

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας

3 ωρών στις συναρτήσεις

Θέμα Α

A1. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Τι ονομάζεται σύνολο τιμών της f ;

4 μονάδες

A2. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

5 μονάδες

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Όταν λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα μη κενό σύνολο B τότε το B είναι πάντα το πεδίο ορισμού της.

β) Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$.

γ) Οι συναρτήσεις $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ και $g(x) = \sqrt{x^3}$ είναι ίσες.

δ) Για κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η $\sqrt{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Για τις αντίστροφες συναρτήσεις f, f^{-1} ισχύει πάντα $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in A$.

2 × 5 = 10 μονάδες

A4. Ένας καθηγητής έβαλε στην τάξη την παρακάτω άσκηση.

«Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}$ και $g(x) = \sqrt{x+2} - 1$. Να δείξετε ότι $f = g$ »

Ένας μαθητής έδωσε την παρακάτω λύση:

$$\text{Για την } f \text{ πρέπει } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ \sqrt{x+2}+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \sqrt{x+2} \neq -1 \end{cases} \text{ Ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \geq -2$$

άρα $D_f = [-2, +\infty)$.

Για την g πρέπει $x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ άρα $D_g = [-2, +\infty)$.

$$\text{Για κάθε } x \geq -2 \text{ είναι : } f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1} = \frac{(x+1)(\sqrt{x+2}-1)}{(\sqrt{x+2}+1)(\sqrt{x+2}-1)} = \frac{(x+1)(\sqrt{x+2}-1)}{\sqrt{x+2}^2-1} =$$

$$= \frac{(\cancel{x+1})(\sqrt{x+2}-1)}{(\cancel{x+1})} = \sqrt{x+2}-1 = g(x) \text{ άρα } f = g.$$

Η λύση του μαθητή είναι λανθασμένη. Να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή και να προτείνετε άλλον τρόπο λύσης.

6 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha}{x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq 2$, της οποίας η γραφική παράσταση δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -1$.

5 μονάδες

B2. Αν $g(x) = \frac{1}{x-1}$ να εξετάσετε αν $f = g$. Σε περίπτωση που $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f = g$.

5 μονάδες

B3. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η g είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

5 μονάδες

B4. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της g^{-1} .

5 μονάδες

B5. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και g^{-1} .

5 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

4 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της.

6 μονάδες

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) = 1 - x$ και στη συνέχεια, κάνοντας κατάλληλο σχήμα, να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης.

6 + 3 = 9 μονάδες

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x$ είναι αδύνατη.

6 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g(x) = f(|x|)$.

6 μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι η g έχει ακρότατο και να βρείτε την θέση του.

5 μονάδες

Δ3. Να βρείτε την ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f(|x|)$ στο $(-\infty, 0]$.

6 μονάδες

Δ4. Δίνεται και η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι:

- $h(x) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 4})(|x| - x)}$, $x \in \mathbb{R}$ και
- $(h \circ f)(x) = \sqrt{(\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4})(|f(x)| - f(x))}$, για κάθε $x \leq \rho$ με $\rho \leq 0$ η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, τότε:

να δείξετε ότι
$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 + 4} & , x < \rho \\ 0 & , x = \rho \end{cases}.$$

8 μονάδες

Ευχόμαστε κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Λύσεις

Θέμα Α

A1. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$.

A2. Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, δηλαδή την $y = x$.

A3. α) Λάθος β) Λάθος γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος

A4. Παρατηρούμε ότι $\sqrt{x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow x+2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ άρα δεν μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{x+2} - 1$.

Μπορούμε να δώσουμε τις εξής λύσεις:

1^η λύση: Για $x \in [-2, -1) \cup (-1, +\infty)$ εκτελούμε την διαδικασία του μαθητή και παρατηρούμε ότι $f(-1) = 0 = g(-1)$ άρα $f = g$

2^η λύση: Ξεκινάμε από την g και φτάνουμε στην f .

$$g(x) = \sqrt{x+2} - 1 = \frac{(\sqrt{x+2} - 1)(\sqrt{x+2} + 1)}{(\sqrt{x+2} + 1)} = \frac{\sqrt{x+2}^2 - 1}{\sqrt{x+2} + 1} = \frac{x+1}{\sqrt{x+2} + 1} = f(x)$$

Όρος $\sqrt{x+2} + 1 \geq 1 > 0$ και δεν υπάρχει πρόβλημα.

Θέμα Β

B1. Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει $x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2 \neq 0$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$, η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha}{x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha = 0 \text{ και } x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2 \neq 0$$

$$x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha = 0, \Delta = (\alpha - 1)^2 + 4\alpha = \alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 > 0 \text{ αφού } \alpha \neq -1$$

$$x^2 - (\alpha - 1)x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{\alpha - 1 \pm (\alpha + 1)}{2} \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -1$$

Επομένως για να είναι αδύνατη η εξίσωση $f(x) = 0$ πρέπει οι ρίζες του αριθμητή να είναι ρίζες του παρονομαστή για να απορριφθούν από το πεδίο ορισμού της. Άρα έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha^3 - \alpha^3 + \alpha\beta + 2 = 0 \\ -1 - \alpha - \beta + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\beta + 2 = 0 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta^2 - \beta - 2 = 0 \\ \alpha = 1 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 2 \end{cases} \text{ Απορρίπτεται ή } \beta = -1 \text{ Δεκτή}$$

Επομένως για το πεδίο ορισμού της f πρέπει:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \neq 0 \quad \overset{\substack{\text{Σχήμα Homer} \\ \text{με } \rho = -1}}{\Leftrightarrow} (x+1)(x^2 - 3x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$$

$$\mathbf{B2.} \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{\cancel{(x+1)} \cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{x-1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$$

$$\text{Η } g(x) = \frac{1}{x-1} \text{ ορίζεται αν } x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ άρα έχει πεδίο ορισμού το } D_g = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Οι f, g δεν έχουν ίδια πεδία ορισμού επομένως δεν είναι ίσες.

Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$ είναι $f(x) = g(x)$ άρα το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι $f = g$ είναι το $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1, 2\}$.

$$\mathbf{B3.} \quad g(x) = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq 1$$

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 < 1 \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \text{ άρα } g \searrow (-\infty, 1)$$

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 > 1 \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} > \frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \text{ άρα } g \searrow (1, +\infty)$$

$$\text{Για } x_1 < 1 \Leftrightarrow x_1 - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1 - 1} < 0 \Leftrightarrow g(x_1) < 0 \text{ και για } x_2 > 1 \Leftrightarrow x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_2 - 1} > 0 \Leftrightarrow g(x_2) > 0$$

και είναι $g(x_1) < g(x_2)$.

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ με $x_1 < x_2$ δεν είναι πάντα $g(x_1) > g(x_2)$ και επομένως η g δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

$$\mathbf{B4.} \quad \text{Για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\} \text{ με } g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ άρα η } g$$

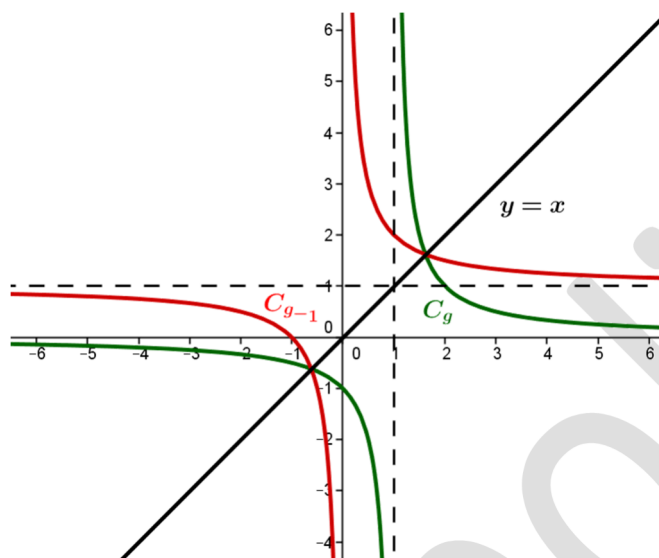
είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$\text{Έστω } g(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y \quad (1)$$

$$\text{Είναι για } x < 1 \Leftrightarrow g(x) < 0 \text{ και για } x > 1 \Leftrightarrow g(x) > 0 \text{ άρα } g(x) \neq 0.$$

$$\text{Άρα για } y \neq 0 \text{ είναι } (1) \Leftrightarrow yx - y = 1 \Leftrightarrow yx = y + 1 \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{y+1}{y} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \frac{y+1}{y}, \quad y \neq 0$$

B5. Η g είναι η καμπύλη $y = \frac{1}{x}$ μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Η αντίστροφη της g είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y=x$.



Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x_1, x_2 > 1$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$\ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow \ln(\ln x_1) < \ln(\ln x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f \nearrow (1, +\infty)$$

Γ2. Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \ln(\ln x) = y \Leftrightarrow \ln x = e^y \Leftrightarrow x = e^{e^y}$, άρα $f^{-1}(y) = e^{e^y}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε

$$f^{-1}(x) = e^{e^x}, x \in \mathbb{R}$$

Γ3. Πρέπει $e^x \in A_f \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

$$f(e^x) = 1 - x \Leftrightarrow \ln(\ln(e^x)) = 1 - x \Leftrightarrow \ln x = 1 - x \Leftrightarrow \ln x + x - 1 = 0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x - 1$, $x > 0$

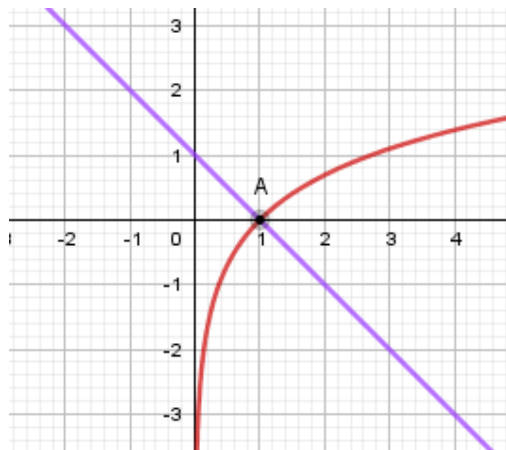
Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ είναι: $\ln x_1 < \ln x_2$, $x_1 - 1 < x_2 - 1$ οπότε και

$$\ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g \nearrow (0, +\infty) \Rightarrow g \text{ 1-1}$$

$$(1) \Leftrightarrow g(x) = g(1) \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x = 1.$$

Γεωμετρικά η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εύρεση της τετμημένης του κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των $y = \ln x$ και $y = 1 - x$.

Επειδή σημείο τομής είναι το $A(1,0)$, έχουμε: $\ln x = 1 - x \Leftrightarrow x = 1$



Γ4. Αρχικά θα ορίσουμε τη συνάρτηση $f \circ f$.

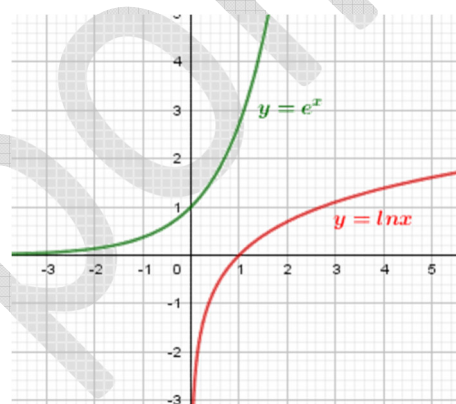
$$A_{f \circ f} = \{x \in A_f / f(x) \in A_f\} = \{x > 1 / \ln(\ln x) > 1\} = \{x > 1 / x > e^e\} = (e^e, +\infty)$$

$$(f \circ f)(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(f(x))) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x) \quad (2)$$

Αρκεί να δείξουμε ότι οι C_f , $C_{f^{-1}}$ δεν έχουν κοινά σημεία.

Λόγω συμμετρίας με την $y = x$, θα βρούμε τη σχετική θέση της C_f με την $y = x$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x > 0$ είναι $e^x > \ln x$, οπότε για $x > 1$ είναι $\ln e^x > \ln(\ln x) \Leftrightarrow f(x) < x$ και λόγω συμμετρίας $f^{-1}(x) > x$, οπότε $f^{-1}(x) > f(x)$ για κάθε $x > 1$, οπότε η (2) είναι αδύνατη.



Θέμα Δ

Δ1. Αρχικά για το πεδίο ορισμού της $g(x) = f(|x|)$ έχουμε $D_g = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ αφού πρόκειται για σύνθεση συναρτήσεων. Αφού η $f \nearrow \mathbb{R}$ τότε για την μονοτονία της $g(x) = f(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \leq 0 \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| > |x_2| \xrightarrow{f \nearrow} f(|x_1|) > f(|x_2|) \Rightarrow g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g \searrow (-\infty, 0]$$

$$\text{Για κάθε } x_1, x_2 \geq 0 \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| < |x_2| \xrightarrow{f \nearrow} f(|x_1|) < f(|x_2|) \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow [0, +\infty)$$

Δ2. 1^{ος} τρόπος: Ισχύει $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f \nearrow \mathbb{R}$ άρα $|x| \geq 0 \Leftrightarrow f(|x|) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Άρα η $f(|x|) = g(x)$ έχει ελάχιστο το $f(0) = g(0)$ για $x = 0$.

2^{ος} τρόπος: Για $x < 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0)$, για $x > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0)$ και για $x = 0$: $g(x) = g(0)$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq g(0)$ με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$. Άρα η g έχει ελάχιστο το $g(0)$ για $x = 0$.

Δ3. Για $x \leq 0$: $f(x) = f(|x|) \Leftrightarrow f(x) - f(|x|) = 0$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = f(x) - f(|x|) = f(x) - g(x)$, $x \leq 0$.

$$\text{Για } x_1, x_2 \leq 0 \text{ με } x_1 < x_2 \xRightarrow{f \nearrow, g \searrow} \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) > g(x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ -g(x_1) < -g(x_2) \end{cases} \Rightarrow k(x_1) < k(x_2) \Rightarrow k \nearrow (-\infty, 0]$$

Ισχύει $k(0) = f(0) - f(|0|) = f(0) - g(0) = 0$ άρα το μηδέν είναι μία ρίζα της εξίσωσης

$k(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(|x|)$ και επειδή η $k \nearrow (-\infty, 0]$ τότε το μηδέν είναι η μοναδική ρίζα στο διάστημα αυτό.

Δ4. Ισχύει ότι $h(x) = \sqrt{(\sqrt{x^2 + 4})(|x| - x)}$, $x \in \mathbb{R}$ άρα έχουμε ότι:

$$h(f(x)) = \sqrt{(\sqrt{f^2(x) + 4})(|f(x)| - f(x))} \Leftrightarrow (h \circ f)(x) = \sqrt{(\sqrt{f^2(x) + 4})(|f(x)| - f(x))} \quad (3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Επίσης έχουμε } (h \circ f)(x) = \sqrt{(\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4})(|f(x)| - f(x))}, \quad x \leq \rho \quad (4)$$

Για $x \leq \rho \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \leq f(\rho) = 0$ άρα $|f(x)| = -f(x)$ για κάθε $x \leq \rho$ και η ισότητα ισχύει για $x = \rho$ και οι σχέσεις (3) και (4) γίνονται:

$$(h \circ f)(x) = \sqrt{-2f(x)\sqrt{f^2(x) + 4}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3) \text{ και } (h \circ f)(x) = \sqrt{-2f(x)\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}, \quad x \leq \rho \quad (4)$$

Άρα από (3) και (4) για $x < \rho$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \sqrt{-2f(x)\sqrt{f^2(x) + 4}} &= \sqrt{-2f(x)\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}} \Leftrightarrow -2f(x)\sqrt{f^2(x) + 4} = -2f(x)\sqrt{x^4 + 4x^2 + 4} \xRightarrow{f(x) < 0} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{f^2(x) + 4} = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 4} \Leftrightarrow f^2(x) + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 \Leftrightarrow f^2(x) = x^4 + 4x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{x^4 + 4x^2} \xRightarrow{f(x) < 0} -f(x) = \sqrt{x^2(x^2 + 4)} \Leftrightarrow f(x) = -\sqrt{x^2}\sqrt{x^2 + 4} \Leftrightarrow f(x) = -|x|\sqrt{x^2 + 4} \quad (5) \end{aligned}$$

Ισχύει $x \leq \rho \leq 0$ άρα τελικά η (5) γίνεται $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$, $x < \rho$ και για $x = \rho : f(x) = 0$ άρα τελικά

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x^2 + 4}, & x < \rho \\ 0, & x = \rho \end{cases}$$