

2. 4 Κλασματικές εξισώσεις



Μαθαίνω να λύνω κλασματικές εξισώσεις, που μετασχηματίζονται σε εξισώσεις πρώτου ή δευτέρου βαθμού.



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{4} + \frac{4}{3} = \frac{x+8}{12}$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των $x+2$, x , x^2+2x και να λύσετε και την εξίσωση

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}.$$

Επαληθεύεται η εξίσωση από όλες τις τιμές του x που βρήκατε;

Υπάρχουν προβλήματα που η επίλυσή τους οδηγεί σε εξίσωση, που περιέχει ένα τουλάχιστον κλάσμα με άγνωστο στον παρονομαστή και η οποία ονομάζεται **κλασματική** εξίσωση.

$$\frac{x}{4} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{6},$$

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$$

Για να ορίζονται οι όροι μιας κλασματικής εξίσωσης πρέπει όλοι οι παρονομαστές να είναι διάφοροι του μηδενός.

Τις κλασματικές εξισώσεις τις επιλύουμε όπως και τις υπόλοιπες εξισώσεις που έχουν παρονομαστή γνωστό αριθμό.

Για παράδειγμα, προκειμένου να επιλύσουμε την εξίσωση $\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x^2+2x}$ εργαζόμαστε ως εξής:

Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

$$\frac{x}{x+2} + \frac{4}{x} = \frac{x+8}{x(x+2)}$$

Προσδιορίζουμε τις τιμές του αγνώστου για τις οποίες όλοι οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

Πρέπει $x \neq 0$ και $x+2 \neq 0$
δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq -2$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.

Το ΕΚΠ των παρονομαστών είναι $x(x+2) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$x(x+2)\frac{x}{x+2} + x(x+2)\frac{4}{x} = x(x+2)\frac{x+8}{x(x+2)}$$

Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

$$x^2 + 4(x + 2) = x + 8$$

$$x^2 + 4x + 8 = x + 8 \quad \text{ή} \quad x^2 + 3x = 0 \quad \text{ή} \quad x(x + 3) = 0, \quad \text{άρα} \quad x = 0 \quad \text{ή} \quad x = -3.$$

Από τις λύσεις που βρήκαμε, απορρίπτουμε εκείνες που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Η λύση $x = 0$ απορρίπτεται, αφού πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -2$, οπότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = -3$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\frac{x}{x+1} - \frac{8}{x} = 1$ β) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 - 2x}$

Λύση

α) Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq -1$. Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x + 1) \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται

$$x(x + 1) \cdot \frac{x}{x + 1} - x(x + 1) \cdot \frac{8}{x} = x(x + 1) \cdot 1$$

$$x^2 - 8(x + 1) = x(x + 1) \quad \text{ή} \quad x^2 - 8x - 8 = x^2 + x \quad \text{ή} \quad -9x = 8 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{8}{9}$$

(ικανοποιεί τους περιορισμούς). Άρα η εξίσωση έχει λύση τη $x = -\frac{8}{9}$.

β) Αναλύουμε τους παρονομαστές σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και η εξίσωση γίνεται $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x(x-2)}$ (1).

Για να ορίζονται οι όροι της εξίσωσης πρέπει $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι $x(x - 2) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x - 2) \frac{1}{x - 2} - x(x - 2) \frac{1}{x} = x(x - 2) \frac{2}{x(x - 2)}$$

$$x - (x - 2) = 2 \quad \text{ή} \quad x - x = 2 - 2 \quad \text{ή} \quad 0x = 0.$$

Άρα η εξίσωση έχει ως λύση οποιοδήποτε αριθμό, εκτός από τους αριθμούς 0 και 2.

2

Ένας μαραθωνοδρόμος διήνυσε την απόσταση των 42 km και δεν μπόρεσε να κερδίσει κάποιο μετάλλιο. Όταν με τον προπονητή του ανέλυσαν την προσπάθειά του, διαπίστωσαν ότι, αν η μέση ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, θα τερμάτιζε σε $\frac{1}{10}$ της ώρας νωρίτερα και θα έπαιρνε το χρυσό μετάλλιο. Ποια ήταν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε;

Λύση

Αν η μέση ταχύτητα με την οποία έτρεξε ήταν x km/h, τότε την απόσταση των 42 km

τη διήνυσε σε χρόνο $\frac{42}{x}$ ώρες. Αν η ταχύτητά του ήταν 1 km/h μεγαλύτερη, δηλαδή

$(x + 1)$ km/h, τότε θα έκανε $\frac{42}{x+1}$ ώρες. Ο χρόνος αυτός είναι μικρότερος από τον

προηγούμενο κατά $\frac{1}{10}$ της ώρας, οπότε έχουμε την εξίσωση $\frac{42}{x} = \frac{42}{x+1} + \frac{1}{10}$ (1).

Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $10x(x + 1) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$10x(x + 1) \cdot \frac{42}{x} = 10x(x + 1) \cdot \frac{42}{x+1} + 10x(x + 1) \cdot \frac{1}{10}$$

$$420(x + 1) = 420x + x(x + 1) \quad \text{ή} \quad 420x + 420 = 420x + x^2 + x \quad \text{ή} \quad x^2 + x - 420 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-420) = 1681 > 0$.

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{1681}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 41}{2}$,

δηλαδή είναι $x = 20$ ή $x = -22$.

Επειδή $x > 0$, η μέση ταχύτητα του μαραθωνοδρόμου ήταν 20 km/h.

3 Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα δύο αντιστάτες που συνδέονται παράλληλα έχουν αντιστάσεις αντίστοιχα 4Ω και 9Ω μεγαλύτερες από την ολική τους αντίσταση. Να βρεθεί η ολική αντίσταση του κυκλώματος.

Σημείωση: Από τη Φυσική είναι γνωστό ότι, αν δύο αντιστάτες που έχουν αντιστάσεις R_1, R_2 συνδεθούν παράλληλα, τότε η ολική τους αντίσταση $R_{ολ}$ δίνεται από τον

$$\text{τύπο } \frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Λύση

Αν η ολική αντίσταση είναι $x \Omega$, τότε οι δύο αντιστάσεις του κυκλώματος θα είναι $(x + 4) \Omega$ και $(x + 9) \Omega$.

Άρα ισχύει $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x}$ (1)

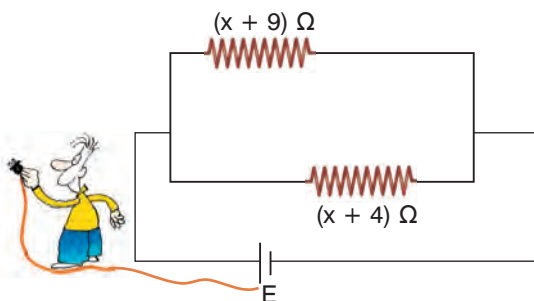
Οι όροι της εξίσωσης ορίζονται, αφού $x > 0$.

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών που είναι $x(x + 4)(x + 9) \neq 0$ και η εξίσωση (1) γράφεται

$$x(x + 4)(x + 9) \cdot \frac{1}{x+4} + x(x + 4)(x + 9) \cdot \frac{1}{x+9} = x(x + 4)(x + 9) \cdot \frac{1}{x}$$

$$x(x + 9) + x(x + 4) = (x + 4)(x + 9) \quad \text{ή} \quad x^2 + 9x + x^2 + 4x = x^2 + 4x + 9x + 36 \quad \text{ή} \quad x^2 = 36 \quad \text{ή} \quad x = \pm\sqrt{36}. \quad \text{Άρα } x = 6 \quad \text{ή} \quad x = -6.$$

Από τις δύο λύσεις της εξίσωσης μόνο η $x = 6$ είναι λύση του προβλήματος. Άρα η ολική αντίσταση του κυκλώματος είναι 6Ω .





ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.
- α) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{6}{x-1} + \frac{4}{x} = 8$ ορίζονται αν $x \neq 0$ και $x \neq 1$. ☐
- β) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x} = 2$. ☐
- γ) Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης $\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2$, τότε αυτή γράφεται $5x + 3 = 2$. ☐
- δ) Οι όροι της εξίσωσης $\frac{x^3}{x^2+1} = x$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 0 είναι λύση της. ☐
- 2 Αν διαιρέσουμε έναν αριθμό x με τον αριθμό που είναι κατά 2 μονάδες μεγαλύτερος βρίσκουμε $\frac{3}{4}$. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις εκφράζει την παραπάνω πρόταση;
- α) $\frac{x}{2-x} = \frac{3}{4}$ β) $\frac{x+2}{x} = \frac{3}{4}$ γ) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{4}$ δ) $\frac{x}{x-2} = \frac{3}{4}$
- 3 Η εξίσωση $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x+4}{x+1} = 6$ έχει ως λύση τον αριθμό
- α) $x = 1$ β) $x = -1$ γ) $x = 0$ δ) $x = 2$
- 4 Ένας μαθητής για να λύσει την εξίσωση $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, έκανε απαλοιφή παρονομαστών και λύνοντας την εξίσωση $2x - 1 = 1$ που προέκυψε, βρήκε ως λύση τον αριθμό $x = 1$. Η απάντησή του είναι σωστή;



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 1 Να λύσετε τις εξισώσεις:
- α) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{2}$ β) $\frac{7}{2y-3} = -\frac{1}{3}$ γ) $\frac{4\omega+1}{\omega-2} = \frac{9}{\omega-2}$
- δ) $\frac{7}{5a} + \frac{3}{10} = \frac{2}{a}$ ε) $\frac{2x+1}{x-3} = 2 - \frac{7}{3-x}$ στ) $1 - \frac{5}{y-2} = \frac{6-y}{2-y}$

2 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} = 1 \quad \beta) \frac{5}{y} + \frac{4}{y-1} = 2 \quad \gamma) \frac{7}{\omega} - \frac{3}{\omega+2} = \frac{6}{\omega^2}$$

$$\delta) \frac{4}{(a-2)^2} - \frac{3}{a-2} = 1 \quad \epsilon) \frac{6}{x(x+3)} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+1}{x+3} \quad \sigma\tau) \frac{y-1}{y} - \frac{2}{y+1} = \frac{y+3}{y(y+1)}$$

3 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x+5}{x^2-25} = \frac{3}{x+5} \quad \beta) \frac{y+1}{y^2-y-2} - \frac{1}{y-2} = 0$$

$$\gamma) \frac{\omega^2+5}{\omega^2-\omega} - \frac{\omega+5}{\omega-1} = \frac{1}{\omega} \quad \delta) \frac{1}{a^2-2a} + \frac{a-1}{a} = \frac{a}{a-2}$$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 1 - \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2-y} = 0 \quad \beta) \frac{2\omega^2}{\omega^2+2\omega} = 3 - \frac{4}{\omega+2}$$

$$\gamma) \frac{1}{x^2-4x+4} = \frac{2x-1}{x^2-4} \quad \delta) 1 + \frac{3a}{a-2} = \frac{a+4}{a^2-3a+2}$$

5 Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x-\frac{4}{x}} = \frac{4}{3} \quad \beta) \frac{1}{1+\frac{3}{x}} - \frac{2}{x-3} = \frac{x-6}{x^2-9}$$

6 Να λύσετε τους τύπους:

$$\alpha) \rho = \frac{m}{V} \text{ ως προς } V \quad \beta) E = \frac{a\beta\gamma}{4R} \text{ ως προς } R$$

$$\gamma) R = \rho \frac{\ell}{S} \text{ ως προς } S \quad \delta) \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \text{ ως προς } T_1$$

$$\epsilon) \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ ως προς } R \quad \sigma\tau) \frac{2}{\beta} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\gamma} \text{ ως προς } a$$

$$\zeta) \frac{1}{u_a^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \text{ ως προς } u_a^2 \quad \eta) S = \frac{a}{1-\lambda} \text{ ως προς } \lambda$$

7 α) Να βρείτε δύο αντίστροφους αριθμούς που έχουν άθροισμα $\frac{17}{4}$.

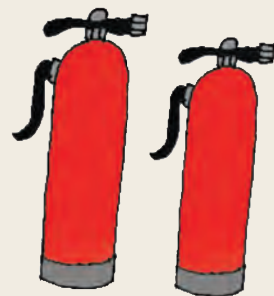
β) Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{3}{5}$ για να βρούμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$.

γ) Να βρείτε δύο διαδοχικούς άρτιους φυσικούς αριθμούς που έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.

- 8 Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 84 €. Μεταξύ των ατόμων που γευμάτισαν ήταν και 3 παιδιά, οπότε οι υπόλοιποι ενήλικες συμφώνησαν, προκειμένου να καλύψουν τα έξοδα των παιδιών, να πληρώσει καθένας 9 € παραπάνω από αυτά που έπρεπε να πληρώσει. Πόσα ήταν τα άτομα που γευμάτισαν;



- 9 Ο διαχειριστής μιας πολυκατοικίας αγόρασε πυροσβεστήρες για την πυρασφάλεια του κτιρίου και έδωσε 240 €. Πριν από λίγα χρόνια, που η τιμή κάθε πυροσβεστήρα ήταν 4 € μικρότερη, με τα ίδια χρήματα θα αγόραζε 2 πυροσβεστήρες περισσότερους. Να βρείτε πόσους πυροσβεστήρες αγόρασε.



- 10 Αναμειγνύουμε 12 gr ενός διαλύματος Α με 15 gr ενός διαλύματος Β και σχηματίζουμε 25 cm³ ενός διαλύματος Γ. Να βρεθεί η πυκνότητα του διαλύματος Α, αν η πυκνότητα του διαλύματος Β είναι 0,2 gr/cm³ μικρότερη.
- 11 Οι υπάλληλοι μιας βιοτεχνίας έπρεπε να συσκευάσουν 120 προϊόντα μιας παραγγελίας. Απουσίασαν όμως 2 υπάλληλοι, οπότε καθένας από τους υπόλοιπους υπαλλήλους υποχρεώθηκε να συσκευάσει 3 προϊόντα παραπάνω για να καλυφθεί η παραγγελία. Να βρείτε πόσοι είναι οι υπάλληλοι της βιοτεχνίας αν καθένας από αυτούς συσκευάζει τον ίδιο αριθμό προϊόντων.

- 12 Οι φίλαθλοι μιας ομάδας ταξιδεύοντας με ένα πούλμαν έπρεπε να διανύσουν μια απόσταση 210 km για να δουν την αγαπημένη τους ομάδα. Υπολόγιζαν να φτάσουν στον προορισμό τους μισή ώρα πριν από την έναρξη του αγώνα. Ο οδηγός όμως, λόγω ολισθηρότητας του δρόμου, μείωσε τη μέση ταχύτητα κατά 10 km/h και έτσι έφτασαν στο γήπεδο ακριβώς την ώρα που άρχιζε ο αγώνας. Να βρείτε τη μέση ταχύτητα με την οποία διήνυσαν τελικά την απόσταση.



ΈΝΑ ΘΕΜΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η χρυσή τομή



Πώς μπορούμε να χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο άνισα μέρη, έτσι ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει από αυτόν τον χωρισμό να δημιουργεί μια αίσθηση αρμονίας;

Η κατασκευή των δύο διαζωμάτων στο θέατρο της Επιδαύρου (τέλος του 4ου αιώνα π.Χ.) δείχνει πώς έλυσαν το πρόβλημα αυτό οι αρχαίοι Έλληνες. Τα σκαλιά του θεάτρου έχουν χωριστεί σε δύο άνισα μέρη με τέτοιο τρόπο, που το αισθητικό αποτέλεσμα είναι ευχάριστο στο μάτι. Για να καταλάβετε με ποιον τρόπο το πέτυχαν:

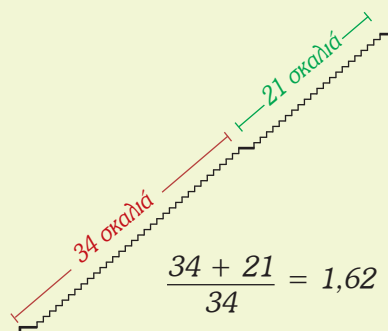
α) Υπολογίστε τους λόγους των σκαλιών $\frac{34 + 21}{34}$ και $\frac{34}{21}$.

Τι παρατηρείτε;

Ο χωρισμός έχει γίνει με τυχαίο τρόπο;

Το πρόβλημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

«Να χωριστεί ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = \lambda$ σε δύο άνισα μέρη AT και TB , ώστε ο λόγος ολόκληρου προς το μεγαλύτερο μέρος να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το υπόλοιπο τμήμα».



β) Να δείξετε ότι η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στην επίλυση της κλασματικής εξίσωσης $\frac{\lambda}{x} = \frac{x}{\lambda - x}$ (1).

γ) Να λύσετε την κλασματική εξίσωση (1) και να υπολογίσετε το x ως συνάρτηση του λ .

δ) Να αποδείξετε ότι ο λόγος $\varphi = \frac{\lambda}{x}$ είναι ίσος με $\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618...$

Ο αριθμός 1,618... ονομάζεται **λόγος της χρυσής τομής** και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ προς τιμή του γλύπτη Φειδία. Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν διαπιστώσει ότι, όπου εμφανίζεται ο λόγος της χρυσής τομής, δημιουργείται μια αίσθηση αρμονίας.

Το ορθογώνιο του οποίου οι διαστάσεις έχουν λόγο φ , λέγεται «**χρυσό ορθογώνιο**» και το συναντάμε συχνά στην αρχιτεκτονική και τη ζωγραφική.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο Παρθενώνας, οι διαστάσεις του οποίου έχουν λόγο $\frac{a}{b} = \varphi$

