

Θέμα 2799 (λύση από askisopolis)

Παρασκευή, 9 Απριλίου 2021

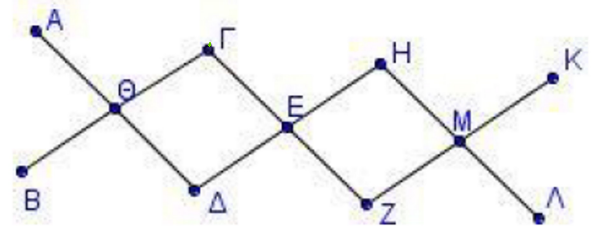
12:45 μμ

4ο ΘΕΜΑ

2799. Στην διπλανή εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο.
- Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.
- Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση

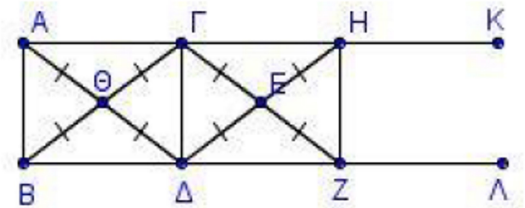


μ 10

μ 9

μ 6

α) Επειδή $ΕΓ = ΕΔ = ΕΗ = ΕΖ$, στο τετράπλευρο ΓΗΖΔ οι διαγώνιες του διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο.



β) Επειδή $ΘΑ = ΘΒ = ΘΓ = ΘΔ$, στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ οι διαγώνιες του

διχοτομούνται και είναι ίσες, άρα είναι ορθογώνιο, οπότε $\widehat{ΒΔΓ} = 90^\circ$.

Επειδή το ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο, είναι $\widehat{ΓΔΖ} = 90^\circ$.

Είναι $\widehat{ΒΔΖ} = \widehat{ΒΔΓ} + \widehat{ΓΔΖ} = 180^\circ$, οπότε τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά.

γ) Το τετράπλευρο $\Theta\Gamma\Delta\text{E}$ έχει όλες τις πλευρές του ίσες. Άρα είναι ρόμβος και

$\widehat{\Gamma\Theta\Delta} = \widehat{\Gamma\text{E}\Delta}$. Τα τρίγωνα $\text{B}\Theta\Delta$ και $\text{E}\Delta\text{Z}$ έχουν

- $\widehat{\text{B}\Theta\Delta} = \widehat{\Delta\text{E}\text{Z}}$ σαν εφεξής και παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{\Gamma\Theta\Delta}$, $\widehat{\Gamma\text{E}\Delta}$
- $\text{B}\Theta = \Delta\text{E}$
- $\Theta\Delta = \text{EZ}$

Επομένως τα τρίγωνα $\text{B}\Theta\Delta$ και $\text{E}\Delta\text{Z}$ είναι ίσα και $\text{B}\Delta = \Delta\text{Z}$.

Επειδή το $\text{AB}\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο τα τμήματα $\text{A}\Gamma$ και $\text{B}\Delta$ είναι ίσα και παράλληλα.

Όμως τα σημεία $\text{B}, \Delta, \text{Z}$ είναι συνευθειακά.

Άρα τα τμήματα $\text{A}\Gamma$ και ΔZ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο $\text{A}\Gamma\text{Z}\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.