow ΒΔ^2 = 9 \Leftrightarrow ΒΔ = 3$

ii. Από την εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΑΔΕ που ορίζεται από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και την ΔΕ που είναι παράλληλη προς την ΒΓ έχει τις πλευρές του ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια. Ο λόγος ομοιότητας των τριγώνων ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι ίσος με τον λόγο $\dfrac{ΑΔ}{ΑΒ} = \dfrac{1}{4}$.

4ο Θέμα

14499. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\dfrac{\Delta E}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{BM} = \dfrac{B\Delta}{\ldots}$

ii. $\dfrac{\ldots}{AM} = \dfrac{\Gamma E}{\ldots} = \dfrac{\ldots}{\Gamma A}$

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ + ΕΖ = 2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

Λύση

α) i. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΒΑΜ έχουν:

1) $B\Delta E = BAM$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ//ΑΜ που τέμνονται από την ΑΒ και

2) τη γωνία Β κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή:

$$\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{B\Delta}{BA}.$$

ii. Τα τρίγωνα ΑΓΜ και ΓΕΖ έχουν:

1) $\Gamma AM = \Gamma ZE$ γιατί είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΜ//ΕΖ που τέμνονται από την ΑΓ και

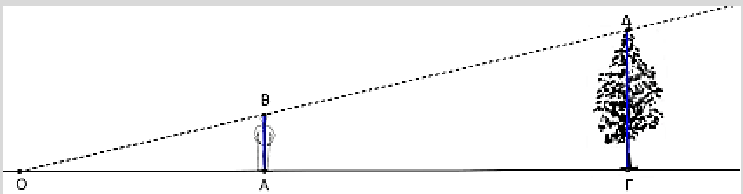
2) τη γωνία Γ κοινή.

Επειδή τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, είναι όμοια, οπότε οι αντίστοιχες πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή: $\dfrac{ZE}{AM} = \dfrac{\Gamma E}{\Gamma M} = \dfrac{\Gamma Z}{\Gamma A}$.

β) Από το α) i. είναι $\dfrac{\Delta E}{AM} = \dfrac{BE}{BM}$ και από το α) ii. είναι $\dfrac{ZE}{AM} = \dfrac{\Gamma E}{\Gamma M}$, με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{AM} + \frac{ZE}{AM} = \frac{BE}{BM} + \frac{\Gamma E}{\Gamma M} \overset{BM=\Gamma M}{\Leftrightarrow} \frac{\Delta E + ZE}{AM} = \frac{BE + \Gamma E}{BM} \Leftrightarrow \frac{\Delta E + ZE}{AM} = \frac{\cancel{B\Gamma}}{\frac{\cancel{B\Gamma}}{2}} = 2 \Leftrightarrow \Delta E + ZE = 2AM.$$

22102. Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα ΟΑ και ΟΓ, με κοινό άκρο Ο, αναπαριστάνουν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ, τα δε τμήματα ΑΒ και ΓΔ αναπαριστάνουν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην ΟΓ.



α) i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.
ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου.
β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

Λύση

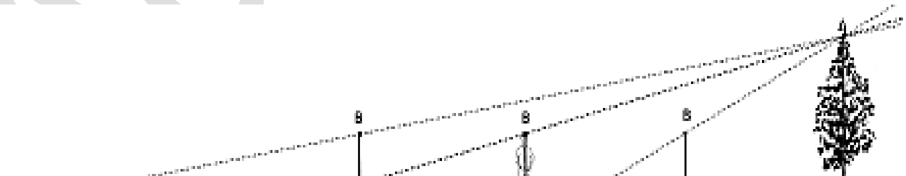
α) i. Από τα δεδομένα έχουμε ότι οι σκιές ΟΑ και ΟΓ έχουν τον ίδιο φορέα ΟΓ και τα ύψη είναι κάθετα σε αυτόν. Οπότε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ορθογώνια με $\widehat{OAB} = \widehat{O\Gamma\Delta} = 90^\circ$ και έχουν την οξεία γωνία $\hat{O}$ κοινή, άρα θα είναι όμοια γιατί ως ορθογώνια έχουν μια οξεία γωνίας τους ίση. Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma} = \frac{2}{5} \; (1)$$

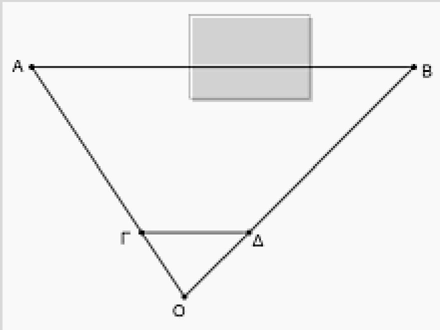
Άρα, ο λόγος ομοιότητας λ των τριγώνων ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι $\lambda = \frac{1}{5}$.

ii. Είναι $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{1,6}{\Gamma\Delta} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\Gamma\Delta = 8 \Leftrightarrow \Gamma\Delta = 4$
Άρα το ύψος του δέντρου είναι 4 m.

β) Όσο ο ήλιος δημιουργεί σκιές κατά τη διάρκεια της ημέρας, καθώς κινείται από την ανατολή προς τη δύση, για να συνεχίσουν οι σκιές του μαθητή και του δέντρου να έχουν το ίδιο άκρο (προϋπόθεση του προβλήματος), θα πρέπει ο μαθητής να αλλάζει θέση ως προς τη θέση του δέντρου που παραμένει σταθερή, έτσι ώστε το κοινό άκρο των σκιών, η θέση του μαθητή και η θέση του δέντρου, θεωρούμενα ως σημεία Ο, Α και Γ αντίστοιχα, να είναι συνευθειακά. Αυτό σημαίνει ότι τα μήκη των σκιών ΟΑ και ΟΓ του μαθητή και του δέντρου θα αλλάζουν. Οι γωνίες Α και Γ που σχηματίζουν τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου με την ευθεία ΟΓ θα είναι ορθές. Το μέτρο της γωνίας Ο με κορυφή τα κοινά άκρα των σκιών θα αλλάζει, καθώς θα αλλάζει η θέση του ήλιου, αλλά θα συνεχίσει να είναι κοινή γωνία των ορθογωνίων τριγώνων με κάθετες πλευρές τα ύψη ΑΒ, ΓΔ του μαθητή και του δέντρου και των αντίστοιχων σκιών ΟΑ και ΟΓ που τα ύψη δημιουργούν. Συνεπώς, τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ σε κάθε περίπτωση θα παραμένουν όμοια και θα ισχύει η αναλογία των ομόλογων πλευρών τους, δηλαδή $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{OB}{O\Delta} = \frac{OA}{O\Gamma}$ και εφόσον είναι γνωστά τα μήκη των σκιών, μπορεί να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου. Άρα, ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας.



22565. Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



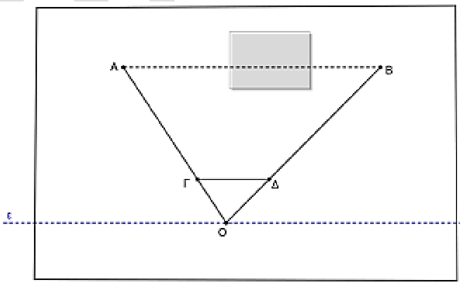
Μέτρησαν και βρήκαν ΟΑ=20m και ΟΒ=30m.
Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΟΓ=2m και ΟΔ=3m.

α) Να αποδείξετε ότι:
i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ,
ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια.

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ. Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Είναι $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $\frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ άρα $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{1}{10}$, δηλαδή οι παράλληλες ευθείες ε και ΓΔ τέμνονται από τις ΟΓ και ΟΔ στα σημεία Ο,Γ και Ο,Δ αντίστοιχα. Για τα σημεία Α και Β των ευθειών ΟΓ και ΟΔ αντίστοιχα ισχύει $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}}$, επομένως σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή προκύπτει ότι οι ευθείες ΓΔ και ΑΒ είναι παράλληλες.



ii. Επειδή $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}}$ τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες (κοινή η γωνία Ο), άρα είναι όμοια.

β) Εφόσον τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι όμοια θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες, άρα $\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = \frac{\text{ΟΔ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}} \Rightarrow \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \text{ΑΒ} = 10 \cdot \text{ΓΔ}$, επομένως, ο ισχυρισμός του μαθητή είναι αληθής.