

Κεφάλαιο 4^ο

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Η έννοια του πολωνύμου

Έστω x μια **μεταβλητή** που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

- Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής ax^v , όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός και v ένας θετικός ακέραιος.
Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις: $2x^3$, $-\frac{3}{5}x^5$, $0x^4$, $2x$ και οι αριθμοί: 2 , -3 , 0 είναι μονώνυμα του x .

- Καλούμε **πολυνόμιο του x** κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου v είναι ένας φυσικός αριθμός και α_0 , α_1 , ..., α_v είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα μονώνυμα $\alpha_v x^v$, $\alpha_{v-1} x^{v-1}$, ..., $\alpha_1 x$, α_0 λέγονται **όροι** του πολωνύμου και οι αριθμοί α_v , α_{v-1} , ..., α_1 , α_0 **συντελεστές** αυτού. Ειδικότερα ο α_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολωνύμου.

Τα πολυνόμια της μορφής α_0 , δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται **σταθερά πολυνόμια**. Ειδικά το σταθερό πολυνόμιο 0 λέγεται **μηδενικό πολυνόμιο**.

Έτσι για παράδειγμα, οι παραστάσεις $3x^3 + 2x^2 - x + 2$, $0x^2 - 5x + 1$, $5x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 0x + \frac{1}{3}$ και οι αριθμοί 2 , 0 κτλ. είναι πολυνόμια του x .

Η ισότητα μεταξύ δυο πολυωνύμων ορίζεται ως εξής:

Δυο πολυώνυμα

$\alpha_\mu x^\mu + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $\beta_\nu x^\nu + \dots + \beta_1 x + \beta_0$, με $\mu \geq \nu$

θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:

$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_\nu = \beta_\nu$ και $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \dots = \alpha_\mu = 0$

Για παράδειγμα τα πολυώνυμα $0x^4 + 0x^3 + 2x^2 - x + 1$ και $2x^2 - x + 1$ είναι ίσα. Επίσης τα πολυώνυμα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $2x + 3$ είναι ίσα αν και μόνο αν $\gamma=3, \beta=2$ και $\alpha=0$.

Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με $P(x), Q(x)$, κτλ.

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

- Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το $P(x)$ είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (μηδενικό πολυώνυμο).
- Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι διαφορετικός από το μηδέν, τότε το $P(x)$ παίρνει τη μορφή:

$$\alpha_\kappa x^\kappa + \alpha_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ με } \alpha_\kappa \neq 0$$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός κ λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου $P(x)$. Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Έτσι για παράδειγμα το πολυώνυμο $P(x) = -4x^3 + 3x - 7$ είναι 3^{ου} βαθμού, ενώ το $Q(x) = 7$ είναι μηδενικού βαθμού.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Έστω ένα πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ , τότε ο πραγματικός αριθμός $P(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$ που προκύπτει λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου για $x=\rho$.

Αν είναι **$P(\rho)=0$** , τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου. Για παράδειγμα, η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 1$, για $x=1$ είναι $P(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 = 6$, ενώ για $x = -1$ είναι $P(-1) = -(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$, που σημαίνει ότι ο -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Είναι φανερό ότι:

- Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και
- Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x (*)

(*) Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι:

- Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x , τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και
- Αν δύο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x , τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

Πράξεις με πολυώνυμα

Μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα:

$$\begin{aligned} 1. \text{ i)} \quad (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3 \\ &= (1+4)x^3 + (2-5)x^2 - 5x + (7+3) \\ &= 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10 \quad [\text{Πολυώνυμο } 3^{\text{ου}} \text{ βαθμού}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad (2x^3 - x^2 + 1) + (-2x^3 + 2x - 3) &= 2x^3 - x^2 + 1 - 2x^3 + 2x - 3 \\ &= -x^2 + 2x - 2 \quad [\text{Πολυώνυμο } 2^{\text{ου}} \text{ βαθμού}] \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad (x^3 - 3x^2 - 1) + (-x^3 + 3x^2 + 1) = x^3 - 3x^2 - 1 - x^3 + 3x^2 + 1 = 0 \quad [\text{Μηδενικό Πολυώνυμο}]$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3) &= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3 \\ &= -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad (x^2 + 5x)(2x^3 + 3x - 1) &= x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) \\ &= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x \\ &= 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 + 14x^2 - 5x \quad [\text{Πολυώνυμο } 5^{\text{ου}} \text{ βαθμού}] \end{aligned}$$

Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δύο πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:

- Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο, τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.
- Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1^ο i) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1 \text{ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.}$$

ii) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα

$$Q(x) = \lambda^2 x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3 \text{ και } R(x) = (5\lambda - 6)x^3 + (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda + 1 \text{ είναι ίσα.}$$

ΛΥΣΗ

i) Το $P(x)$ θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο, για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \text{και} \quad \lambda - 1 = 0$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda = 1$. Επομένως για $\lambda = 1$ το πολυώνυμο $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Τα $Q(x)$ και $R(x)$ θα είναι ίσα για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6, \quad \lambda - 2 = \lambda^2 - 4 \quad \text{και} \quad 3 = \lambda + 1$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda=2$. Επομένως για $\lambda=2$ τα πολυώνυμα $Q(x)$ και $R(x)$ είναι ίσα.

2° Αν $P(x) = x^2 + 3x + \alpha^2 - 1$, να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $P(-1) = 1$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε} \quad P(-1) = 1 &\Leftrightarrow (-1)^2 + 3(-1) + \alpha^2 - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2 \end{aligned}$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι οι: $-2, 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x :

i) $1 - x^3$

ii) $\alpha^3 - 3\alpha^2 x + 3\alpha x^2 - x^3$

iii) $x + \frac{1}{x}$

iv) $x^4 - 2x^{\frac{1}{3}} + 4x - 1$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 5x + 2$ και $Q(x) = x^3 + 3x + 1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x) + Q(x)$ ii) $2P(x) - 3Q(x)$ iii) $P(x) \cdot Q(x)$ iv) $[P(x)]^2$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)x - 2\mu + 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα.

5. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$

$x = -1,$

$x = 1$

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$

$x = -1,$

$x = 1,$

$x = 3.$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k.$$

7. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, η τιμή του πολυωνύμου

$$P(x) = 5x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 - 2 \quad \text{για } x = -1 \text{ είναι ίση με } 1.$$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ , για τους οποίους το πολυώνυμο $f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x(x+1) + \beta x + \gamma$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ έχει ρίζες το -2 και το 3 .

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ , για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

4. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x) = (9\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (9\lambda^2 - 4)x - 3\lambda + 2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύει $(2x+1)P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3x + 1$

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αλγοριθμική διαίρεση

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο την έννοια της Ευκλείδειας ή αλγοριθμικής διαίρεσης μεταξύ θετικών ακέραιων αριθμών. Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδιαίοι φυσικοί αριθμοί π και ν , τέτοιοι ώστε

$$\Delta = \delta\pi + \nu, \quad 0 \leq \nu < \delta \quad (1)$$

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**. Ο Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ **διαιρέτης**, ο π **πηλίκο** και ο ν **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Η έννοια της διαίρεσης των πολυωνύμων είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια διαίρεση που αναφέραμε παραπάνω. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\nu(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \nu(x), \quad (2)$$

όπου το $\nu(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκο** και το $\nu(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.