2021 – 2022

4ο Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στο 1ο κεφάλαιο (Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια)

Θέμα Α

Α1. Να αναφέρετε πότε μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

3 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών και να το αποδείξετε.

7 μονάδες

Α3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με το ίδιο είδος μονοτονίας, αν ορίζεται η $f \circ g$ τότε είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν ένα όριο δεν υπάρχει τότε κατ'ανάγκη δεν είναι καλά ορισμένο.

γ) Το σύνολο τιμών κάθε συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ είναι κλειστό διάστημα.

δ) Κάθε συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

ε) Κάθε συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα x΄x, δεν μπορεί να παίρνει ετερόσημες τιμές.

$2 \times 5 = 10$ μονάδες

Α4. Ένας καθηγητής έβαλε στην τάξη την άσκηση: «Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\eta\mu x} = +\infty$ ».

Ένας μαθητής αφού έλυσε την άσκηση πήρε τον λόγο και είπε πως υπάρχει λάθος στην εκφώνηση. Τότε ο καθηγητής πήγε και είδε το γραπτό του. Ο μαθητής έδινε την παρακάτω λύση:

«Έστω $L = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\eta\mu x}$. Θέτω $\eta\mu x = u$ και όταν $x \to \frac{\pi}{2}$ τότε $u \to 1$. Άρα $L = \lim\limits_{u \to 1} \frac{1}{1-u}$ το οποίο δεν υπάρχει, καθώς $\lim\limits_{u \to 1^-} \frac{1}{1-u} = +\infty$ και $\lim\limits_{u \to 1^+} \frac{1}{1-u} = -\infty$ ».

Να βρείτε το λάθος του μαθητή.

5 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x,\ x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

5 μονάδες

Β2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $e^{x_0}=\alpha-x_0$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

7 μονάδες

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x+2^x}{f(x)-x+3^x}$ **β)** $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)-e^x}-\sqrt{f(x)-e^x}}{x-1}$

7 μονάδες

Β4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $g(x)=f^{-1}(e^x+x)$.

6 μονάδες

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x-x,\ x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,\pi)$. Να κάνετε τη γεωμετρική ερμηνεία της προηγούμενης εξίσωσης.

5 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα.

6 μονάδες

Γ3. Να βρείτε το πρόσημο της f.

4 μονάδες

Γ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

5 μονάδες

Γ5. Να λύσετε στο διάστημα $(0,\pi)$ την εξίσωση $\text{συν}x\left(\text{συν}^2x-3x\text{συν}x+3x^2\right)=x^3-\dfrac{\pi^3}{8}$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{3^\nu\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)+x^\nu\left(2x^3+6x^2+6x+2\right)}{2x^\nu+3^\nu}$$ για κάθε $x\in(0,3)\cup(3,+\infty)$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=(x+1)^3,\ x>0$.

6 μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

6 μονάδες

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x)}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

6 μονάδες

Δ4. Για τις διάφορες τιμές του $\beta\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο $L=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|f(x)-\beta|-|f(x)+\beta|}{x^2}$.

7 μονάδες

Ευχόμαστε κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$.
Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, $x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:
- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Ομοίως αν $f(\alpha)>f(\beta)$.

Α3. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

Α4. Ισχύει $-1\le \eta\mu x\le 1$ άρα $-1\le u\le 1$, επομένως $u\to 1^-$. Άρα $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1-\eta\mu x}=\lim\limits_{u\to 1^-}\dfrac{1}{1-u}=+\infty$.

Θέμα Β

Β1. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε $e^{x_1}<e^{x_2}$ και $e^{x_1}+x_1<e^{x_2}+x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow f\nearrow\mathbb{R}$.

Β2. $e^{x_0}=\alpha-x_0\Leftrightarrow e^{x_0}+x_0=\alpha\Leftrightarrow f(x_0)=\alpha$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+x\right)=+\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\mathbb{R}$.

Επειδή $\alpha\in\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\alpha\Leftrightarrow e^{x_0}=\alpha-x_0$.

Β3. α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x+2^x}{f(x)-x+3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+\cancel{x}-\cancel{x}+2^x}{e^x+\cancel{x}-\cancel{x}+3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^x\right)}{3^x\left(\left(\frac{e}{3}\right)^x+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{e}{3}\right)^x\dfrac{1+\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\left(\frac{e}{3}\right)^x+1}\right]=0$ γιατί

$\dfrac{e}{3},\dfrac{2}{e}\in(0,1)$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e}{3}\right)^x=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e}\right)^x=0$

β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)-e^x}-\sqrt{f(x)-e^x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{\cancel{e^x}+x-\cancel{e^x}}-\sqrt{\cancel{e^x}+x-\cancel{e^x}}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}$

Θέτουμε $\sqrt[6]{x}=u$, τότε $\sqrt[3]{x}=u^2$, $\sqrt{x}=u^3$ και $x=u^6$, οπότε:

1ος τρόπος: Με σχήμα Horner για το u^6-1:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{u\to1}\frac{u^2-u^3}{u^6-1}=\lim_{u\to1}\frac{-u^2\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}\left(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1\right)}=-\frac{1}{6}$$

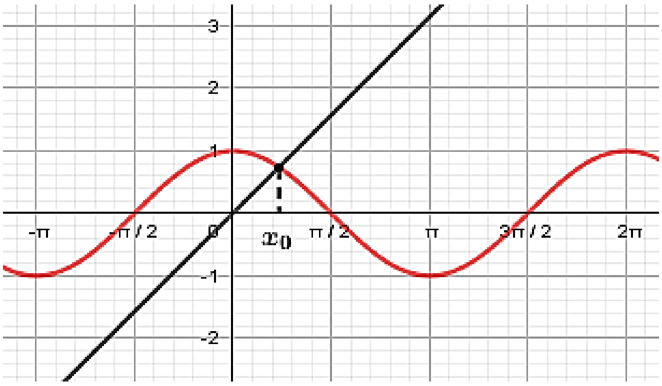
2ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{u^2-u^3}{u^6-1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{-u^2(u-1)}{\left(u^3\right)^2-1}=\lim\limits_{u\to1}\dfrac{-u^2(u-1)}{\left(u^3-1\right)\left(u^3+1\right)}=$

$$=\lim_{u\to1}\frac{-u^2\cancel{(u-1)}}{\cancel{(u-1)}\left(u^2+u+1\right)\left(u^3+1\right)}=-\frac{1}{6}$$

Β4. $f\nearrow\mathbb{R}$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα η αντίστροφη f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Για την συνάρτηση g πρέπει $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ \left(e^x+x\right)\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$ άρα η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=e^x+x\Leftrightarrow f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}\left(e^x+x\right)\Leftrightarrow f^{-1}\left(e^x+x\right)=x\Leftrightarrow g(x)=x$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(0)=1>0$, $f(\pi)=-1-\pi<0$, δηλαδή $f(0)f(\pi)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.
Για κάθε $x_1,x_2\in(0,\pi)$ με $x_1<x_2$ είναι συν$x_1>$συνx_2, $-x_1>-x_2$, οπότε με πρόσθεση κατά μέλη: $f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow[0,\pi]$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα $(0,\pi)$. Είναι $f(x)=0\Leftrightarrow$ συν$x=x$ Αρκεί να δείξουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=$ συνx και $y=x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο στο διάστημα $(0,\pi)$.



Γ2. Για κάθε $x>\pi$ είναι $-1\le συνx\le 1$, $y=x>\pi$ οπότε οι $y=συνx$ και $y=x$ δεν τέμνονται και η εξίσωση $συνx=x\Leftrightarrow f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Για $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$, είναι $y=συνx>0,\ y=x<0$, οπότε οι $y=συνx$ και $y=x$ δεν τέμνονται και η εξίσωση $συνx=x\Leftrightarrow f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Για $x\le-\dfrac{\pi}{2}$ είναι $-1\le συνx\le 1$, $y=x\le-\dfrac{\pi}{2}$ οπότε οι $y=συνx$ και $y=x$ δεν τέμνονται και η εξίσωση $συνx=x\Leftrightarrow f(x)=0$ είναι αδύνατη.

Άρα το $x_0\in(0,\pi)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ3. Για κάθε $0<x<x_0\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και για κάθε $x_0<x<\pi\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x_0)>f(x)\Leftrightarrow f(x)<0$

Στο διάστημα $(-\infty,0]$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\le 0$.

Στο διάστημα $[\pi,+\infty)$ είναι $f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Είναι $f(\pi)=-1-\pi<0$, άρα $f(x)<0$ για κάθε $x\ge\pi$.

Γ4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(συνx-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(\dfrac{συνx}{x}-1\right)\right]=-\infty(0-1)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(συνx-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\dfrac{συνx}{x}-1\right)\right]=+\infty(0-1)=-\infty$ γιατί για $x\neq 0$ είναι

$\left|\dfrac{συνx}{x}\right|=\dfrac{|συνx|}{|x|}\le\dfrac{1}{|x|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{|x|}\le\dfrac{συνx}{x}\le\dfrac{1}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|x|}=0$, οπότε

από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{συνx}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{συνx}{x}=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ και η f είναι συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Γ5. $συνx\left(συν^2x-3xσυνx+3x^2\right)=x^3-\dfrac{\pi^3}{8}\Leftrightarrow συν^3x-3xσυν^2x+3x^2συνx-x^3=-\dfrac{\pi^3}{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(συνx-x)^3=-\dfrac{\pi^3}{8}\Leftrightarrow f^3(x)=\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^3\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\overset{1-1}{\Leftrightarrow}x=\dfrac{\pi}{2}$

Θέμα Δ

Δ1. Για $0<x<3$: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{3^\nu\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)+x^\nu\left(2x^3+6x^2+6x+2\right)}{2x^\nu+3^\nu}=$

$$=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\cancel{3^\nu}\left[x^3+\alpha x^2+3x+1+\left(\frac{x}{3}\right)^\nu\left(2x^3+6x^2+6x+2\right)\right]}{\cancel{3^\nu}\left[2\left(\frac{x}{3}\right)^\nu+1\right]}=x^3+\alpha x^2+3x+1$$

γιατί $0<\dfrac{x}{3}<1$ άρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^\nu=0$

Για $x>3$: $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{3^\nu\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)+x^\nu\left(2x^3+6x^2+6x+2\right)}{2x^\nu+3^\nu}=$

$$=\lim_{\nu\to+\infty}\frac{\cancel{x^\nu}\left[\left(\frac{3}{x}\right)^\nu\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)+2x^3+6x^2+6x+2\right]}{\cancel{x^\nu}\left[2+\left(\frac{3}{x}\right)^\nu\right]}=\frac{2x^3+6x^2+6x+2}{2}=$$

$=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$ γιατί $0<\dfrac{3}{x}<1$ άρα $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}\right)^\nu=0$

Επειδή η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ τότε: $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=f(3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to3^-}\left(x^3+\alpha x^2+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to3^+}(x+1)^3=f(3)\Leftrightarrow 9\alpha+37=64=f(3)\Rightarrow\alpha=3$

Άρα $f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2+3x+1\ ,\ 0<x<3\\ 64\ ,\ x=3\\ (x+1)^3\ ,\ x>3\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=(x+1)^3\ ,\ x>0$

Δ2. Θα δείξουμε αρχικά ότι η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

1ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1+1<x_2+1\Rightarrow(x_1+1)^3<(x_2+1)^3\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f\nearrow(0,+\infty)$ άρα 1-1 .

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow(x_1+1)^3=(x_2+1)^3\Rightarrow x_1+1=x_2+1\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1.

3ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1\neq x_2\Rightarrow x_1+1\neq x_2+1\Rightarrow(x_1+1)^3\neq(x_2+1)^3\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ άρα η f είναι 1-1.

Για την εύρεση της αντίστροφης έχουμε τους εξής τρόπους:

1ος τρόπος: Έστω $f(x)=y \Leftrightarrow (x+1)^3 = y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow} x+1=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}-1$ πρέπει $x>0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y}>1 \Leftrightarrow y>1$ άρα $x=\sqrt[3]{y}-1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}-1$, $y>1$, επομένως $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$, $x>1$

2ος τρόπος: Η f είναι συνεχής και $f \nearrow (0,+\infty)$ άρα $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=(1,+\infty)$.

Για $x>0$ και $y>1$ έστω $f(x)=y \Leftrightarrow (x+1)^3=y \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{y}-1$ πρέπει $x>0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{y}>1 \Leftrightarrow y>1$ ισχύει άρα $x=\sqrt[3]{y}-1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}-1$, $y>1$, επομένως $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}-1$, $x>1$.

Δ3. $\dfrac{f(x)}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0$ και πρέπει $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$

1ος τρόπος: $\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)^3+x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=0 \quad (1)$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=(x-1)(x+1)^3+x(x-2)$, $x>0$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως πολυωνυμική
- $g(0)=-1<0$, $g(2)=27>0$ άρα $g(0)g(2)<0$

Από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.
Παρατηρούμε ότι $g(1)=-1\neq 0$ άρα το 1 δεν είναι ρίζα επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$ διαφορετική του 1, άρα και η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

2ος τρόπος: $\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)^3+x(x-2)}{(x-1)(x-2)}=0 \quad (1)$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=(x-1)(x+1)^3+x(x-2)$, $x>0$

- Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική
- $g(1)=-1<0$, $g(2)=27>0$ άρα $g(1)g(2)<0$

Από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)\subseteq(0,2)$.
Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$ διαφορετική του 1, άρα και η εξίσωση (1) έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

3ος τρόπος: $\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}=0 \quad (1)$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}$, $x\in[0,1)\cup(1,2)$

- Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}\right)=+\infty$ άρα υπάρχει $\kappa>1$, πολύ κοντά στο 1, τέτοιο ώστε $g(\kappa)>0$
- Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{(x+1)^3}{x-2}+\dfrac{x}{x-1}\right)=-\infty$ άρα υπάρχει $\lambda<2$, πολύ κοντά στο 2, τέτοιο ώστε $g(\lambda)<0$
- Η g είναι συνεχής στο $[\kappa,\lambda]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $g(\kappa)g(\lambda)<0$

Από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(\kappa,\lambda)\subseteq(1,2)\subseteq(0,2)$.
Επομένως η εξίσωση $g(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,2)$.

Δ4. $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|f(x)-\beta|-|f(x)+\beta|}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|(x+1)^3-\beta\right|-\left|(x+1)^3+\beta\right|}{x^2}$

β	$-\infty$ $\quad -1$	1	$+\infty$
$1-\beta$	+	+	-
$1+\beta$	-	+	+

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3-\beta\right]=1-\beta$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3+\beta\right]=1+\beta$

- Αν $\beta<-1$: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x+1)^3-\cancel{\beta}+(x+1)^3+\cancel{\beta}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2(x+1)^3}{x^2}=+\infty$
- Αν $\beta=-1$: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|(x+1)^3+1\right|-\left|(x+1)^3-1\right|}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{(x+1)^3}+1-\cancel{(x+1)^3}+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{x^2}=+\infty$

  γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3+1\right]=2>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3-1\right]=0$ και για

  $x>0\Leftrightarrow x+1>1\Leftrightarrow (x+1)^3>1\Leftrightarrow (x+1)^3-1>0$

- Αν $-1<\beta<1$: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{(x+1)^3}-\beta-\cancel{(x+1)^3}-\beta}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2\beta}{x^2}=\begin{cases}+\infty\ , \text{αν } -1<\beta<0\\ -\infty\ . \text{αν } 0<\beta<1\end{cases}$

  Στην περίπτωση που $\beta=0$ τότε $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{(x+1)^3}-\beta-\cancel{(x+1)^3}-\beta}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{0}{x^2}=0$

- Αν $\beta=1$: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left|(x+1)^3-1\right|-\left|(x+1)^3+1\right|}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cancel{(x+1)^3}-1-\cancel{(x+1)^3}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{x^2}=-\infty$

  γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3+1\right]=2>0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x+1)^3-1\right]=0$ και για

  $x>0\Leftrightarrow x+1>1\Leftrightarrow (x+1)^3>1\Leftrightarrow (x+1)^3-1>0$

- Αν $\beta>1$: $L=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-(x+1)^3+\cancel{\beta}-(x+1)^3-\cancel{\beta}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2(x+1)^3}{x^2}=-\infty$