

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στις συναρτήσεις

2020 – 2021

Θέμα Α

A1. Να αναφέρετε τι ονομάζεται γραφική παράσταση συνάρτησης f .

5 μονάδες

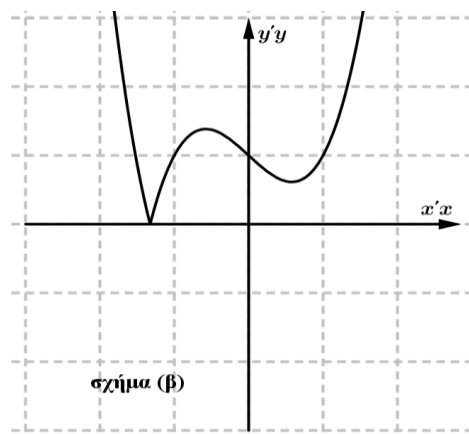
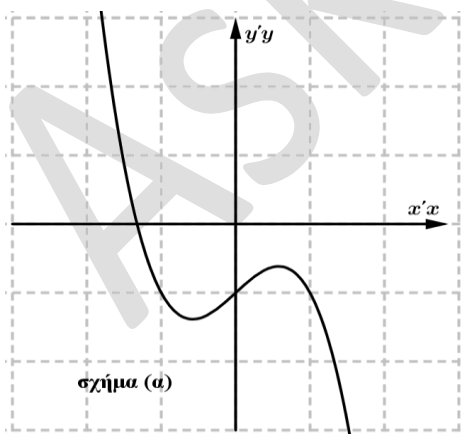
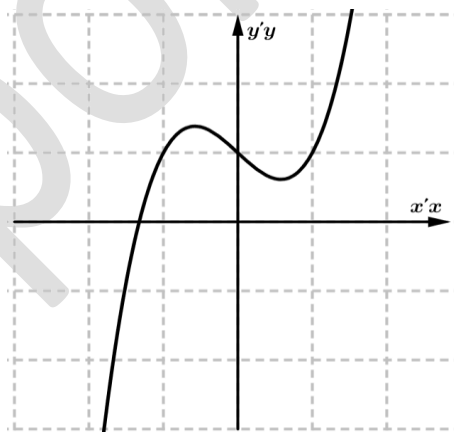
A2. α) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή.

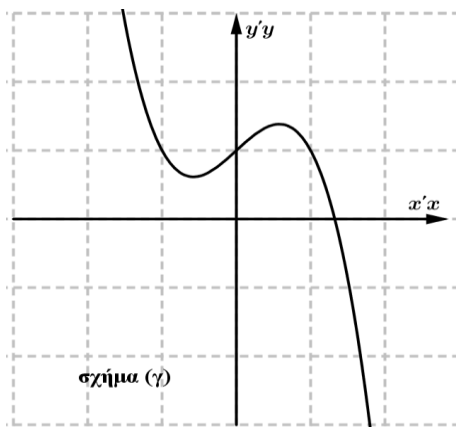
«Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι αντιστρέψιμη με αντίστροφη την f^{-1} , ισχύει ότι οι συναρτήσεις $f^{-1} \circ f$ και $f \circ f^{-1}$ είναι ίσες».

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

2 + 4 μονάδες

A3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f . Σε καθεμία από τις συναρτήσεις f , $|f|$ και $f(-x)$, να αντιστοιχίσετε από τα σχήματα **α)**, **β)**, **γ)** αυτό που αντιπροσωπεύει την γραφική παράστασή της. Να γράψετε στο τετράδιό σας την συνάρτηση και δίπλα το γράμμα του σχήματος.





2 × 3 = 6 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος.

- α)** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.
- β)** Αν μία συνάρτηση είναι 1-1 τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με την ίδια τεταγμένη.
- γ)** Κάθε συνάρτηση η οποία είναι γνησίως μονότονη, έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την αντιστροφή της.
- δ)** Υπάρχει άρτια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι 1-1.

2 × 4 = 8 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x + x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

B1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

5 μονάδες

B2. Να δείξετε ότι η f και η f^{-1} είναι περιττές.

6 μονάδες

B3. Να βρείτε τη ρίζα και το πρόσημο της f .

5 μονάδες

B4. Να υπολογίσετε τα $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\frac{3+\pi}{6}\right)$. Μπορεί η f^{-1} να είναι γνησίως φθίνουσα;

4 μονάδες

B5. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + x) + f(x + 1) \leq f^{-1}(x^2 - 1) + f^{-1}(1 - x^2)$

5 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = [\ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1)]^3$ και $g(x) = x^3$.

Γ1. Να εκφράσετε την συνάρτηση f ως σύνθεση τριών συναρτήσεων, δείχνοντας αναλυτικά ολόκληρη την διαδικασία.

5 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι $f = g$.

5 μονάδες

Γ3. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

4 μονάδες

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = e^{-x} - 1$. Στη συνέχεια κάνοντας κατάλληλο σχήμα να κάνετε τη γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης.

6 μονάδες

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x) + f^{-1}(x) < 2$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Ένα σημείο $M(x, y)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x - 2$. Αν A, B είναι προβολές του σημείου M πάνω στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα τότε:

Δ1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB$ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = |x^2 - 2x|, x \in \mathbb{R}.$$

5 μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = E(x)$, $x \in [0, 1]$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή f^{-1} .

5 μονάδες

Αν τελικά ισχύει $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$, $x \in [0, 1]$.

Δ3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

4 μονάδες

Δ4. Έστω $x \in [0, 2]$.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, όταν το $OAMB$ είναι τετράγωνο.

β) Να βρείτε το σημείο M ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του από τους άξονες να γίνει ελάχιστο.

6 + 5 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Λύσεις

Θέμα Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων

$M(x, f(x)), x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f .

A2. α) Ψευδής

β) Είναι $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x, x \in D_f$ και $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x, x \in f(D_f)$ και δεν ισχύει σε κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ότι $D_f = f(D_f)$ άρα δεν είναι πάντα ίσες.

Για παράδειγμα έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, x \in \mathbb{R}$ με $0 < \alpha \neq 1$ η οποία είναι γνωστό ότι είναι 1-1 αφού είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Άρα αντιστρέφεται και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $y > 0$ έχουμε: $\alpha^x = y \Leftrightarrow x = \log_{\alpha} y$. Άρα θα ισχύει $f^{-1}(y) = \log_{\alpha} y, y > 0$ άρα έχει ως αντίστροφη την συνάρτηση $f^{-1}(x) = \log_{\alpha} x, x > 0$. Συνεπώς έχουμε:

$$-(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \log_{\alpha} \alpha^x = x, x \in \mathbb{R}$$

$$-(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \alpha^{\log_{\alpha} x} = x, x > 0$$

Και επειδή δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού ισχύει $f^{-1} \circ f \neq f \circ f^{-1}$.

(Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 36)

A3. Θυμίζουμε ότι:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα

$x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν. Η γραφική παράσταση της $f(-x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$.

Άρα έχουμε ότι:

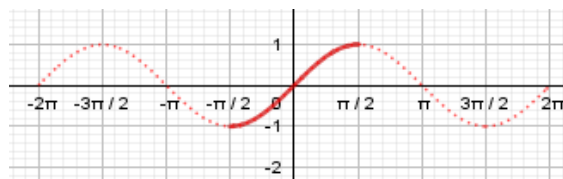
$-f$	$ f $	$f(-x)$
α)	β)	γ)

A4. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος

Θέμα Β

B1. Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $y = \eta \mu x$ είναι

γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ είναι $\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη:

$$\eta\mu x_1 + x_1 < \eta\mu x_2 + x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ οπότε η } f \text{ είναι 1-1 και αντιστρέφεται.}$$

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f .

$$\text{Για κάθε } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1 - \frac{\pi}{2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{B2.} \text{ Για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ και } -x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Είναι $f(-x) = \eta\mu(-x) - x = -\eta\mu x - x = -f(x)$ άρα η f είναι περιττή.

Για την αντίστροφη θα δείξουμε ότι $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$, $y \in f(A)$

Ισχύει επίσης ότι $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Αρχικά βλέπουμε ότι $y \in f(A)$ και $-y \in f(A)$

Είναι $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) \stackrel{f \text{ περιττή}}{=} f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$, άρα και η f^{-1} είναι περιττή.

B3. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$ και επειδή είναι $f \nearrow$ το μηδέν είναι η μοναδική ρίζα.

Για κάθε $-\frac{\pi}{2} \leq x < 0$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$

Για κάθε $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει ότι $f(0) < f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x) > 0$

B4. Είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = f^{-1}(0)$

$$f^{-1}\left(\frac{3+\pi}{6}\right) = f^{-1}\left(\frac{3}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = f^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = f^{-1}\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{6}$$

Αν η f^{-1} ήταν γνησίως φθίνουσα τότε επειδή $0 < \frac{3+\pi}{6}$ θα έπρεπε να ήταν $f^{-1}(0) > f^{-1}\left(\frac{3+\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 0 > \frac{\pi}{6}$ που είναι άτοπο.

$$\mathbf{B5.} \text{ Πρέπει } (x^2 + x) \in A_f \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x^2 + x \leq \frac{\pi}{2} \quad (1), \quad (x+1) \in A_f \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x+1 \leq \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$(x^2 - 1) \in A_{f^{-1}} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - 1 \leq x^2 - 1 \leq \frac{\pi}{2} + 1 \quad (3) \text{ και } (1 - x^2) \in A_{f^{-1}} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - 1 \leq 1 - x^2 \leq \frac{\pi}{2} + 1 \quad (4)$$

Είναι:

$$f(x^2 + x) + f(x+1) \leq f^{-1}(x^2 - 1) + f^{-1}(1 - x^2) \Leftrightarrow f(x^2 + x) + f(x+1) \leq f^{-1}(x^2 - 1) + f^{-1}(-(x^2 - 1)) \stackrel{f^{-1} \text{ περιττή}}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{f^{-1} \text{ περιττή}}{\Leftrightarrow} f(x^2 + x) + f(x+1) \leq \cancel{f^{-1}(x^2 - 1)} - \cancel{f^{-1}(x^2 - 1)} \Leftrightarrow f(x^2 + x) + f(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + x) \leq -f(x+1) \stackrel{f \text{ περιττή}}{\Leftrightarrow} f(x^2 + x) \leq f(-x-1) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 + x \leq -x-1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ δεκτή αφού ικανοποιεί τις (1), (2), (3), (4).}$$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(x) = \left[\ln(e^x + 1) - \ln(e^{-x} + 1) \right]^3 = \left[\ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) \right]^3$.

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^x + 1 > 0$, $\frac{1}{e^x} + 1 > 0$, είναι $A_f = \mathbb{R}$.

Έστω οι συναρτήσεις $h(x) = \ln(x+1) - \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$, $x > 0$ και $\varphi(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $D_{h \circ \varphi} = \{x \in D_\varphi / \varphi(x) \in D_h\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x > 0\} = \mathbb{R}$

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $w(x) = h(\varphi(x)) = \ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $D_{g \circ w} = \{x \in D_w / w(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / w(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$g(w(x)) = g(h(\varphi(x))) = \left[\ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) \right]^3 = f(x)$. Άρα $f = g \circ h \circ \varphi$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R} = D_f = D_g$ είναι

$$f(x) = \left[\ln(e^x + 1) - \ln\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) \right]^3 = \left(\ln \frac{e^x + 1}{\frac{1}{e^x} + 1} \right)^3 = \left(\ln \frac{e^x + 1}{\frac{1 + e^x}{e^x}} \right)^3 = \left(\ln \frac{e^x (e^x + 1)}{e^x + 1} \right)^3 = (\ln e^x)^3 = x^3 = g(x)$$

Γ3. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι η g αντιστρέφεται:

1^{ος} τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow g$ "1-1"

2^{ος} τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$. Άρα η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Είναι $g(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y$.

Αν $y \geq 0$ τότε $x = \sqrt[3]{y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, $y \geq 0$, άρα: $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \geq 0$.

Αν $y < 0$ τότε $x = -\sqrt[3]{-y} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = -\sqrt[3]{-y}$, $y < 0$ και $g^{-1}(x) = -\sqrt[3]{-x}$, $x < 0$.

Άρα $g^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x}, & x < 0 \end{cases}$.

Γ4. $g(x) = e^{-x} - 1 \Leftrightarrow x^3 - e^{-x} + 1 = 0$ (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = x^3 - e^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^3 < x_2^3$ (2),

$$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \Leftrightarrow -e^{-x_1} + 1 < -e^{-x_2} + 1 \text{ (3)}.$$

Από (2) + (3) $\Rightarrow \alpha(x_1) < \alpha(x_2) \Leftrightarrow \alpha \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow \alpha 1-1$

Η (1) γίνεται: $\alpha(x) = \alpha(0) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = 0$

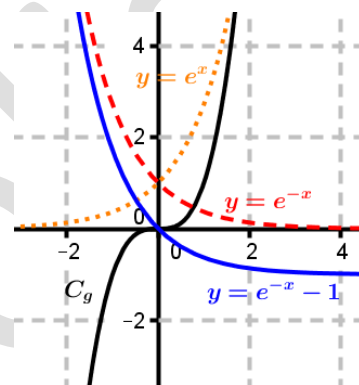
Για το σχήμα θα δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $y = g(x)$

και $y = e^{-x} - 1 = \left(\frac{1}{e}\right)^x - 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με $x = 0$. Η

γραφική παράσταση της $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x - 1$ προκύπτει από κατακόρυφη

μετατόπιση της $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ κατά μια θέση προς τα κάτω. Βλέπουμε ότι οι

γραφικές παραστάσεις των g και $y = e^{-x} - 1$ τέμνονται στην αρχή των αξόνων και είναι μοναδικό κοινό σημείο. Μην ξεχνάμε επίσης, ότι η $y = e^{-x}$, η οποία είναι συμμετρική της $y = e^x$ ως προς τον άξονα $y'y$.



Γ5. Αν $x \geq 0$ τότε $f^3(x) + f^{-1}(x) < 2 \Leftrightarrow x^9 + \sqrt[3]{x} - 2 < 0$ (4)

Έστω $\beta(x) = x^9 + \sqrt[3]{x} - 2, x \geq 0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η β είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η (4) γίνεται $\beta(x) < \beta(1) \Leftrightarrow x < 1$ άρα $x \in [0, 1)$.

Αν $x < 0$ τότε $f^3(x) + f^{-1}(x) < 2 \Leftrightarrow x^9 - \sqrt[3]{-x} - 2 < 0$ και αληθεύει για κάθε $x < 0$ αφού $x^9 < 0$, $-\sqrt[3]{-x} < 0$. Συνολικά $f^3(x) + f^{-1}(x) < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$.

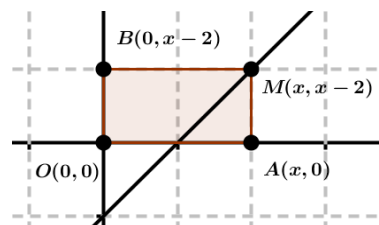
Θέμα Δ

Δ1. Το σημείο $M(x, y)$ είναι σημείο της $y = x - 2$ άρα είναι $M(x, x - 2)$.

Αν $x \geq 2$: Τότε το $y = x - 2 \geq 0$ και το εμβαδόν

του ΟΑΜΒ είναι :

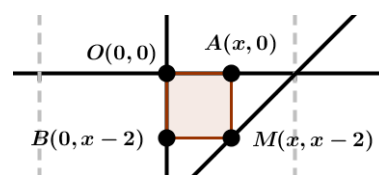
$$E(x) = (AM) \cdot (BM) = (x - 2)x = x^2 - 2x, x \geq 2$$



Αν $0 \leq x < 2$: Τότε το $y = x - 2 < 0$ και το

εμβαδόν του ΟΑΜΒ είναι :

$$E(x) = (AM) \cdot (BM) = |x - 2|x, 0 \leq x < 2$$

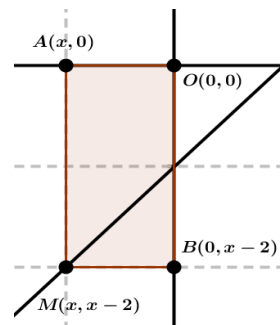


Αν $x < 0$: Τότε το $y = x - 2 < 0$ και το

εμβαδόν του ΟΑΜΒ είναι :

$$E(x) = (AM) \cdot (BM) = |x - 2| |x| = |x^2 - 2x|, x < 0$$

Άρα τελικά $E(x) = |x^2 - 2x|, x \in \mathbb{R}$



$$\Delta 2. f(x) = E(x) = x|x-2| = x(-x+2) = -x^2 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1, x \in [0,1]$$

Θα δείξουμε ότι η f αντιστρέφεται:

1^{ος} τρόπος:

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x_1, x_2 \in [0,1] \text{ με } 0 \leq x_1 < x_2 \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -(x_1 - 1)^2 + 1 < -(x_2 - 1)^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow [0,1] \Rightarrow f \text{ 1-1 άρα αντιστρέφεται.} \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \in [0,1] \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -(x_1 - 1)^2 + 1 = -(x_2 - 1)^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \stackrel{x_1, x_2 \leq 1}{\Rightarrow} -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θα δείξουμε τώρα ότι $f(x) \in [0,1]$:

$$\text{1^{ος} τρόπος: Ισχύει } 0 \leq x \leq 1 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1.$$

$$\text{2^{ος} τρόπος: } (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \text{ και επίσης}$$

$$0 \leq x \Leftrightarrow -1 \leq x-1 \Leftrightarrow 1 \geq (x-1)^2 \Leftrightarrow -1 \leq -(x-1)^2 \Leftrightarrow 0 \leq -(x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq f(x)$$

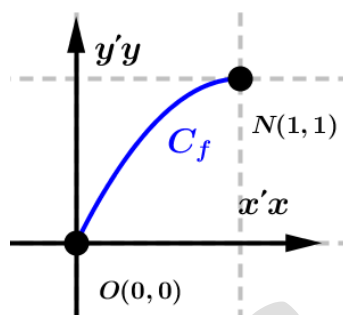
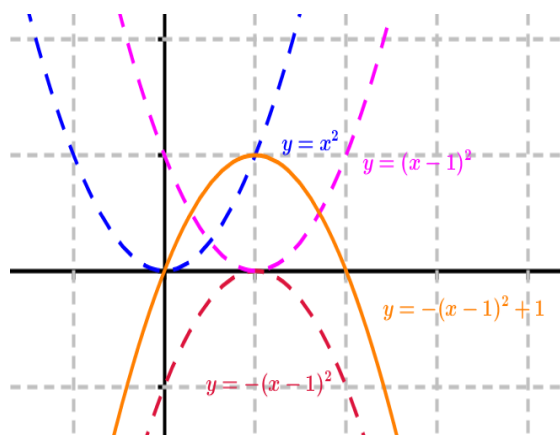
$$\text{Έστω } y = f(x) \stackrel{y \in [0,1]}{\Leftrightarrow} y = -(x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1-y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{1-y} \stackrel{x < 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{x < 1}{\Leftrightarrow} -x+1 = \sqrt{1-y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{1-y}, y \in [0,1]$$

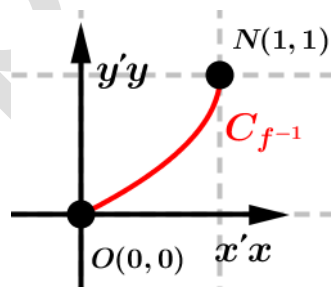
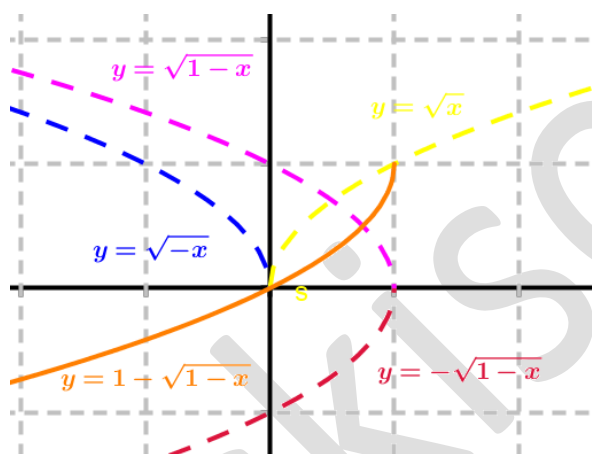
$$\text{Άρα είναι } f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1-y}, y \in [0,1] \text{ και } f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x}, x \in [0,1]$$

Δ3. 1^{ος} τρόπος:

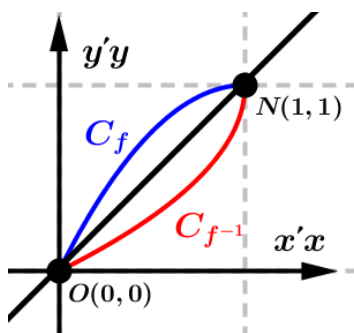
Σχεδιάζουμε την $y_1 = x^2$ και την $y_2 = (x-1)^2$, με την y_2 να προκύπτει από την y_1 με μετατόπιση μία μονάδα προς δεξιά. Στην συνέχεια σχεδιάζουμε την $y_3 = -(x-1)^2$, η οποία είναι συμμετρική της y_2 ως προς τον άξονα x' . Τώρα θα σχεδιάσουμε την $y_4 = -(x-1)^2 + 1$ η οποία είναι η y_3 μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της f είναι η y_4 περιορισμένη στο διάστημα $[0,1]$.



Σχεδιάζουμε την $y_1 = \sqrt{x}$ και την $y_2 = \sqrt{-x}$, με την y_2 να είναι συμμετρική της y_1 ως προς τον άξονα $y'y$. Στην συνέχεια σχεδιάζουμε την $y_3 = \sqrt{1-x}$, η οποία είναι η y_2 μετατοπισμένη κατά μία μονάδα αριστερά. Τώρα θα σχεδιάσουμε την $y_4 = -\sqrt{1-x}$ η οποία είναι συμμετρική της y_3 ως προς τον άξονα $x'x$. Τέλος σχεδιάζουμε την $y_5 = 1 - \sqrt{1-x}$, η οποία είναι η y_4 μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα πάνω. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η y_5 περιορισμένη στο διάστημα $[0,1]$.

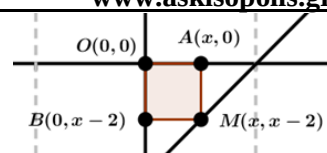


2ος τρόπος: Σχεδιάζουμε ή την γραφική παράσταση της f ή την γραφική παράσταση της f^{-1} . Επειδή οι δύο συναρτήσεις είναι αντίστροφες τότε είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Έτσι σχεδιάζουμε την άλλη συμμετρική ως προς την ευθεία $y = x$.



Δ4. Αν $x \in [0, 2]$ τότε

$$E(x) = |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x = -x^2 + 2x - 1 + 1 = -(x-1)^2 + 1$$



α) Για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2 + 1 \leq 1 \Leftrightarrow E(x) \leq E(1)$, άρα το εμβαδό γίνεται μέγιστο για $x = 1$, τότε $M(1,1)$. και το OAMB είναι τετράγωνο πλευράς 1.

β) Είναι $d(M, y'y) = (OB) = |x| = x$ και $d(M, x'x) = (OA) = |y| = |x-2| = (-x+2)$ Είναι

$$d^2(M, y'y) + d^2(M, x'x) = x^2 + (-x+2)^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x^2 - 2x + 2) = 2[(x-1)^2 + 1]$$

Για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2[(x-1)^2 + 1] \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d^2(M, y'y) + d^2(M, x'x) = x^2 + (-x+2)^2 \geq 2 \text{ με την ισότητα να ισχύει για } x = 1,$$

Άρα το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του M από τους άξονες να γίνει ελάχιστο για $x = 1$, δηλαδή όταν $M(1,1)$.



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων