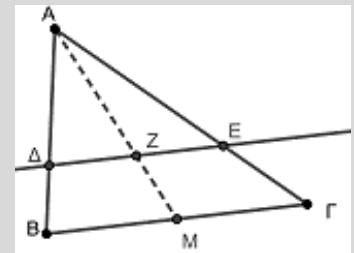


Αναλογίες

Θεώρημα Θαλή 2^ο Θέμα

14534. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{EG} = 2$.

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΓΕ.

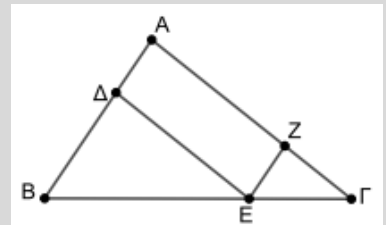
Λύση

α) Επειδή ΔΕ // ΒΓ από το θεώρημα Θαλή ισχύει ότι: $\frac{AD}{AB} = \frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$ και $\frac{AE}{EG} = \frac{AZ}{ZM} = \frac{\frac{2}{3}AM}{\frac{1}{3}AM} = 2$

β) Είναι $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AD = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4$ και

$$\frac{AE}{EG} = 2 \Leftrightarrow \frac{AG - EG}{EG} = 2 \Leftrightarrow 9 - EG = 2EG \Leftrightarrow 9 = 3EG \Leftrightarrow EG = 3$$

14579. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης ΑΒ = 3ΑΔ.



α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{BD}{AD}$ και $\frac{BE}{EG}$.

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ.

Λύση

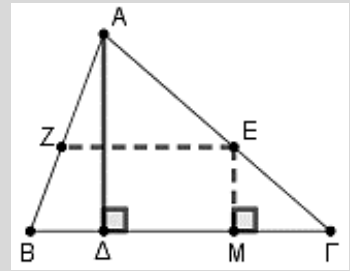
α) Εφόσον ΑΒ = 3ΑΔ είναι ΒΔ + ΑΔ = 3ΑΔ ή ΒΔ = 2ΑΔ. Άρα $\frac{BD}{AD} = 2$.

Η ευθεία ΔΕ που είναι φορέας του ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{BE}{EG} = \frac{BD}{AD} = 2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΒΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον ΑΓ = 3,9, τότε ΑΖ + ΓΖ = 3,9. Όμως ΓΖ = 1,3, άρα ΑΖ + 1,3 = 3,9 ή ΑΖ = 2,6. Επομένως $\frac{AZ}{GZ} = \frac{2,6}{1,3} = 2$.

Άρα το σημείο Ζ διαιρεί το τμήμα ΑΓ σε τμήματα με λόγο 2. Εφόσον η ευθεία ΖΕ χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου ΑΓ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ΖΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.

15830. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος, το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά $B\Gamma$ σε ένα άλλο σημείο της M τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG}$

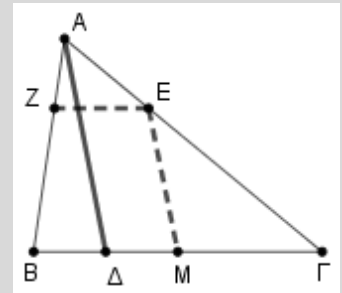
β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{MG}$

Λύση

α) Από τα δεδομένα η $ZE \parallel B\Gamma$, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG}$.

β) Είναι $ME \parallel A\Delta$ (από τα δεδομένα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία $B\Gamma$), οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{MA}{MG} = \frac{EA}{EG}$. Από την τελευταία ισότητα και την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{MG}$.

15831. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, το M είναι μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο του MB . Από το M φέρνουμε παράλληλη στην $A\Delta$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρνουμε παράλληλη στην $B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:



α) $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$

β) $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$

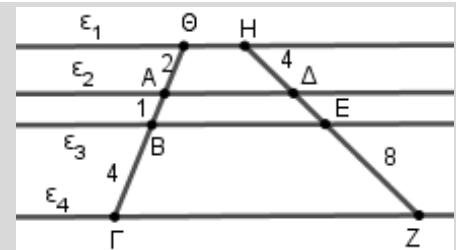
Λύση

α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του BM και το M μέσο της $B\Gamma$. Άρα $M\Delta = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}MG$.

Επίσης η $ME \parallel A\Delta$, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{EA}{EG} = \frac{M\Delta}{MG} = \frac{\frac{1}{2}MG}{MG} = \frac{1}{2}$.

β) Από τα δεδομένα η $ZE \parallel B\Gamma$, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$.

21987. Οι ευθείες $\Gamma\Theta$ και ZH τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 στα σημεία Θ, A, B και H, Δ, E αντίστοιχα και την ευθεία ϵ_4 στα σημεία Γ και Z όπως στο παρακάτω σχήμα. Επίσης δίνονται τα μήκη $\Theta A = 2, AB = 1, B\Gamma = H\Delta = 4$ και $EZ = 8$.



α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ϵ_4 είναι παράλληλη στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 .

γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει την ευθεία ϵ_2 στο K και την ευθεία ϵ_3 στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$.

Λύση

α) Εφόσον οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 τέμνουν τις ευθείες $\Gamma\Theta$ και ZH , σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως: $\frac{\Theta A}{H A} = \frac{A B}{\Delta E} \Leftrightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{\Delta E} \Leftrightarrow 2\Delta E = 4 \Leftrightarrow \Delta E = 2$.

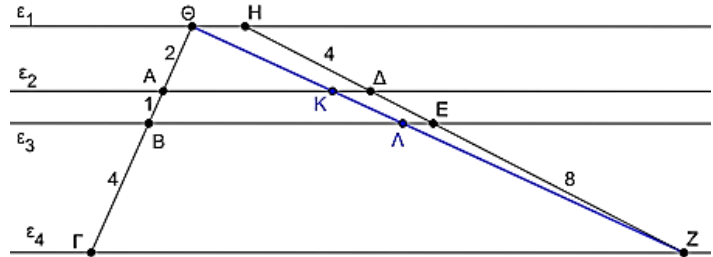
β) Οι ευθείες $\Theta\Gamma$ και HZ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες ε_2 και ε_3 στα σημεία A, B και Δ, E αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Z είναι σημεία των ευθειών $\Theta\Gamma$ και HZ αντίστοιχα, ώστε

$$\frac{A B}{B \Gamma} = \frac{1}{4} \text{ και } \frac{\Delta E}{E Z} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \text{ άρα } \frac{A B}{B \Gamma} = \frac{\Delta E}{E Z}.$$

Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή η ευθεία ΓZ ή ε_4 είναι παράλληλη προς τις ευθείες ε_2 και ε_3 , άρα και προς την ε_1 .

γ) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΘZ το οποίο τέμνει τις ε_2 και ε_3 στα K και Λ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, εφόσον οι ευθείες $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 τέμνουν τις ευθείες $\Theta\Gamma$ και ΘZ ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{A B}{K \Lambda} = \frac{B \Gamma}{\Lambda Z} \Leftrightarrow \frac{1}{K \Lambda} = \frac{4}{\Lambda Z} \Leftrightarrow \frac{\Lambda Z}{K \Lambda} = 4.$$



22132. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις $A\Delta$ και $B\Gamma$.

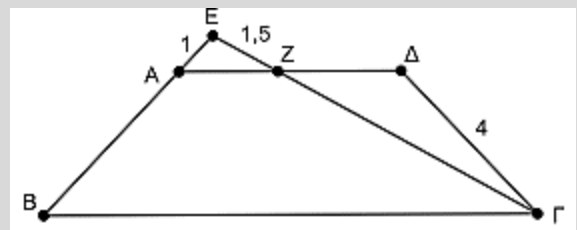
Στην προέκταση της πλευράς BA προς το A παίρνουμε σημείο E , ώστε $EA = 1$.

Το ευθύγραμμο τμήμα $E\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο Z και $EZ = 1,5$.

α) Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1,5AB$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του $Z\Gamma$.

γ) Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AZ του τριγώνου EAZ .



Λύση

α) Οι βάσεις $A\Delta$ και $B\Gamma$ του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες, άρα σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή η $A\Delta$ χωρίζει σε μέρη ανάλογα τις πλευρές EB και $E\Gamma$ του τριγώνου $EB\Gamma$ τις

οποίες τέμνει. Επομένως: $\frac{EA}{EZ} = \frac{AB}{Z\Gamma} \Leftrightarrow \frac{1}{1,5} = \frac{AB}{Z\Gamma} \Leftrightarrow Z\Gamma = 1,5 \cdot AB$.

β) $Z\Gamma = 1,5 \cdot AB = 1,5 \cdot 4 = 6$

γ) Η AZ είναι παράλληλη στην $B\Gamma$, γιατί το Z είναι σημείο της βάσης $A\Delta$ του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο $EB\Gamma$ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών EA και EZ του τριγώνου EAZ και την παράλληλη $B\Gamma$ στην AZ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του

EAZ , άρα: $\frac{EA}{EB} = \frac{EZ}{E\Gamma} = \frac{AZ}{B\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{AZ}{10} \Leftrightarrow 5AZ = 10 \Leftrightarrow AZ = 2$