Διαγώνισμα προσομοίωσης χειμερινής περιόδου
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
2020-2021
Συμμετέχουν τα σχολεία:
2ο Περιστερίου - 14ο Περιστερίου - 2ο Πετρούπολης

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Μονάδες 7

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε η συνάρτηση f δεν έχει ολικό μέγιστο.

γ) Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις δεν έχουν κοινά σημεία, τότε θα είναι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f(x)<g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

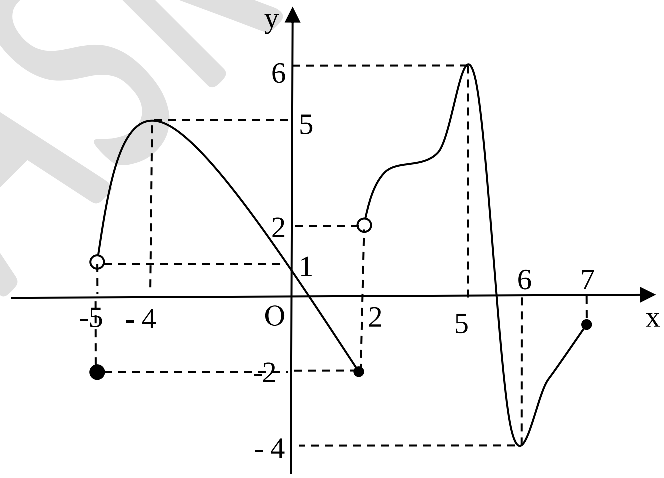
« Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1}\circ f$ και $f\circ f^{-1}$ είναι ίσες ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 1+3

Α4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β) Να γράψετε τα ακρότατα και τις θέσεις ακροτάτων της f.

γ) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω όρια:

$\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=..........$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=..........$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=..........$

δ) Να αναφέρετε ένα διάστημα για στο οποίο ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ε) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών για την f στο διάστημα $[-5,2]$;

Μονάδες 5x2

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(2-\mu)x^3+x^2+3}{\mu x^2-3x+3}$.

Β1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού μ αν γνωρίζουμε ότι πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ να βρείτε τον τύπο της f.

Μονάδες 6

Αν $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}$ **:**

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-3,1)$.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\sigma\upsilon\nu x+3}{|2f(x)-1|}}$.

Μονάδες 5

Β5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2f(x)-1}{\eta\mu\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)}$.

Μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=27x^3+9x^2+6x-4$ και $g(x)=\dfrac{x-1+\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{1-x^3}}$.

Γ1. α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και

β) Να αποδείξετε ότι το $\lim\limits_{x\to1} g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Μονάδες 3+6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0,1).

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $27x^3+9x^2+6x=2\sqrt{6}.\lim\limits_{x\to1} g(x)$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=0$ και ότι έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1).

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\dfrac{3x(9x^2+3)}{3x-1}+3x=\dfrac{4}{3x-1}$ στο διάστημα (0,1).

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f^2(x)-2xf(x)+1=0$ για κάθε $x\in A$, $f(\sqrt{2})=1+\sqrt{2}=f(-\sqrt{2})$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2-1}+x$, $x\in A$.

Μονάδες 6

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln|f(x)|+\eta\mu f(x)\right]$.

Μονάδες 5

Δ3. Έστω $f_1:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f_1(x)=f(x)$, $x\geq 1$, να αποδείξετε ότι η f_1 αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 5

Δ4. α) Να βρείτε ποια μπορεί να είναι η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση h για την οποία ισχύει:
$h^2(x)-2h(x)-3=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

β) Αν $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in(\sqrt{2},3)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)=h(\alpha)$.

Μονάδες 4

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta,\ x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,

αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ

Α3. α) Ψευδής

β) Είναι $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ για κάθε $x\in A$ και $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x\in f(A)$.

Επειδή τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f^{-1}\circ f$ και $f\circ f^{-1}$ δεν είναι πάντα ίσα, είναι $f^{-1}\circ f\neq f\circ f^{-1}$.

Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x)=e^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

– έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

– έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και

– αντιστοιχίζει κάθε $y\in(0,+\infty)$ στο μοναδικό $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $e^x=y$. Επειδή όμως

$$e^x=y\Leftrightarrow x=\ln y$$

θα είναι $f^{-1}(y)=\ln y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\ln x$.

Συνεπώς $f^{-1}\left(f(x)\right)=\ln e^x=x,\ x\in\mathbb{R}$ και $f\left(f^{-1}(x)\right)=e^{\ln x}=x,\ \ x\in(0,+\infty)$

Α4.α) $A_f=[-5,7],\ f(A)=[-4,6]$

β) Ελάχιστο το -4 για $x=6$ και μέγιστο το 6 για $x=5$.

γ) $\lim\limits_{x\to-5^+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to2^-}f(x)=-2,\ \lim\limits_{x\to2^+}f(x)=2$

δ) Στο $[5,7]$ η f είναι συνεχής και $f(5)f(7)<0$.

ε) Επειδή η f δεν είναι συνεχής στο -5, δεν είναι συνεχής στο $[-5,2]$, οπότε δεν ισχύουν.

Θέμα Β

Β1. Αν $\mu=0$ τότε $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2+3}{-3x+3}$, με $-3x+3\neq0\Leftrightarrow x\neq1$, και δεν έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Αν $\mu\neq0$ τότε πρέπει $\mu x^2-3x+3\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το οποίο ισχύει όταν

$$\Delta<0\Leftrightarrow(-3)^2-4\cdot\mu\cdot3<0\Leftrightarrow9-12\mu<0\Leftrightarrow12\mu>9\Leftrightarrow\mu>\frac{9}{12}\Leftrightarrow\mu>\frac{3}{4}\ .$$

Β2. Αν $\mu=0$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+x^2+3}{-3x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{-3}\cdot\dfrac{x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}}=-\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=-\infty$.

Αν $\mu=2$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=\dfrac{1}{2}$ δεκτή.

Αν $\mu\neq 0,\ \mu\neq 2$ **:**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-\mu)x^3+x^2+3}{\mu x^2-3x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\mu}{\mu}\cdot\dfrac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}}=\dfrac{2-\mu}{\mu}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} x=\dfrac{2-\mu}{\mu}\cdot(+\infty)=\pm\infty$ απορρίπτεται.

(Αν $\dfrac{2-\mu}{\mu}>0\Leftrightarrow\mu(2-\mu)>0\Leftrightarrow 0<\mu<2$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Αν $\dfrac{2-\mu}{\mu}<0\Leftrightarrow\mu(2-\mu)<0\Leftrightarrow\mu<0$ ή $\mu>2$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.)

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ για $\mu=2$ και $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}$.

B3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-3x$.

Η g είναι συνεχής στο $[-3,1]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων .

$g(-3)=f(-3)+9=\dfrac{2}{5}+9=\dfrac{47}{5}>0$, $g(1)=f(1)-3=2-3=-1<0$ οπότε $g(-3)\cdot g(1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=3x$ στο διάστημα $(-3,1)$.

ή

$f(x)=3x\Leftrightarrow\dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}=3x\Leftrightarrow x^2+3=6x^3-9x^2+9x\Leftrightarrow 6x^3-10x^2+9x-3=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=6x^3-10x^2+9x-3$.

Η g είναι συνεχής στο $[-3,1]$ σαν πολυωνυμική . $g(-3)=-282<0$, $g(1)=f(1)-3=2>0$ οπότε $g(-3)\cdot g(1)<0$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano επομένως υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα $(-3,1)$.

B4. Έχουμε $f(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{x^2+3}{2x^2-3x+3}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+6=2x^2-3x+3\Leftrightarrow 3x=-3\Leftrightarrow x=-1$ οπότε $f(x)\neq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2f(x)-1\neq 0$ κοντά στο $+\infty$.

Ισχύει $\sigma\upsilon\nu x\geq -1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x+3\geq 2\Leftrightarrow\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+3}{|2f(x)-1|}\geq\dfrac{2}{|2f(x)-1|}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{|2f(x)-1|}=2\cdot(+\infty)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x+3}{2f(x)-1}=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\sigma\upsilon\nu x+3}{|2f(x)-1|}} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{u=\frac{\sigma\upsilon\nu x+3}{|2f(x)-1|}}{=}} \lim_{u\to+\infty} e^u=+\infty .$$

B5. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2f(x)-1}{\eta\mu\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)} \underset{\substack{x\to+\infty,\\ u\to 0}}{\overset{u=f(x)-\frac{1}{2}}{=}} \lim_{u\to0}\frac{2u}{\eta\mu u}=\lim_{u\to0}\frac{2}{\frac{\eta\mu u}{u}}=\frac{2}{1}=2$$

Θέμα Γ

Γ1. α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{x-1+\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{1-x^3}}$ είναι το $(-\infty,1)$ αφού πρέπει

$$\begin{cases} 1-x^3>0 \\ x^2-4x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\leq 1 \text{ ή } x\geq 3 \end{cases}$$ και άρα $Ag=(-\infty,1)$.

β) $$\lim_{x\to 1}\frac{x-1+\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{1-x^3}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1+\sqrt{(x-1)(x-3)}}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1+\sqrt{(1-x)(3-x)}}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x+x^2)}}\overset{*}{=}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(\sqrt{1-x})^2+\sqrt{(1-x)(3-x)}}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x+x^2)}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x}(-\sqrt{1-x}+\sqrt{(3-x)})}{\sqrt{1-x}\sqrt{(1+x+x^2)}}==\lim_{x\to 1}\frac{(-\sqrt{1-x}+\sqrt{(3-x)})}{\sqrt{(1+x+x^2)}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

* $\sqrt{(x-1)(x-3)}=\sqrt{(1-x)(3-x)}=\sqrt{(1-x)}\sqrt{(3-x)}$ αφού για x<1 είναι $(x-1)<0,\ (x-3)<0$

Γ2. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1<x_2$ προκύπτει

- $x_1^3<x_2^3\Rightarrow 27x_1^3<27x_2^3$
- $x_1^2<x_2^2\Rightarrow 9x_1^2<9x_2^2$ αφού x_1,x_2 θετικοί
- $6x_1<6x_2\Rightarrow 6x_1-4<6x_2-4$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1).

Γ3. Όμως $27x^3+9x^2+6x=2\sqrt{6}.\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1+\sqrt{x^2-4x+3}}{\sqrt{1-x^3}}\Leftrightarrow 27x^3+9x^2+6x=2\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow$

$27x^3+9x^2+6x=4\Leftrightarrow 27x^3+9x^2+6x-4=0\Leftrightarrow f(x)=0$ Η f είναι συνεχής στο [0,1] και $f(0)=-4$ ενώ f(1)=38 οπότε $f(0)f(1)<0$ και από το ΘΒ η f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,1) που είναι και μοναδική σε αυτό το διάστημα όπου είναι γνησίως αύξουσα.

Γ4. Για την εξίσωση έχουμε $\dfrac{3x(9x^2+3)}{3x-1}+3x=\dfrac{4}{3x-1}\Leftrightarrow\dfrac{3x(9x^2+3)}{3x-1}+\dfrac{3x(3x-1)}{3x-1}=\dfrac{4}{3x-1}$

$\Leftrightarrow\dfrac{27x^3+9x+9x^2-3x}{3x-1}=\dfrac{4}{3x-1}\Leftrightarrow\dfrac{27x^3+9x^2+6x-4}{3x-1}=0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{3x-1}=0$ Η εξίσωση όμως f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο (0,1) και θα είναι δεκτή (δεν θα απορρίπτεται) αν είναι διάφορη της ρίζας του παρονομαστή δηλαδή αν δεν είναι η $x=\dfrac{1}{3}$ όμως $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=27\dfrac{1}{27}+9\dfrac{1}{9}+6\dfrac{1}{3}-4=1+1+2-4=0$ Άρα η εξίσωση $\dfrac{3x(9x^2+3)}{3x-1}+3x=\dfrac{4}{3x-1}$ είναι αδύνατη άρα δεν έχει ρίζες

ή

Παρατηρούμε $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=27\dfrac{1}{27}+9\dfrac{1}{9}+6\dfrac{1}{3}-4=1+1+2-4=0$ οπότε η ρίζα του ερωτήματος Γ3 είναι η $x_0=\dfrac{1}{3}$.

Για $x\neq\dfrac{1}{3}$ έχουμε: $\dfrac{3x(9x^2+3)}{3x-1}+3x=\dfrac{4}{3x-1}\Leftrightarrow 27x^3+9x+9x^2-3x=4\Leftrightarrow f(x)=0$.

Όμως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=\dfrac{1}{3}$, η οποία απορρίπτεται οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη άρα δεν έχει ρίζες.

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x \in A$ είναι $f^2(x) - 2xf(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow$
$(f(x) - x)^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow |f(x) - x| = \sqrt{x^2 - 1}$ (1)
Έστω $g(x) = f(x) - x,\ x \in A$, τότε η (1) γίνεται: $|g(x)| = \sqrt{x^2 - 1}$ (2)
Αν x_0 ρίζα της g, τότε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow |g(x_0)| = 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \sqrt{x_0^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 1$.
Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ είναι $g(x) \neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$.
Επειδή $g(-\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 1 > 0$, είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$.
Επειδή $g(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) - \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1 > 0$, είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.
Επειδή $g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, η (2) γίνεται: $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, οπότε

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ 0, & x = 1 \text{ ή } x = -1 \end{cases} = \sqrt{x^2 - 1},\ x \in A.$$

Επομένως $f(x) - x = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x,\ x \in A$.

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)}{\sqrt{x^2 - 1} - x} =$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{-x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln|f(x)| \underset{\substack{x \to -\infty \Rightarrow \\ u \to 0^+}}{\overset{|f(x)| = u}{=}} \lim_{u \to 0^+} \ln u = -\infty$$

Α τρόπος $\lim\limits_{x \to -\infty} [\eta\mu f(x)] \underset{\substack{x \to -\infty, \\ h \to 0}}{\overset{h = f(x)}{=}} \lim\limits_{h \to 0} \eta\mu h = 0$

Β τρόπος: Ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την εξίσωση να ισχύει μόνον για $x = 0$.
Για κάθε $x < -1$ είναι $|\eta\mu f(x)| < |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| < \eta\mu f(x) < |f(x)|$.
Επειδή $\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x)| = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} (-|f(x)|)$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to -\infty} \eta\mu f(x) = 0$.
Οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} [\ln|f(x)| + \eta\mu f(x)] = -\infty$

Δ3. Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ (3), είναι
$1 \leq x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1^2 - 1 < x_2^2 - 1 \Rightarrow \sqrt{x_1^2 - 1} < \sqrt{x_2^2 - 1}$ (4)
Από $(3) + (4) \Rightarrow \sqrt{x_1^2 - 1} + x_1 < \sqrt{x_2^2 - 1} + x_2 \Leftrightarrow f_1(x_1) < f_1(x_2) \Leftrightarrow f_1 \nearrow [1, +\infty) \Rightarrow f_1$ 1−1
1ος τρόπος
Είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 1) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$2^{ος}$ τρόπος

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=+\infty$.

Επειδή η f_1 είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=[1,+\infty)$, έχει σύνολο τιμών το

$f(A_1)=\left[f_1(1),\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)\right)=[1,+\infty)$

Για κάθε $x,y\geq 1$ θέτουμε $f_1(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}+x=y \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=y-x$ (5)

Είναι $\sqrt{x^2-1}\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}+x\geq x \Leftrightarrow f_1(x)\geq x \Leftrightarrow y\geq x \Rightarrow y-x\geq 0$, οπότε η (5) γίνεται

$x^2-1=(y-x)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-1=y^2-2xy+\cancel{x^2} \Leftrightarrow 2xy=y^2+1 \overset{xy\geq 1}{\Leftrightarrow} x=\dfrac{y^2+1}{2y}$.

Άρα $f_1^{-1}(y)=\dfrac{y^2+1}{2y}$, $y\geq 1$, οπότε $f_1^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$, $x\geq 1$.

Δ4. α) $1^{ος}$ τρόπος

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h^2(x)-2h(x)-3=0 \Leftrightarrow h^2(x)-h(x)+3h(x)-3=0 \Leftrightarrow$

$\big(h(x)+1\big)\big(h(x)-3\big)=0$ (1)

Θα αποκλείσουμε την περίπτωση της δίκλαδης συνάρτησης.

Έστω ότι υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=-1$ και $x_2\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=3$.

Επειδή η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]$ και $h(x_1)<0<h(x_2)$, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ., υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ή $x_0\in(x_2,x_1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.

Για $x=x_0$ η (1) γίνεται: $\big(h(x_0)+1\big)\big(h(x_0)-3\big)=0 \Leftrightarrow (0+1)(0-3)=0 \Leftrightarrow -3=0$ αδύνατο.

Άρα από την (1) προκύπτει ότι $h(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $h(x)=3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$2^{ος}$ τρόπος

$h^2(x)-2h(x)-3=0 \Leftrightarrow h^2(x)-2h(x)+1=4 \Leftrightarrow \big(h(x)-1\big)^2=4 \Leftrightarrow |h(x)-1|=2$ (2)

Είναι $|h(x)-1|=2>0 \Leftrightarrow h(x)-1\neq 0$ και επειδή η $h(x)-1$ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\big(h(x)-1=2 \Leftrightarrow h(x)=3\big)$ ή $\big(h(x)-1=-2 \Leftrightarrow h(x)=-1\big)$

$3^{ος}$ τρόπος

Έστω $h(x)=\omega$, $\omega\in\mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $h^2(x)-2h(x)-3=0$ γίνεται $\omega^2-2\omega-3=0$, Δ=16, $\omega=-1$ ή $\omega=3$. Άρα $h(x)=-1$ ή $h(x)=3$ (1).

Έστω ότι υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(x_1)=-1$ και $x_2\in\mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $h(x_2)=3$.

Επειδή η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]$ και $h(x_1)<0<h(x_2)$, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ., υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ ή $x_0\in(x_2,x_1)$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.

Για $x=x_0$ η (1) γίνεται: $\big(h(x_0)+1\big)\big(h(x_0)-3\big)=0 \Leftrightarrow (0+1)(0-3)=0 \Leftrightarrow -3=0$ αδύνατο.

Άρα από την (1) προκύπτει ότι $h(x)=-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $h(x)=3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Επειδή $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $h(x)=3$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\alpha\in\left(\sqrt{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)=3$.

1ος τρόπος

Είναι $f\left(\sqrt{2}\right)=1+\sqrt{2}$, $f(3)=\sqrt{3^2-1}+3=2\sqrt{2}+3$ και $f\left(\sqrt{2}\right)<3<f(3)$.

$\left(1+\sqrt{2}<2\sqrt{2}+3\Leftrightarrow\sqrt{2}>-2 \text{ αληθής}\right)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\sqrt{2},3\right]$, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ., υπάρχει $\alpha\in\left(\sqrt{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha)=3$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το α είναι μοναδικό.

2ος τρόπος

Για $\alpha\in\left(\sqrt{2},3\right)$ είναι $f(\alpha)=h(\alpha)$ $\Leftrightarrow$

$$f(\alpha)=3\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2-1}+\alpha=3\Leftrightarrow\sqrt{\alpha^2-1}=3-\alpha\overset{\alpha\in[\sqrt{2},3]}{\Leftrightarrow}\left(\sqrt{\alpha^2-1}\right)^2=(3-\alpha)^2\Leftrightarrow$$

$$\cancel{\alpha^2}-1=9-6\alpha+\cancel{\alpha^2}\Leftrightarrow 6\alpha=10\Leftrightarrow\alpha=\frac{5}{3}.$$

Για να είναι $\alpha\in\left(\sqrt{2},3\right)$, αρκεί $\sqrt{2}\le\frac{5}{3}\le3\Leftrightarrow 2\le\frac{25}{9}\le9\Leftrightarrow18\le25\le81$ ισχύει.