2021 – 2022

5ο Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών έως την παράγραφο 2.4 (Έως ρυθμό μεταβολής)

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

7 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

4 μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\lambda x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{\lambda x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\lambda x}=0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ »

α) Είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

$1+3$ μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 ,τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

β) $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση του.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=\beta$, $\lim\limits_{x\to\beta}g(x)=\gamma$ και $f(x)\neq\beta$ κοντά στο α, τότε $\lim\limits_{x\to\alpha}g(f(x))=\gamma$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

$2\times5=10$ μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^3+\alpha x+\beta\ , & x\le 0\\ x^2+\beta x+\alpha^2, & x>0\end{cases}$, όπου $\alpha,\beta\neq 0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$.

6 μονάδες

Β2. Να βρείτε τις συναρτήσεις f' και f''.

6 μονάδες

Β3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε: $y = 13x + 17$ εφάπτεται της γραφική παράστασης της f μόνο σε ένα σημείο.

6 μονάδες

Β4. Υλικό σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha \leq 0$ κινείται επί της C_f και πλησιάζει τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,5cm/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασής του από τον άξονα x΄x τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(-1,-1)$.

7 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f^2(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(-4) = f(4) = 2$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{|x|}$.

6 μονάδες

Γ2. Να βρείτε τις συναρτήσεις f' και f'' .

4 μονάδες

Γ3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με αντίθετες τετμημένες, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι κάθετες.

6 μονάδες

Γ4. Αν $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(-\alpha, 0)$, $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

4 μονάδες

Γ5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f και την ευθεία $y = \lambda$, $\lambda > 0$, να αποδείξετε ότι $E < 2\lambda^3$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) + 2x - 1$, $x > -1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

6 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο στο οποίο τέμνει τον άξονα y΄y, εφάπτεται και στην $h(x) = e^{x-1} + x$, $x \in \mathbb{R}$.

6 μονάδες

Δ3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της C_f με τετμημένη μεγαλύτερη του x_0 στα οποία οι εφαπτομένες να είναι κάθετες.

6 μονάδες

Δ4. Υλικό σημείο Μ κινείται επί της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η τετμημένη του Μ αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec . Την χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, όπου x_0 αυτό του Δ1 ερωτήματος, να δείξετε ότι η γωνία $\theta = \widehat{MOx}$ μειώνεται με ρυθμό $\dfrac{f\left(x_0\right)}{{x_0}^2 + f^2\left(x_0\right)}$ rad/sec.

7 μονάδες

Ευχόμαστε καλή χρονιά με υγεία και κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς – Νίκος Τούντας

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$,οπότε

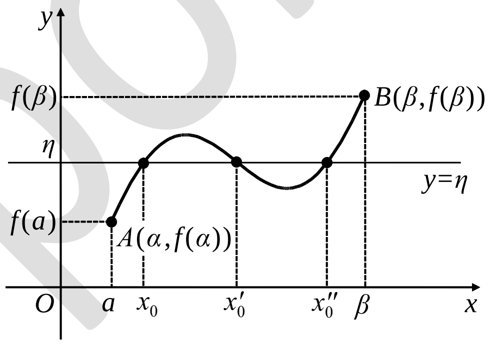
$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.



Γεωμετρική ερμηνεία
Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y=\eta$ με $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.

Α3. α) Ψευδής.

β) Αν $\lambda=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{\lambda x^3+x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ είναι και συνεχής, άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε
$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0^-}(x^3+\alpha x+\beta)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+\beta x+\alpha^2)=\beta\Leftrightarrow\beta=\alpha^2$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3+\alpha x+\beta-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cancel{x}(x^2+\alpha)}{\cancel{x}}=\alpha$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2+\beta x+\alpha^2-\alpha^2}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\cancel{x}(x+\beta)}{\cancel{x}}=\beta$.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow\alpha=\beta$ και

λόγω της σχέσης (1) είναι $\beta^2=\beta\Leftrightarrow\beta^2-\beta=0\Leftrightarrow\beta(\beta-1)=0\Leftrightarrow(\beta=0$ απορρίπτεται) ή ($\beta=1$).
Άρα $\alpha=\beta=1$.

Β2. Είναι $f(x)=\begin{cases}x^3+x+1, & x\le 0\\ x^2+x+1, & x>0\end{cases}$ και $f'(x)=\begin{cases}3x^2+1, & x\le 0\\ 2x+1, & x>0\end{cases}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}=2$, οπότε η f ΄δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Για $x<0$ είναι $f''(x)=6x$ και για $x>0$ είναι $f''(x)=2$, άρα $f''(x)=\begin{cases}6x, & x<0\\ 2, & x>0\end{cases}$.

B3. Επειδή η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 13, θα αναζητήσουμε σημείο $K(x_1,f(x_1))$ της C_f στο οποίο $f'(x_1)=13$.

Αν $x_1\le 0$ τότε $f'(x_1)=13\Leftrightarrow 3x_1^2+1=13\Leftrightarrow 3x_1^2=12\Leftrightarrow x_1^2=4\overset{x_1\le 0}{\Leftrightarrow} x_1=-2$.

Είναι $f(-2)=(-2)^3-2+1=-9$ και η εφαπτομένη της C_f στο K έχει εξίσωση

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)\Leftrightarrow y+9=13(x+2)\Leftrightarrow y=13x-17$ δηλαδή είναι η ε.

Αν $x_1>0$ τότε $f'(x_1)=13\Leftrightarrow x_1^2+x_1+1=13\Leftrightarrow x_1^2+x_1-12=0\Leftrightarrow (x_1=-4$ απορρίπτεται) ή $(x_1=3)$.

Είναι $f(3)=3^2+3+1=13$ και η εφαπτομένη της C_f στο K έχει εξίσωση

$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-13=13(x-3)\Leftrightarrow y=13x-26$ απορρίπτεται αφού δεν είναι η ε.

B4. Επειδή το σημείο Μ πλησιάζει τον άξονα y΄y με ταχύτητα 0,5cm/sec, είναι $\alpha'(t)=-0{,}5m/sec$.

Η απόσταση του Κ από τον άξονα x΄x είναι $y(t)=f(\alpha(t))=\alpha^3(t)+\alpha(t)+1$.

Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασής του από τον άξονα x΄x τη χρονική στιγμή t είναι

$y'(t)=3\alpha^2(t)\alpha'(t)+\alpha'(t)$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το Α είναι $\alpha(t_0)=-1$, οπότε

$y'(t_0)=3\alpha^2(t_0)\alpha'(t_0)+\alpha'(t_0)=3\cdot 1\cdot(-0{,}5)-0{,}5=-2cm/sec$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f^2(x)=|x|\Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{|x|}$.

$f(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{|x|}=0\Leftrightarrow x=0$.

Για κάθε $x\ne 0$ είναι $f(x)\ne 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Είναι $f(-4)>0$ και $f(4)>0$, οπότε $f(x)>0$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, οπότε $f(x)=\sqrt{|x|},\ x\ne 0$. Επειδή επιπλέον $f(0)=0$, είναι $f(x)=\sqrt{|x|}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη

στο $x_0=0$. Για $x>0$ είναι $f'(x)=(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ και για $x<0$ είναι $f'(x)=(\sqrt{-x})'=\dfrac{(-x)'}{2\sqrt{-x}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$,

άρα $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}, & x<0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f''(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\right)\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ και για $x < 0$ είναι

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{\left(\sqrt{-x}\right)^2}\right)\left(\sqrt{-x}\right)' = \frac{1}{2x}\cdot\frac{(-x)'}{2\sqrt{-x}} = -\frac{1}{4x\sqrt{-x}}, \text{ άρα } f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0 \\ -\frac{1}{4x\sqrt{x}}, & x>0 \end{cases}$$

.

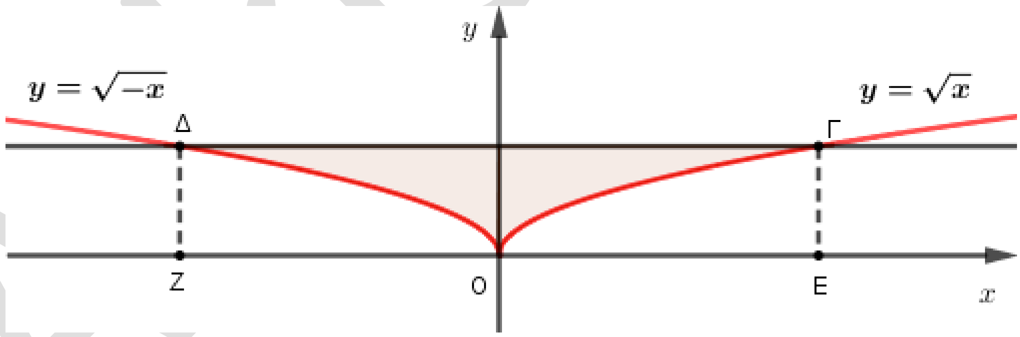
Γ3. Έστω $K(x_1, f(x_1))$, $\Lambda(-x_1, f(-x_1))$ δύο σημεία της C_f με αντίθετες τετμημένες και $x_1 > 0$.
Για να είναι οι εφαπτομένες της C_f στα Κ, Λ κάθετες, πρέπει $f'(x_1)f'(-x_1) = -1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{-(-x_1)}}\right) = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{1}{16} \overset{x_1>0}{\Leftrightarrow} x_1 = \frac{1}{4}$. Είναι $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$, οπότε τα ζητούμενα σημεία είναι τα $K\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ και $\Lambda\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Όμοια αν $x_1 < 0$.

Γ4. Η ευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB} = \frac{0-\sqrt{\alpha}}{-\alpha-\alpha} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha}$.
Επειδή η ευθεία ΑΒ και η C_f έχουν κοινό σημείο το Β, για να εφάπτεται η ΑΒ της C_f στο Β πρέπει $f'(\alpha) = \lambda_{AB}$. Είναι $f'(\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\left(\sqrt{\alpha}\right)^2} = \frac{\sqrt{\alpha}}{2\alpha} = \lambda_{AB}$.

Γ5. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τη γραφική παράσταση της $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ και από τη συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y.



Για τα κοινά σημεία της $y = \lambda$ με την C_f, έχουμε:
Για x < 0: $f(x) = \lambda \Leftrightarrow \sqrt{-x} = \lambda \Leftrightarrow -x = \lambda^2 \Leftrightarrow x = -\lambda^2$ και για x > 0 είναι $f(x) = \lambda \Leftrightarrow \sqrt{x} = \lambda \Leftrightarrow x = \lambda^2$, άρα $\Gamma(\lambda^2, \lambda)$ και $\Delta(-\lambda^2, \lambda)$.Έστω Ε, Ζ οι προβολές των Γ, Δ στον άξονα x΄x, τότε $\Gamma(\lambda^2, 0)$ και $\Delta(-\lambda^2, 0)$.
Στο σχήμα παρατηρούμε ότι το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = \lambda$ είναι μικρότερο από το ορθογώνιο ΓΔΖΕ, οπότε $E < (\Gamma\Delta ZE) = (ZE)(\Gamma E) = 2\lambda^2\cdot\lambda = 2\lambda^3$

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}+2$, $x>-1$.

Για κάθε $x_1,x_2>-1$ με $x_1<x_2 \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ x_1+1<x_2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ \frac{1}{x_1+1}>\frac{1}{x_2+1} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} e^{x_1}<e^{x_2} \\ -\frac{1}{x_1+1}<-\frac{1}{x_2+1} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} e^{x_1}-\frac{1}{x_1+1}+2<e^{x_2}-\frac{1}{x_2+1}+2 \Rightarrow f'(x_1)<f'(x_2) \Rightarrow f'\nearrow(-1,+\infty)$

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to -1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(e^x-\frac{1}{x+1}+2\right)=-\infty$ άρα πολύ κοντά στο -1 υπάρχει αριθμός $\gamma\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right): f(\gamma)<0$ και επίσης ισχύει $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}>0$ άρα έχουμε $f(\gamma)f\left(-\frac{1}{2}\right)<0$ και επειδή η f' είναι συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(0,-\frac{1}{2}\right): f'(x_0)=0$. Επειδή f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, το x_0 είναι μοναδικό.

Δ2. Επειδή $f(0)=0$ η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η εφαπτομένη της C_f στο $O(0,0)$ είναι η ευθεία ε: $y=f'(0)x \Leftrightarrow y=2x$. Για να εφάπτεται η (ε) στη C_h, αρχικά πρέπει να υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h'(x_1)=2$.
Είναι $h'(x)=e^{x-1}+1$. Παρατηρούμε ότι $h'(1)=2$. Η εφαπτομένη της C_h στο $x=1$ έχει εξίσωση $y-h(1)=h'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2=2x-2 \Leftrightarrow y=2x$, δηλαδή είναι η (ε).

Δ3. Αρκεί να υπάρχουν $x_1,x_2>x_0$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)f'(x_2)=-1$.
Για $x>x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(x_0)=0$ άρα $f'(x_1)f'(x_2)>0$ και δεν υπάρχουν τέτοια σημεία.

Δ4. Είναι $M(x(t),y(t))\equiv M(x(t),f(x(t)))\equiv M\left(x(t),e^{x(t)}-\ln(x(t)+1)+2x(t)-1\right)$ και $x'(t)=1$

Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{e^{x(t)}-\ln(x(t)+1)+2x(t)-1}{x(t)}=\frac{f(x(t))}{x(t)}$ και

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(\frac{f(x(t))}{x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=\frac{f'(x(t))x'(t)x(t)-f(x(t))x'(t)}{x^2(t)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}=\frac{f'(x(t))x(t)-f(x(t))}{x^2(t)} \quad (A)$$

Είναι $d(t)=(OM)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta(t)=\frac{x(t)}{d(t)}$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το Μ διέρχεται από το $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι $x\left(t_0\right)=x_0$ και $y\left(t_0\right)=f\left(x_0\right)$.

$d\left(t_0\right)=(OM)=\sqrt{x^2\left(t_0\right)+y^2\left(t_0\right)}=\sqrt{x_0{}^2+f^2\left(x_0\right)}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta\left(t_0\right)=\dfrac{x\left(t_0\right)}{d\left(t_0\right)}=\dfrac{x_0}{\sqrt{x_0{}^2+f^2\left(x_0\right)}}$ άρα

$\sigma\upsilon\nu^2\theta\left(t_0\right)=\dfrac{x_0{}^2}{x_0{}^2+f^2\left(x_0\right)}$

Επομένως η (Α) γίνεται: $\dfrac{\theta'\left(t_0\right)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta\left(t_0\right)}=\dfrac{f'\left(x\left(t_0\right)\right)x\left(t_0\right)-f\left(x\left(t_0\right)\right)}{x^2\left(t_0\right)} \Leftrightarrow$

$\theta'\left(t_0\right)=\dfrac{\cancel{x_0^2}}{x_0{}^2+f^2\left(x_0\right)}\cdot\dfrac{-f\left(x_0\right)}{\cancel{x_0^2}} \Leftrightarrow \theta'\left(t_0\right)=-\dfrac{f\left(x_0\right)}{x_0{}^2+f^2\left(x_0\right)}$ γιατί $f'\left(x_0\right)=0$