

➤ ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ
ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

Για να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου ax^2+bx+c βρίσκουμε την διακρίνουσα $\Delta=b^2-4ac$ και αν:

- $\Delta > 0$,το τριώνυμο έχει δυο ρίζες x_1, x_2 και το προσημό του φαίνεται παρακάτω

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	Ομόσημο	του a	Ετερόσημο του a	Ομόσημο του a

- $\Delta = 0$,τότε το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα $x_{1,2}$ και το προσημό του φαίνεται παρακάτω

x	$-\infty$	$x_{1,2}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	Ομόσημο	του a	Ομόσημο του a

- $\Delta < 0$, τότε το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και το προσημό του φαίνεται παρακάτω

x	$-\infty$	$+\infty$
ax^2+bx+c	Ομόσημο	του a

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΕΩΝ 2^{ου} ΒΑΘΜΟΥ

Για να επιλύσουμε μία ανίσωση της μορφής $ax^2+bx+c < 0$ ή $ax^2+bx+c > 0$ ή $ax^2+bx+c \geq 0$ ή $ax^2+bx+c \leq 0$:

- Βρίσκουμε την Δ και τις ρίζες(αν έχει)
- Κάνουμε τον πίνακα για το πρόσημο του τριωνύμου
- Διαλέγουμε τα κατάλληλα διαστήματα για το x , ανάλογα με τι μας έχει ζητηθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να λυθούν οι ανισώσεις ι) $x^2+3x-10>0$ ιι) $-x^2+2x-1<0$ ιιι) $3x^2+2x+4>0$
 iv) $x^2+4x+16<0$ v) $2x^2-4x+3>0$ vi) $x^2+2x+1 \leq 0$

ΛΥΣΕΙΣ

ι) $x^2+3x-10>0$, $\Delta=3^2-4 \cdot 1 \cdot (-10)=49$

'Αρα $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$ $x_1=-5$ και $x_2=2$

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
$x^2+3x-10$		+	-	+

'Αρα $x \in (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$

ιι) $-x^2+2x-1<0$, $\Delta=2^2-4(-1)(-1)=4-4=0$

'Αρα $x_{1,2} = \frac{-2}{2(-1)} = 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x^2+2x-1$		-	-

'Αρα $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ιιι) $3x^2+2x+4<0$, $\Delta=2^2-4 \cdot 3 \cdot 4=4-48=-44<0$

'Αρα το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και διατηρεί προσημο, το οποίο επειδή $a=3>0$ είναι και θετικό.

x	$-\infty$	$+\infty$
$3x^2+2x+4$		+

'Αρα η παραπάνω ανίσωση είναι αδύνατη.

iv) $x^2+4x+16<0$, $\Delta=4^2-4 \cdot 1 \cdot 16=16-64=-48<0$

'Αρα $x_{1,2} = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x^2+4x+16$		+	+

'Αρα η παραπάνω ανίσωση είναι αδύνατη.

v) $2x^2-4x+3>0$, $\Delta=(-4)^2-4 \cdot 2 \cdot 3=16-24<0$

'Αρα το τριώνυμο δεν έχει πραγματικές ρίζες και διατηρεί πρόσημο το οποίο επειδή $a=2>0$ είναι θετικό.

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2-4x+3$		+

'Αρα η ανίσωση επαληθεύεται για κάθε πραγματικό αριθμό δηλαδή

$$x \in \mathbb{R}$$

vi) $x^2+2x+1 \leq 0$, $\Delta=2^2-4 \cdot 1 \cdot 1=4-4=0$

Άρα $x_{1,2} = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
x^2+2x+1		+	+

Παρατηρούμε ότι το τριώνυμο δεν μπορεί να είναι αρνητικό πουθενά, μοναδική λύση είναι το $x=-1$ (για $x=-1$ ισχύει $x^2+2x+1=0$)

ΤΡΙΩΝΥΜΟ ΠΟΥ ΔΙΑΤΗΡΕΙ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

- Αν θέλουμε $ax^2+bx+c > 0$ (δηλαδή το τριώνυμο να διατηρεί θετικό πρόσημο) απαιτούμε:
 $\Delta < 0$ (ώστε το πρόσημο να διατηρείται) και $a > 0$ (για είναι θετικό)
- Αν θέλουμε $ax^2+bx+c < 0$ (δηλαδή το τριώνυμο να διατηρεί αρνητικό πρόσημο) απαιτούμε:
 $\Delta < 0$ (ώστε το πρόσημο να διατηρείται) και $a < 0$ (για είναι αρνητικό)
- Αν θέλουμε $ax^2+bx+c \geq 0$ απαιτούμε:
 $\Delta \leq 0$ και $a > 0$
- Αν θέλουμε $ax^2+bx+c \leq 0$ απαιτούμε:
 $\Delta \leq 0$ και $a < 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ ισχύει $(\lambda-2)x-2\lambda x+2\lambda-3 \leq 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $\Delta \leq 0$

και $(\lambda-2) < 0$

$$(-2\lambda)^2 - 4(\lambda-2)(2\lambda-3) \leq 0$$

$$\lambda < 2 \quad (1)$$

$$4\lambda^2 - 4(2\lambda^2 - 3\lambda - 4\lambda + 6) \leq 0$$

$$-4\lambda^2 + 28\lambda - 24 \leq 0$$

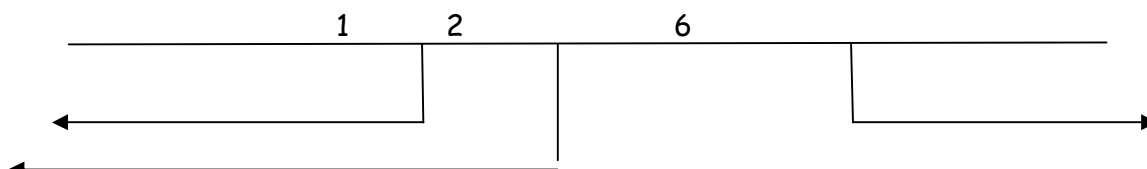
$$-\lambda^2 + 7\lambda - 6 \leq 0 \text{ (απλοποιήσαμε με το +4)}$$

$$\Delta' = 7^2 - 4(-1)(-6) = 49 - 24 = 25$$

Άρα $\lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2(-1)} = \frac{-7 \pm 5}{-2}$ με $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 6$

λ	$-\infty$	1	6	$+\infty$
$-\lambda^2+7\lambda-6$		-	+	-

Άρα $\lambda \leq 1$ ή $\lambda \geq 6$ (2) Συναληθεύοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε



Άρα οι κοινές λύσεις είναι $\lambda \leq 1$ ή $\lambda \in (-\infty, 1]$.

2. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ ισχύει $4x^2 + 4(2\lambda - 1)x + 4 - 3\lambda > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $\Delta < 0$

$$[4(2\lambda - 1)]^2 - 4(4 - 3\lambda)4 < 0 \quad \text{και} \quad 4 > 0 \text{ που ισχύει πάντα}$$

$$16(2\lambda - 1)^2 - 16(4 - 3\lambda) < 0$$

$$(2\lambda - 1)^2 - (4 - 3\lambda) < 0 \text{ (απλοποιήσαμε με το } +16)$$

$$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4 + 3\lambda < 0$$

$$4\lambda^2 - \lambda - 3 < 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - 4(-3)4 = 1 + 48 = 49$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm 7}{8} \quad \lambda_1 = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \frac{8}{8} = 1$$

λ	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$4\lambda^2 - \lambda - 3$		+	-	
		+		

$$\text{Άρα } -\frac{3}{4} < \lambda < 1 \text{ ή } \lambda \in \left(-\frac{3}{4}, 1\right).$$

ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ

$A(x)B(x) \dots \Phi(x) < 0$ ή $A(x)B(x) \dots \Phi(x) > 0$

Για να επιλύσουμε ανισώσεις αυτών των μορφών ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Βρίσκουμε τις ρίζες (αν υπάρχουν) των παραγόντων $A(x), B(x), \dots, \Phi(x)$.
- Διατάσσουμε τις ρίζες σ'έναν άξονα από την μικρότερη προς την μεγαλύτερη.
- Κάτω από τον άξονα σχηματίζουμε πίνακα με τα πρόσημα των παραγόντων στα διαστήματα που δημιουργήθηκαν από τις ρίζες.
- Στην τελευταία γραμμή βρίσκουμε το πρόσημο του γινομένου $A(x)B(x) \dots \Phi(x)$ εφαρμόζοντας των κανόνα των προσήμων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση : $(x-2)(x^2+6x+9)(x^2-3x-4)(x^2-x+2) < 0$

ΛΥΣΗ

Βρίσκουμε τις ρίζες όλων των παραγόντων:

- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$
- $x^2+6x+9=0$, $\Delta=0$ και $x=-3$
- $x^2-3x-4=0$, $\Delta=25$ και $x=-1$ ή $x=4$
- $x^2-x-2=0$, $\Delta=9$ και $x=-1$ ή $x=2$

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	-3	-1	2	4	$+\infty$
$x-2$	-	-	-	0	+	+
x^2-3x-4	+	+	0	-	0	+
x^2+6x+9	+	0	+	+	+	+
x^2-x-2	+	+	+	+	+	+
Π	-	-	+	-	+	+

Άρα $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (2, 4)$.

➤ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Μορφή $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$

Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο δύο αριθμών ακολουθεί το ίδιο πρόσημο με το γινόμενο τους ,άρα προκύπτουν οι ισοδυναμίες:

- $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) > 0$, $B(x) \neq 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x)B(x) < 0$, $B(x) \neq 0$

Προσοχή : Αν η λύση περιέχει κλειστά διαστήματα $(\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0 \text{ ή } \frac{A(x)}{B(x)} \leq 0)$

πρέπει να εξαιρούμε τις ρίζες του παρονομαστή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$i) \frac{x-3}{x^2-3x-10} < 0 \quad ii) \frac{(x+2)(x^2-9)}{x^2+2x-3} \geq 0$$

ΛΥΣΗ

i) Πρέπει πρώτα να πάρουμε τον περιορισμό :

$$x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5 \text{ και } x \neq -2$$

Στη συνέχεια έχουμε $\frac{x-3}{x^2-3x-10} < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-3x-10) < 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων του γινομένου και φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ και } x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=-2$$

x	$-\infty$	-2	3	5	$+\infty$
$x^2-3x-10$	+	0	-	0	+
$x-3$	-	-	0	+	+
Π	-	+	-	+	+

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (3, 5)$.

ii) Πρέπει πρώτα να πάρουμε τον περιορισμό

$$x^2+2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq -3.$$

Στη συνέχεια έχουμε $\frac{(x+2)(x^2-9)}{x^2+2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-9)(x^2+2x-3) \geq 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων του γινομένου και φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων

x	$-\infty$	-3	-2	1	3	$+\infty$
$x+2$	-	0	-	0	+	+
x^2-9	+	0	-	-	0	+
x^2+2x-3	+	0	-	0	+	+
Π	-	0	-	+	-	+

Άρα $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup (1, 3]$.

Η διπλή γραμμή στις τιμές -3 και 1 σημαίνει ότι οι τιμές αυτές δεν είναι δεκτές γιατί μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Ειδικές Περιπτώσεις

Αν η κλασματική ανίσωση περιέχει και άλλα κλάσματα ή ακόμα και κάποιον αριθμό

εκτός της παράστασης $\frac{A(x)}{B(x)}$ δεν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών

Βρίσκοντας το Ε.Κ.Π.

Για να λύσουμε μία τέτοια ανίσωση εργαζόμαστε ως εξής:

- Παίρνουμε περιορισμούς (οι παρονομαστές διάφοροι του μηδενός).
- Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος της ανίσωσης και κάνουμε ομώνυμα.
- Το πρώτο μέλος παίρνει τώρα την μορφή $\frac{A(x)}{B(x)}$, οπότε λύνουμε την

ανίσωση που προέκυψε όπως αναφέρθηκε πριν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να λυθούν οι ανισώσεις : ι) $\frac{2x-1}{x^2-4} \geq 1$ ιι) $\frac{4}{x+1} \geq \frac{10}{x^2-1} - \frac{x}{x-1}$

ΛΥΣΗ

ι) Πρέπει $x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$

$$\frac{2x-1}{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x^2-4} - \frac{x^2-4}{x^2-4} \geq 0$$

$$\frac{2x-1-x^2+4}{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x+3}{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow (-x^2+2x+3)(x^2-4) \geq 0$$

x	$-\infty$	-2	-1	2	3	$+\infty$
$-x^2+2x+3$	-		- 0 +		+ 0 -	
x^2-4	+	0 -		- 0 +		+
Π	-		+	-		+

Άρα οι λύσεις είναι $x \in (-2, -1] \cup (2, 3]$

Η διπλή γραμμή στις τιμές -2 και 2 σημαίνει ότι οι τιμές αυτές δεν είναι δεκτές γιατί μηδενίζουν τον παρονομαστή.

ιι) Πρέπει $x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

$$\frac{4}{x+1} \geq \frac{10}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} \geq \frac{10}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} \geq \frac{10}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x+1)}{(x-1)} \Leftrightarrow \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{10}{(x-1)(x+1)} + \frac{x(x+1)}{(x-1)} \geq 0$$

$$\frac{4(x-1)-10+x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-4-10+x^2+x}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x-14}{(x+1)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

Βρίσκουμε τις ρίζες των παραγόντων του γινομένου και φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμων

$$(x^2+5x-14)(x-1)(x+1) \geq 0$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ και } x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

$$\text{Άρα } x^2+5x-14=0 \Leftrightarrow x=-7 \text{ ή } x=2$$

x	$-\infty$	-7	-1	1	2	$+\infty$	
$x^2+5x-14$	+	o	-	-	-	o	+
$x-1$	-	-	-	-	o	+	+
$x+1$	-	-	o	+	+	+	+
Π	+	-	+	+	-	+	+

Άρα οι λύσεις είναι $x \in (-\infty, -7] \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty]$

Η διπλή γραμμή στις τιμές -1 και 1 σημαίνει ότι οι τιμές αυτές δεν είναι δεκτές γιατί μηδενίζουν τον παρονομαστή .