

9η Άσκηση

Έως το κ/0

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) > 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$

β) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{\eta \mu x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x f(x) - x \epsilon \varphi x}{x^2}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x}$.

γ) Αν $f(\lambda x) > f(2x) + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lambda = 3$.

δ) Αν για τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x)(g(x) - 2f(x)) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

ε) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^5(x) \eta \mu \frac{1}{x}}{f^2(x) + g^4(x)} = 0$

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x^{1821}}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$, είναι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$.

$$\text{Για } x < 0 \text{ είναι: } f(x) > 4x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} \leq 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \leq 4 \quad (1)$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ είναι: } f(x) > 4x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} \geq 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \geq 4 \quad (2)$$

$$\text{Από (1),(2): } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$$

$$\beta) \text{ Έστω } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{2x}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{4 - 2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x f(x) - x \epsilon\phi x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x f(x)}{x^2} - \frac{x \epsilon\phi x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \right) = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x}$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\upsilon\mu\epsilon \frac{f(x)}{x} = h(x), x \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = xh(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xh(x)) = 0 \cdot 4 = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{\underset{u \rightarrow 0}{x \rightarrow 0}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 4, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = 4 \cdot 4 = 16$$

γ) Για $x > 0$ είναι:

$$f(\lambda x) > f(2x) + f(x) \Leftrightarrow \frac{f(\lambda x)}{x} > \frac{f(2x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\lambda x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(2x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda \frac{f(\lambda x)}{\lambda x} \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{f(2x)}{2x} + \frac{f(x)}{x} \right) \Leftrightarrow 4\lambda \geq 8 + 4 \Leftrightarrow 4\lambda \geq 12 \Leftrightarrow \lambda \geq 3 \quad (3)$$

Για $x < 0$ είναι:

$$f(\lambda x) > f(2x) + f(x) \Leftrightarrow \frac{f(\lambda x)}{x} < \frac{f(2x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\lambda x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(2x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \right) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda \frac{f(\lambda x)}{\lambda x} \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{f(2x)}{2x} + \frac{f(x)}{x} \right) \Leftrightarrow 4\lambda \leq 8 + 4 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 12 \Leftrightarrow \lambda \leq 3 \quad (4)$$

Από (3),(4): $\lambda = 3$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\lambda x)}{\lambda x} \stackrel{\lambda x=u}{\underset{u \rightarrow 0}{x \rightarrow 0}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 4$$

$$\delta) g(x)(g(x) - 2f(x)) \leq 0 \Leftrightarrow g^2(x) - 2g(x)f(x) \leq 0 \Leftrightarrow g^2(x) - 2g(x)f(x) + f^2(x) \leq f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$(g(x) - f(x))^2 \leq f^2(x) \Leftrightarrow |g(x) - f(x)| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq g(x) - f(x) \leq |f(x)| \Leftrightarrow$$

$$-|f(x)| + f(x) \leq g(x) \leq |f(x)| + f(x)$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (-|f(x)| + f(x)) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} (|f(x)| + f(x)) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

$$\varepsilon) \left| \frac{f^5(x) \eta \mu \frac{1}{x}}{f^2(x) + g^4(x)} \right| = \frac{|f^5(x)|}{f^2(x) + g^4(x)} \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq \frac{|f^5(x)|}{f^2(x) + g^4(x)} \leq \frac{|f(x)|^5}{f^2(x)} = \frac{|f(x)|^3}{|f(x)|^2} = |f(x)|^3 \Leftrightarrow$$

$$-|f(x)|^3 \leq \frac{f^5(x) \eta \mu \frac{1}{x}}{f^2(x) + g^4(x)} \leq |f(x)|^3.$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (-|f(x)|^3) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|^3$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^5(x) \eta \mu \frac{1}{x}}{f^2(x) + g^4(x)} = 0$

$$\sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x^{1821}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(2x) - f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^{1820}}}{\frac{1}{x^{1821}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{f(2x) - f(x)}{2x} - \frac{f(x)}{x}}{\frac{1}{x^{1820}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(2 \frac{f(2x)}{2x} - \frac{f(x)}{x} \right) \frac{1}{x^{1820}} \right] = (8 - 4)(+\infty) = +\infty$$



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων