

7η Άσκηση

2020-2021

Αντίστροφη συνάρτηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x - 1$, $\lambda > 0$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Έστω ότι οι γραφικές παραστάσεις των f , f^{-1} τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 1$.

γ) Να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

ε) Χρησιμοποιώντας βασικές συναρτήσεις και κάνοντας κατάλληλο σχήμα, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

στ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε τις ανισώσεις:

i. $f^{-1}(x) < -1$ **ii.** $f^{-1}(x - 2 + f(x)) < 2$

ζ) Να λύσετε την εξίσωση $(x^3 + x - 1)^3 + x^3 + x = 1$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τότε $x_1^3 < x_2^3$ (1), $\lambda x_1 < \lambda x_2 \Leftrightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$ (2) και με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2): $x_1^3 + x_1 - 1 < x_2^3 + x_2 - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}$.

β) $f \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow 1-1$ οπότε αντιστρέφεται

γ) Είναι $f(1) = f^{-1}(1) \Leftrightarrow f(f(1)) = 1 \Leftrightarrow f(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0 \stackrel{\text{horner}}{\Leftrightarrow} (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ αδύνατη γιατί έχει $\Delta < 0$.

δ) Αρχικά θα βρούμε τη σχετική θέση της C_f με την ευθεία $y = x$.

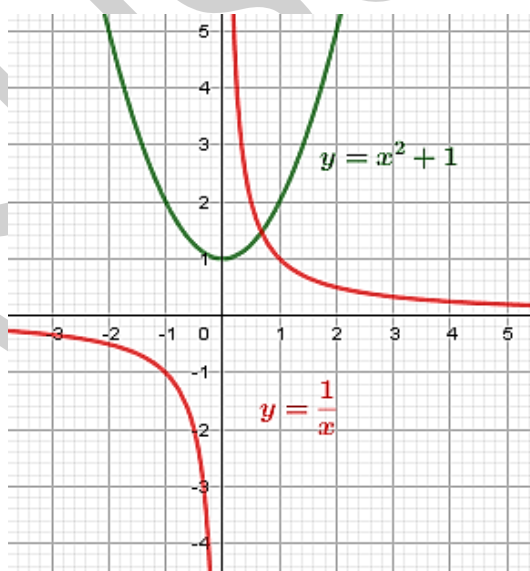
$$f(x) > x \Leftrightarrow x^3 + x - 1 > x \Leftrightarrow x^3 > 1 \Leftrightarrow x > 1.$$

Για κάθε $x > 1$ η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$ και λόγω συμμετρίας, η $C_{f^{-1}}$ κάτω από την $y = x$, άρα $f(x) > f^{-1}(x)$. Όμοια, για κάθε $x < 1$ η C_f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$ και λόγω συμμετρίας, η $C_{f^{-1}}$ πάνω από την $y = x$, άρα $f(x) < f^{-1}(x)$. Επειδή $f(1) = 1 = f^{-1}(1)$, μοναδικό κοινό σημείο των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι το $(1, 1)$.

ε) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 1$ (1)

Παρατηρούμε ότι η (1) είναι αδύνατη για $x = 0$, οπότε για $x \neq 0$: $(1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{x}$.

Επομένως για να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα, αρκεί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^2 + 1$ και $y = \frac{1}{x}$ να έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.



Σχεδιάζοντας την παραβολή $y = x^2 + 1$ και την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ βλέπουμε ότι έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

στ) i. $f^{-1}(x) < -1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) < f(-1) \Leftrightarrow x < -1$

$$\text{ii. } f^{-1}(x-2+f(x)) < 2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x-2+f(x))) < f(2) \Leftrightarrow$$

$$x-2+f(x) < 9 \Leftrightarrow x+x^3+x-2-1-9=0 \Leftrightarrow$$

$$x^3+2x-12 < 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left(\underbrace{x^2+2x+6}_{>0}\right) < 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ Αδύνατη}$$

1	0	2	12	2
	2	4	-12	
1	2	6	0	

$$\zeta) (x^3+x-1)^3+x^3+x=-1 \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)+1=-1 \Leftrightarrow$$

$$f^3(x)+f(x)-1=-1-1-1 \Leftrightarrow f(f(x))=-3 \Leftrightarrow f(f(x))=f(-1) \Leftrightarrow f(x)=-1 \Leftrightarrow f(x)=f(0) \Leftrightarrow x=0$$