

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Σημειώσεις για τις ασκήσεις 7, 8 σελ. 147 και την άσκηση 12 σελ. 149.

(Θυμίζουμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με C_f)

Σημεία τομής με τον άξονα $x'x$.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f ενδέχεται να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε κανένα ή σε ένα ή σε περισσότερα από ένα σημεία.

- Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Πιο συγκεκριμένα, αν $x_1, x_2, \dots, x_k$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(x_1, 0), (x_2, 0), \dots, (x_k, 0)$.

Σχετικές θέσεις με τον άξονα $x'x$.

- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$.
- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, λύνουμε την ανίσωση $f(x) < 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρείτε:

- α) Τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.
- β) Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
- γ) Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

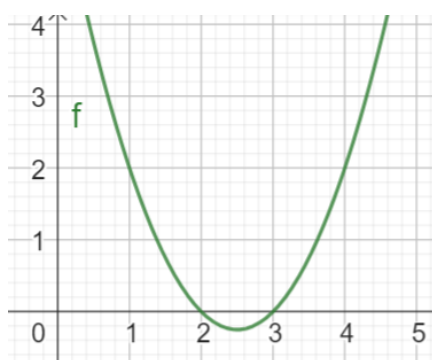
ΛΥΣΗ

α) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$. Με τη διακρίνουσα και τους τύπους για τις λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού βρίσκουμε εύκολα ότι $x = 2$ ή $x = 3$. Επομένως, η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(2, 0)$ και $(3, 0)$.

β) Σύμφωνα με τη θεωρία για το πρόσημο τριωνύμου (A' Λυκείου), έχουμε ότι $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ή $x > 3$. Άρα, η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ όταν $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

γ) Παρόμοια, έχουμε ότι $f(x) < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$. Άρα, η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ όταν $x \in (2, 3)$.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και από το επόμενο γράφημα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

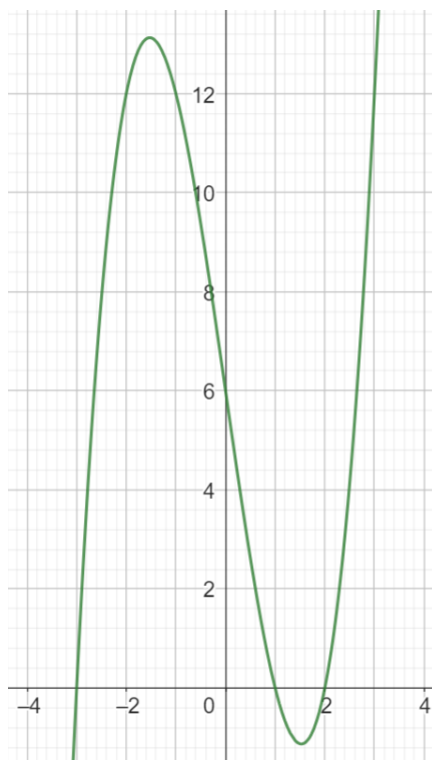
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 7x + 6$. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε δει ότι η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$ έχει λύσεις τις

$$x_1 = -3 \text{ ή } x_2 = 1 \text{ ή } x_3 = 2$$

Άρα, τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $(-3,0)$, $(1,0)$ και $(2,0)$.



Σχετικές θέσεις των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g .

Η παραπάνω θεωρία μπορεί να γενικευθεί και για την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g . Συγκεκριμένα:

- Για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και C_g , λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g , λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.
- Για να βρούμε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g , λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 3x - 2$. Να βρείτε:

- α) Τα σημεία τομής των C_f και C_g .
- β) Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g .

ΛΥΣΗ

α) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.

Με τη διακρίνουσα και τους τύπους για τις λύσεις μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού βρίσκουμε εύκολα ότι $x = 1$ ή $x = 2$.

Για $x=1$ έχουμε $f(1) = g(1) = 1$.

Για $x=2$ έχουμε $f(2) = g(2) = 4$.

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(1,1)$ και $(2,4)$.

β) Λύνουμε την ανίσωση $f(x) < g(x)$. Έχουμε:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^2 < 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$$

Άρα, η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g όταν $x \in (1,2)$.

Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και στο επόμενο διάγραμμα.

