5η Άσκηση

2020-2021

Αντίστροφη συνάρτηση

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^4(x)+f^2(x)-xf(x)-2=0$ για κάθε $x\geq 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Έστω ότι η f έχει σύνολο τιμών το $[1,+\infty)$.

γ) Να βρείτε την f^{-1}.

δ) Να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη μονοτονία.

ε) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{x^2+x-2}{x+1}\right)=x+1$

ζ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3+x+f(x-1)=\frac{2}{x}+1$

η) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>f(x)$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Έστω ότι υπάρχει $\rho\in[0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$, τότε η δοθείσα σχέση για x = ρ γίνεται:

$\cancel{f^4(\rho)}^{0}+\cancel{f^2(\rho)}^{0}-\rho\,\cancel{f(\rho)}^{0}-2=0\Leftrightarrow -2=0$ αδύνατο, άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

β) $f^4(x)+f^2(x)-xf(x)-2=0\Leftrightarrow f^4(x)+f^2(x)-2=xf(x)\Leftrightarrow x=f^3(x)+f(x)-\dfrac{2}{f(x)}$ (1)

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ (2), είναι: $f^3(x_1)=f^3(x_2)$ (3),

$\dfrac{1}{f(x_1)}=\dfrac{1}{f(x_2)}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{f(x_1)}=-\dfrac{2}{f(x_2)}$ (4)

Από $(2)+(3)+(4)\Rightarrow f(x_1)+f^3(x_1)-\dfrac{2}{f(x_1)}=f(x_2)+f^3(x_2)-\dfrac{2}{f(x_2)}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

γ) Θέτουμε $f(x)=y$ και η (1) γίνεται: $x=y^3+y-\dfrac{2}{y}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=y^3+y-\dfrac{2}{y},\ y\geq 1$, οπότε

$f^{-1}(x)=x^3+x-\dfrac{2}{x},\ x\geq 1$

δ) Για κάθε $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ (5), έχουμε: $x_1^3<x_2^3$ (6), $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{x_1}<-\dfrac{2}{x_2}$ (7)

Από $(5)+(6)+(7)\Rightarrow x_1^3+x_1-\dfrac{2}{x_1}<x_2^3+x_2-\dfrac{2}{x_2}\Leftrightarrow f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)\Leftrightarrow f^{-1}\nearrow[1,+\infty)$

ε) 1ος τρόπος

Έστω ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)\geq f(x_2)$ (8), τότε $f^3(x_1)\geq f^3(x_2)$ (9),

$\dfrac{1}{f(x_1)}\leq\dfrac{1}{f(x_2)}\Leftrightarrow -\dfrac{2}{f(x_1)}\geq -\dfrac{2}{f(x_2)}$ (10)

Από $(8)+(9)+(10)\Rightarrow f(x_1)+f^3(x_1)-\dfrac{2}{f(x_1)}\geq f(x_2)+f^3(x_2)-\dfrac{2}{f(x_2)}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x_1\geq x_2$ που είναι άτοπο.

Άρα για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος (μέσω της αντίστροφης)

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $f^{-1}(f(x_1))<f^{-1}(f(x_2))\overset{f^{-1}\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)$

στ) πρέπει $\dfrac{x^2+x-2}{x+1}\in A_f\Leftrightarrow\dfrac{x^2+x-2}{x+1}\geq 0\Leftrightarrow$

$\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1}\geq 0\Leftrightarrow$

$(x+2)(x-1)(x+1)\geq 0$ και $x\neq -1\Leftrightarrow$

$x\in[-2,-1)\cup[1,+\infty)$

x	$-\infty$ $\quad -2$	-1	1	$+\infty$
$x+2$	- ●	+	+	+
$x-1$	-	- ○	+	+
$x+1$	-	-	- ●	+
γινόμενο	- ●	+ ○	- ●	+

και $(x+1)\in f(A)\Leftrightarrow x+1\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$, άρα με συναλήθευση $x\geq 1$.

$f\left(\dfrac{x^2+x-2}{x+1}\right)=x+1\Leftrightarrow f^{-1}(x+1)=\dfrac{x(x+1)-2}{x+1}\Leftrightarrow$

$(x+1)^3+x+1-\cancel{\dfrac{2}{x+1}}=\dfrac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}-\cancel{\dfrac{2}{x+1}}\Leftrightarrow(x+1)^3+\cancel{x}+1=\cancel{x}\Leftrightarrow$

$(x+1)^3=-1 \Leftrightarrow x+1=-1 \Leftrightarrow x=-2$ απορρίπτεται . Η εξίσωση είναι αδύνατη.

ζ) $x^3+x+f(x-1)=\frac{2}{x}+1 \Leftrightarrow x^3+x-\frac{2}{x}+f(x-1)=1 \Leftrightarrow f^{-1}(x)+f(x-1)=1$ (12).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^{-1}(x)+f(x-1)$, $x \geq 1$. Παρατηρούμε ότι

$g(1)=f^{-1}(1)+f(0)=0+1=1$, γιατί $f^{-1}(1)=0 \Leftrightarrow f(0)=1$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $f(x_1)<f(x_2)$, $f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)$ και με πρόσθεση κατά μέλη:

$g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow g \nearrow [1,+\infty) \Rightarrow g$ 1−1

Η (12) γίνεται: $g(x)=g(1) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=1$

η) Αναζητούμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f^{-1} βρίσκεται πάνω από τη C_f.

Όμως οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την y = x, οπότε αρκεί η $C_{f^{-1}}$ να βρίσκεται πάνω από την y = x.

Είναι $f^{-1}(x)>x \Leftrightarrow x^3+\cancel{x}-\frac{2}{x}>\cancel{x} \overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow} x^4-2>0 \Leftrightarrow x^4>2 \Leftrightarrow x>\sqrt[4]{2}$