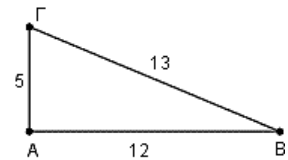


22513. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 12$, $AG = 5$ και $B\Gamma = 13$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.
 γ) Να υπολογίσετε το ύψος u_a .



4^ο Θέμα

16807. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με διαστάσεις $AB = 24$, $B\Gamma = 12$ και σημείο E στην ευθεία AB .

- α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ όταν :
- Το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς AB .
 - Το σημείο E ταυτίζεται με την κορυφή A του ορθογωνίου.
- β) Αφήνουμε το σημείο E να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος AB προς το B , απομακρυνόμενο από το σημείο B .
- Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ αυξάνεται ή μειώνεται.
 - Για το εμβαδό του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma E\Delta$ στο ερώτημα β) i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

16135. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτείνουσα $B\Gamma = 10$ και έστω ότι Δ είναι η προβολή της κορυφής A στην $B\Gamma$.

α) Αν $\Delta B = 2$ να υπολογίσετε:

- το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$,
- το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

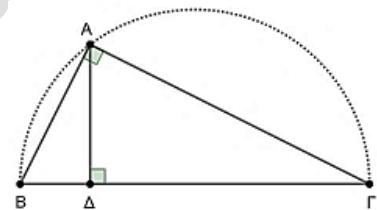
β) Υποθέστε ότι το σημείο A κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $(AB\Gamma) = 5A\Delta$.

ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του A πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την $B\Gamma$, το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

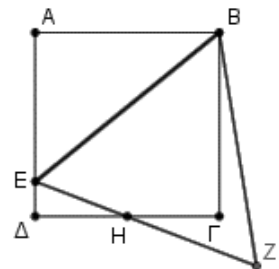


17349. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 3 και σημείο E της πλευράς $A\Delta$, ώστε $AE = 4 - \sqrt{3}$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία BE και το σημείο Γ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο BEZ . Οι $\Gamma\Delta$ και EZ τέμνονται στο σημείο H και $\Delta H = \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι $BE = 2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}$.

β) Να αποδείξετε το H είναι το μέσο της EZ .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου BEZ και εξωτερικά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



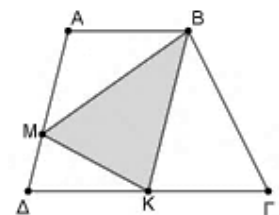
18173. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$. Δίνεται επίσης ότι το σημείο K είναι μέσο της $\Gamma\Delta$ και M τυχαίο σημείο στην $A\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(B\Gamma\Gamma) = \frac{1}{2}(ABK\Delta)$.

ii. $(BMK) = (B\Gamma\Gamma)$

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο M κινείται πάνω στο εσωτερικό της $A\Delta$, τότε ο λόγος των εμβαδών $(AB\Gamma\Delta)$ και (MBK) παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.



18553. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά a και σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο Σ' στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma' > B\Sigma$. Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ με το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Το μήκος της πλευράς $\Sigma'\Gamma$ με το μήκος της πλευράς $\Sigma\Gamma$ των τριγώνων $\Sigma'\Delta\Gamma$ και $\Sigma\Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

iii. Τις αποστάσεις του σημείου Δ από τις ευθείες $\Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Gamma$.

18557. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$, ώστε $AB > \Gamma\Delta$. Από τις κορυφές Γ και Δ φέρουμε $\Gamma E \parallel A\Delta$ και $\Delta Z \parallel \Gamma B$, με E και Z σημεία στην πλευρά AB του τραπεζίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$.

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ ως συνάρτηση των πλευρών του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$.

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ώστε τα τετράπλευρα $A\Delta\Gamma E$ και $B\Gamma\Delta Z$ να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά;

18555. Σε τετράγωνο πλευράς a παίρνουμε σημείο Σ στην προέκταση της πλευράς AB προς το B τέτοιο ώστε $B\Sigma = AB$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του a :

i. Το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

ii. Την περίμετρο του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$.

β) Στην τάξη του Βρασίδα η καθηγήτρια των Μαθηματικών απέδειξε ότι αν το σημείο Σ' βρίσκεται στην προέκταση του

AB προς το B και κινείται απομακρυνόμενο από το σημείο B , τότε οι πλευρές $\Sigma'\Gamma$ και $\Sigma'\Delta$ μεγαλώνουν. Οπότε, αν το Σ' είναι δεξιότερα από το Σ , θα ισχύει ότι $\Sigma'\Gamma > \Sigma\Gamma$ και $\Sigma'\Delta > \Sigma\Delta$.

Ο Βρασίδας ζήτησε το λόγο και διατύπωσε τον ισχυρισμό :

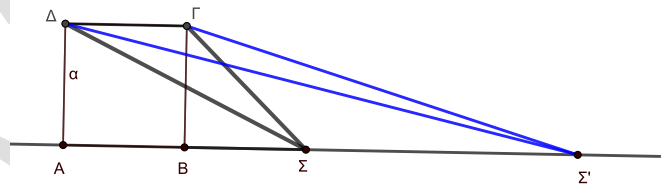
«*Η περίμετρος και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma'\Delta\Gamma$ είναι μεγαλύτερα από την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου $\Sigma\Delta\Gamma$* ».

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Βρασίδα:

i. σχετικά με τα εμβαδά των δύο τριγώνων;

ii. σχετικά με την περίμετρο των δύο τριγώνων;

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



18562. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς a .

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$ ισούται με $a\sqrt{2}$ και να βρείτε το εμβαδό του.

β) i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο $B\Delta ZH$ έτσι ώστε το σημείο A να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι το κέντρο του τετραγώνου $B\Delta ZH$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του $B\Delta ZH$ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιεγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου. Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔH του τετραγώνου $B\Delta ZH$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το $\Delta H\Theta K$. Με πλευρά τη διαγώνιο $H K$ του $\Delta H\Theta K$ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του κα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, πόσες φορές ακόμα πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

18564. Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

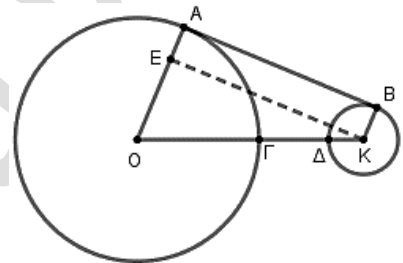
β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που κα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

18565. Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα O και K . Ο κύκλος με κέντρο O έχει ακτίνα $R=7$ ενώ ο κύκλος με κέντρο K έχει ακτίνα $r=2$.

Το τμήμα AB είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα KE είναι παράλληλο στο τμήμα AB με E σημείο του τμήματος OA . Η διάκεντρος OK τέμνει τον κύκλο (O, R) στο σημείο Γ και τον κύκλο (K, r) στο σημείο Δ .



α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων Γ και Δ είναι $\Gamma\Delta=4$, τότε:

i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB .

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABKO$.

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του $ABKE$ να ισούται με $4\sqrt{14}$ τ.μ. ;

18566. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$.

Με πλευρά την υποτεινούσα $B\Gamma$ και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο $B\Gamma\Delta E$.

Προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$. Από τα σημεία Γ και Z φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα BZ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο H .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο $B\Gamma HZ$ είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου.

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά». Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

21124.α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $a = 40$, $\beta = 25$, $\gamma = 25$ και αντίστοιχα ύψη $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι αμβλυγώνιο.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 300$ και τα ύψη του είναι $u_\alpha = 15$ και $u_\beta = u_\gamma = 24$.

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη $υ_α, υ_β, υ_γ$ είναι οξυγώνιο.

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21183. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ABΓΔ έχει πλευρά $\sqrt{2}$ και το τετράγωνο ΔΕΖΗ έχει πλευρά 1.

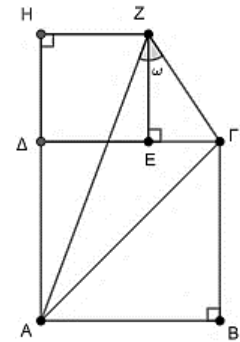
α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι

i. $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$.

ii. $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$.

γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας $A\hat{Z}\Gamma = \hat{\omega}$.



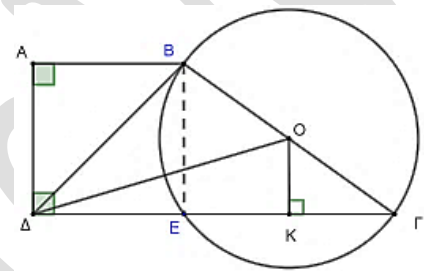
21840. Έστω ABΓΔ τραπέζιο με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=5$, $\Gamma\Delta=13$ και εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta)=54$. Ο κύκλος με διάμετρο τη ΒΓ τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΔ = 6$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος των ΒΕ και ΒΓ.

γ) Αν ΟΚ είναι η κάθετη από το σημείο Ο στην ΕΓ, να αποδείξετε ότι $ΟΚ=3$, και να υπολογίσετε το μήκος της ΟΔ.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΔΟ.



22100. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με γωνίες

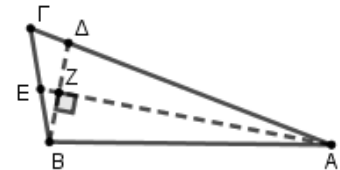
$\hat{A} = 20^\circ$, $\hat{B} = 100^\circ$, και η διχοτόμος ΑΕ της γωνίας του Α. Από το Β φέρνουμε την κάθετη προς την ΑΕ και έστω Ζ, Δ τα σημεία τομής της καθέτου με τις ΑΕ, ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A} = 20^\circ$.

ii. Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο ABΓ, να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες.

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου ABΓ δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την ΒΓ και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ABΓ και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ. Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.



22104. Σε τρίγωνο ABΓ θεωρούμε σημείο Δ εσωτερικό της πλευράς του ΒΓ. Έστω Μ το μέσο Μ του τμήματος ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $(ABM) = \frac{1}{2}(AB\Delta)$.

ii. $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma)$.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Δ τέτοια ώστε τα τρίγωνα ABM και ΜΔΓ να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου Δ για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων ABM και ΜΔΓ είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ABΓ είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου ABM και ΜΔΓ. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

22396. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και έστω Δ η προβολή του σημείου B πάνω στην ευθεία $A\Gamma$.

Έστω $A\Delta = 3$ και $\Delta\Gamma = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

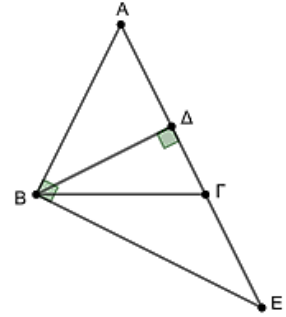
i. $B\Delta = 4$.

ii. $(AB\Gamma) = 10$.

β) Έστω ότι η κάθετη της AB στο σημείο B , τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο E . Να βρείτε:

i. Το μήκος του ΔE .

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου $B\Gamma E$.



22509. Θεωρούμε ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με

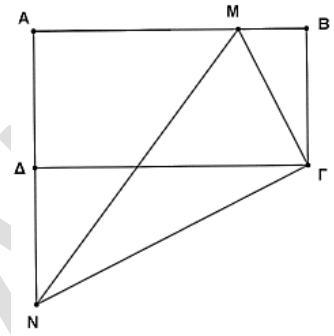
$AB = 2a$ και $A\Delta = a$. Στην πλευρά AB θεωρούμε σημείο M με $MB = x$ και στην προέκταση της $A\Delta$ σημείο N με $\Delta N = 2x$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a, x τα $M\Gamma^2$, $N\Gamma^2$ και MN^2 .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MN\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των a, x τα εμβαδά των τριγώνων AMN και ΓMN .

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου M , πάνω στην AB ώστε τα τρίγωνα AMN και ΓMN να είναι ισεμβαδικά.



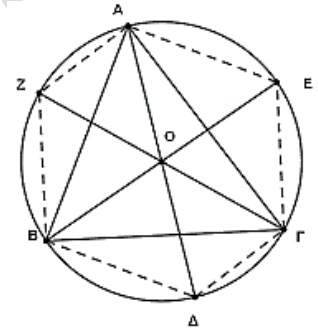
22510. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O . Θεωρούμε τις διαμέτρους $A\Delta$, BE και ΓZ .

Να αποδείξετε ότι:

α) $(AOB) = (BO\Delta)$ και $(AO\Gamma) = (\Delta O\Gamma)$

β) $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma)$

γ) $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$



3^ο Θέμα

17908. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha = 4$, $\beta = \sqrt{17}$ και $\gamma = 5$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$, ως προς τις γωνίες του.

β) Αν $A\Delta$ είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ από την κορυφή A , τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔB .

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$.