

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας

3 ωρών στα όρια

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

5 μονάδες

A2. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολώνυμο $P(x)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

5 μονάδες

A3. α) Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty, \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0 \text{.} \gg$$

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο α) ερώτημα, δίνοντας μία απόδειξη αν είναι αληθής ή ένα αντιπαράδειγμα αν είναι ψευδής.

2 + 3 = 5 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το όριο κάθε πολωνυμικής συνάρτησης στο $+\infty$ ισούται με $+\infty$.

β) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

ε) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

2 × 5 = 10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$.

B1. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$.

7 μονάδες

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2}{x - 5}$.

5 μονάδες

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| - 3}{|f(x) - 1| - 1}$.

6 μονάδες

B4. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x^2 + x) - \lambda x) = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

7 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ και $\lambda = 1$.

7 μονάδες

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu x - f^2(x)(x+3)}{x^3 + 3x^2 - \eta\mu^2 x}$.

4 μονάδες

Γ3. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}$.

7 μονάδες

Γ4. Να δείξετε ότι το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ δεν είναι πραγματικός αριθμός και ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

7 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x) \leq 5 - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

6 μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

4 μονάδες

Δ3. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

6 μονάδες

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\eta\mu^2 \frac{1}{f(x)} \cdot \sigma\upsilon\nu f(x) \right)$.

4 μονάδες

Δ5. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(3x)}{f(x)} = 27$ να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(27x)}{f(x)} = 27^3$.

5 μονάδες

Ευχόμαστε κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Λύσεις

Θέμα Α

A1. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

A2. Έστω $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \\ &= \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

A3. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$ και $g(x) = -\frac{1}{x^4}$, $x > 0$, τότε είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$$\text{Όμως είναι } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = -\infty.$$

A4. α) Λ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Λ **ε)** Σ

Θέμα Β

$$\begin{aligned} \text{B1. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) \right] = -\infty \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - 1 \right) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = 0 \text{ και } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x > 1, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \Rightarrow \\ u \rightarrow 0^+}} \frac{1}{u} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{B2. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 1 - 4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

B3. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 > 0$, άρα $x+2 > 0$ όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 1 και

$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 1) = -1 < 0$, οπότε $f(x) - 1 < 0$ όταν το x παίρνει τιμές κοντά στο 1. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x+2| - 3}{|f(x) - 1| - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2-3}{-f(x)+1-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{-(\sqrt{x-1})^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{-(x-1)} = 0$$

$$\mathbf{B4.} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x^2 + x) - \lambda x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \lambda x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)} - \lambda x \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \lambda x \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) \right] = \frac{1}{2}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) = 1 - \lambda$, οπότε:

- Αν $1 - \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) \right] = +\infty$ απορρίπτεται

- Αν $1 - \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} - \lambda \right) \right] = -\infty$ απορρίπτεται

$$\text{Αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x^2 + x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 1} - x)(\sqrt{x^2 + x - 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x - 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1 - x^2}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}.$$

Άρα $\lambda = 1$.

Θέμα Γ

$$\mathbf{\Gamma 1.} \text{ Έστω } \frac{f(x)}{x} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = xg(x), \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xg(x)) = 0$$

Για $x = 0$ είναι $f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ ή $f^2(0) + 1 = 0$ αδύνατο.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\text{Για κάθε } x \neq 0 \text{ είναι } \frac{f^3(x)}{x} + \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} (f^2(x) + 1) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{f^2(x) + 1}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f^2(x) + 1} = 1$$

$$\mathbf{\Gamma 2.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\eta\mu x - f^2(x)(x+3)}{x^3 + 3x^2 - \eta\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x)\eta\mu x - x^2g^2(x)(x+3)}{x^3 + 3x^2 - \eta\mu^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)\frac{\eta\mu x}{x} - g^2(x)(x+3)}{x + 3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}} = -1$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 = 1$$

$$\mathbf{\Gamma 3.} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))f(x)}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right] = 1 \cdot 1 = 1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(u)}{u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x-1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \right) = \frac{1}{3} \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 1$$

Γ4. Έστω ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f^3(x) + f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \Leftrightarrow \kappa^3 + \kappa = +\infty$ που είναι αδύνατο, άρα το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ δεν είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{Είναι } f^3(x) + f(x) = x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{f^2(x) + 1}.$$

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f^2(x) + 1 > 0$, για το πρόσημο της f ισχύει ότι:

Για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > 0$ και για κάθε $x < 0$ είναι $f(x) < 0$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+}} \frac{1}{u} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \Rightarrow u \rightarrow 0^-}} \frac{1}{u} = -\infty, \text{ οπότε δεν υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}.$$

Θέμα Δ

Δ1. Όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι $x - 2 > 0$ άρα για x κοντά στο $+\infty$ είναι $(x-2)f(x) \leq 5 - x^2 \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{5-x^2}{x-2}$

1^{ος} τρόπος: Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = -\infty$, οπότε και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$.

2^{ος} τρόπος: Για x κοντά στο $+\infty$ είναι $f(x) \leq \frac{5-x^2}{x-2} < 0$ γιατί $5-x^2 < 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$. Επομένως $0 > \frac{1}{f(x)} \geq \frac{x-2}{5-x^2}$ για x κοντά στο $+\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{5-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Δ2. Αφού η f περιττή τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$

Αν δουλέψουμε με τον 1^ο τρόπο του Δ1 τότε γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Αν δουλέψουμε με τον 2^ο τρόπο του Δ1 τότε ξέρουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $f(x) \leq \frac{5-x^2}{x-2} < 0$ για x

κοντά στο $+\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{u=-x}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} f(-u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} [-f(u)] = -\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u)$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow -\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = +\infty.$$

Δ3. Έστω ότι η f έχει ελάχιστο στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_0) \Leftrightarrow -\infty \geq f(x_0) \text{ άτοπο.}$$

Αν η f έχει μέγιστο στο x_0 τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x_0) \Leftrightarrow +\infty \leq f(x_0) \text{ άτοπο.}$$

Δ4. Έχουμε $\left| \eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \cdot \sigma \upsilon \nu f(x) \right| = \left| \eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \right| |\sigma \upsilon \nu f(x)| \leq \left| \eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \right| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\left| \eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \right| \leq \eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \cdot \sigma \upsilon \nu f(x) \leq \left| \eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \right| \stackrel{\frac{1}{f(x)}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} |\eta \mu^2 u| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (-|\eta \mu^2 f(x)|) \stackrel{\frac{1}{f(x)}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} (-|\eta \mu^2 u|) = 0 \text{ άρα από κριτήριο}$$

παρεμβολής ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\eta \mu^2 \frac{1}{f(x)} \cdot \sigma \upsilon \nu f(x) \right) = 0$

Δ5. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(3x)}{f(x)} = 27$

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(27x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(27x)}{f(9x)} \cdot \frac{f(9x)}{f(3x)} \cdot \frac{f(3x)}{f(x)} \right) = 27 \cdot 27 \cdot 27 = 27^3 \text{ γιατί}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(27x)}{f(9x)} \stackrel{9x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(3u)}{f(u)} = 27 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(9x)}{f(3x)} \stackrel{3x=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(3u)}{f(u)} = 27$$