

1^ο Διαγώνισμα 2021-22

Υλη: Έως Ακρότατα συνάρτησης

Θέμα Α

A1. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

μονάδες 4

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq D_f$, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα και στο σύνολο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο, αυτό θα ισχύει σε μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

A6. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε $f \circ g = g \circ f$ ».

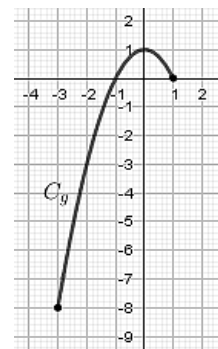
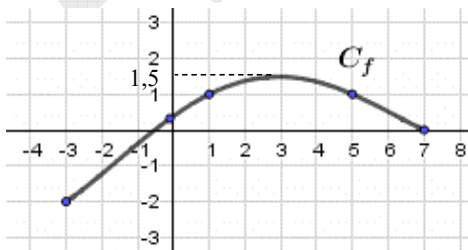
α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Θέμα Β

Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g .



B1. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους.

μονάδες 5

B2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $g \circ f$ και $f \circ g$.

μονάδες 8

B3. Να λύσετε την εξίσωση $f(g(x)) = 1$

μονάδες 6

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

μονάδες 6

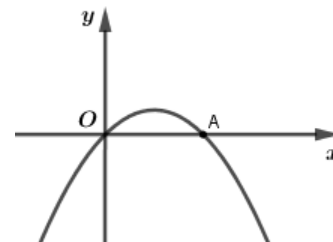
Θέμα Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad a \in \mathbb{R}^*, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = ax^2 + \beta x$, $a < 0$, $\beta > 0$.

μονάδες 5



Έστω ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ έχει με την C_f κοινό σημείο μόνο την αρχή των αξόνων στο οποίο εφάπτονται.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\beta = 1$.

μονάδες 5

$$\text{Έστω ότι } d(A, \varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - x^2$.

μονάδες 5

Γ4. Έστω $M(\kappa, 0)$ σημείο του τμήματος OA . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu\theta = \kappa$, $\theta \in [0, \pi]$ έχει δύο λύσεις.

μονάδες 3

Γ5. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ f(-x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

και στη συνέχεια να αποδείξετε, με βάση το σχήμα, ότι η h είναι άρτια.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1) - 2x$ και $g(x) = 2\ln|1 - e^{-x}|$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f = g$.

μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) - f(-x) = 2x$ για κάθε $x \neq 0$.

μονάδες 4

Δ3. Να λύσετε στο διάστημα $[0, \pi]$ την εξίσωση $2f(\eta\mu^2 x) = 1 + 2f(\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)$.

μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

μονάδες 3

Δ5. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$.

μονάδες 7

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς

Λύσεις

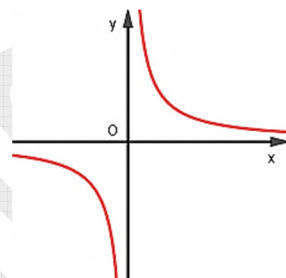
Θέμα Α

A1. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

A2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

A3. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$, όμως δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^*$ αφού για $x_1 < 0 < x_2$ είναι $f(x_1) < 0 < f(x_2)$.



A4. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ παρουσιάζει μέγιστο, το $y = 1$, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi + \pi/2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και ελάχιστο, το $y = -1$, σε καθένα από τα σημεία $2\kappa\pi - \pi/2$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, αφού $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A5. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

Παρατηρούμε ότι $f(x)g(x) = 0$ χωρίς όμως κάποια από τις συναρτήσεις f, g να είναι ίση με το 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A6. α) Ψευδής

β) Έστω $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$ και $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
Είναι φανερό ότι $f \circ g \neq g \circ f$.

Θέμα Β

B1. $D_f = [-3, 7]$, $f(A) = [-2, 1, 5]$, $D_g = [-3, 1]$, $g(A) = [-8, 1]$

B2. $D_{g \circ f} : \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 7 \\ -3 \leq f(x) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 7 \\ -3 \leq x \leq 1 \text{ ή } 5 \leq x \leq 7 \end{cases}, D_{g \circ f} = [-3, 1] \cup [5, 7]$

$D_{f \circ g} : \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -3 \leq g(x) \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}, D_{f \circ g} = [-2, 1]$

B3. $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow (g(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0) \text{ ή } (g(x) = 5 \text{ αδύνατη})$

B4. Αν $k < -2$ ή $k > 1,5$ είναι αδύνατη. Αν $-2 \leq k < 0$ μία λύση, αν $0 \leq k < 1,5$ δύο λύσεις και αν $k = 1,5$ μία λύση.

Θέμα Γ

Γ1. Επειδή η C_f διέρχεται από το O , είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$.

Επειδή η f είναι παραβολή ανοικτή προς τα κάτω, έχει $\alpha < 0$.

Η f τέμνει τον άξονα $x'x$ εκτός του O και στο A το οποίο έχει τετμημένη θετική, άρα

$$f(x_A) = 0 \Leftrightarrow \alpha x_A^2 + \beta x_A = 0 \Leftrightarrow x_A(\alpha x_A + \beta) = 0 \Leftrightarrow x_A = 0 \text{ απορρίπτεται ή } \alpha x_A + \beta = 0 \Leftrightarrow x_A = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$\text{Είναι } x_A > 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{\alpha} > 0 \Leftrightarrow \alpha\beta < 0 \Leftrightarrow \beta > 0.$$

Γ2. Επειδή η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο O , η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

$$\text{Είναι } f(x) = x \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x = x \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x - x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{1-\beta}{\alpha}.$$

Για να έχει η εξίσωση μοναδική λύση την $x = 0$, πρέπει $\frac{1-\beta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 1-\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$.

Γ3. Είναι $\varepsilon: y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

$$d(A, \varepsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|x_A - 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x_A}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x_A = \frac{2}{2} = 1. \text{ Τότε } -\frac{\beta}{\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\beta = -1, \text{ οπότε}$$

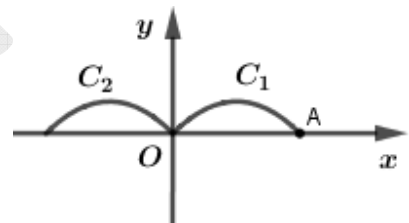
$$f(x) = x - x^2.$$

Γ4. Επειδή το M είναι σημείο του τμήματος OA , είναι $0 \leq \kappa \leq 1$, οπότε υπάρχει $\theta_1 \in [0, \pi]$ τέτοιος, ώστε $\eta\mu\theta_1 = \kappa$

Είναι $\eta\mu\theta = \kappa \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu\theta_1 \Leftrightarrow \theta = \theta_1 \text{ ή } \theta = \pi - \theta_1$, οπότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις.

Γ5. Η γραφική παράσταση της $f(-x)$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$.

Η γραφική παράσταση της h φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Επειδή το συμμετρικό κάθε σημείου του C_1 βρίσκεται στη C_2 και αντιστρόφως, η h έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, οπότε είναι άρτια.



Θέμα Δ

Δ1 Για να ορίζεται η f πρέπει: $(e^{2x} - 2e^x + 1) > 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα

$$D_f = \mathbb{R}^*.$$

Για να ορίζεται η g πρέπει: $|1 - e^{-x}| > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} \neq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \neq 1 \Leftrightarrow -x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, άρα $D_g = \mathbb{R}^* = D_f$.

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1) - 2x = f(x) = \ln(e^x - 1)^2 - \ln e^{2x} = \ln \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}} = \ln \left(\frac{e^x - 1}{e^x} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 2 \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| = 2 \ln \left| \frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right| = 2 \ln |1 - e^{-x}| = g(x)$$

Δ2. Επειδή $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, έχουμε:

$$f(x) - f(-x) = g(x) - g(-x) = 2 \ln |1 - e^{-x}| - 2 \ln |1 - e^x| = 2(\ln |1 - e^{-x}| - \ln |1 - e^x|) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(-x) = 2 \ln \left| \frac{1 - e^{-x}}{1 - e^x} \right| = 2 \ln \left| \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - e^x} \right| = 2 \ln \left| \frac{\frac{e^x - 1}{e^x}}{-(e^x - 1)} \right| = 2 \ln e^x = 2x$$

$$\Delta 3. 2f(\eta\mu^2 x) = 1 + 2f(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \Leftrightarrow 2f(\eta\mu^2 x) = 1 + 2f(-\eta\mu^2 x) \Leftrightarrow 2f(\eta\mu^2 x) - 2f(-\eta\mu^2 x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$f(\eta\mu^2 x) - f(-\eta\mu^2 x) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Πρέπει } \eta\mu^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \eta\mu x \neq 0 \stackrel{x \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x \neq 0 \text{ και } x \neq \pi$$

$$\text{Λόγω του β σκέλους, η (1) γίνεται } 2\eta\mu^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{4} \stackrel{x \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{6} \stackrel{x \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{ή } \left(x = \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\Delta 4. \text{ Έστω } 0 < x_1 < x_2, \text{ τότε: } -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Leftrightarrow 1 - e^{-x_1} < 1 - e^{-x_2} \quad (2)$$

Για $x > 0$ είναι $-x < 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow 0 < 1 - e^{-x}$, οπότε η (2) γίνεται:

$$|1 - e^{-x_1}| < |1 - e^{-x_2}| \Leftrightarrow \ln|1 - e^{-x_1}| < \ln|1 - e^{-x_2}| \Leftrightarrow 2\ln|1 - e^{-x_1}| < 2\ln|1 - e^{-x_2}| \Leftrightarrow$$

$$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow (0, +\infty)$$

$$\Delta 5. \text{ Για να ορίζεται η } f \circ f \text{ πρέπει: } \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2\ln|1 - e^{-x}| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \ln|1 - e^{-x}| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |1 - e^{-x}| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - e^{-x} \neq \pm 1 \end{cases}. \text{ Είναι } 1 - e^{-x} \neq 1 \Leftrightarrow -e^{-x} \neq 0 \text{ ισχύει και } 1 - e^{-x} \neq -1 \Leftrightarrow 2 \neq e^{-x} \Leftrightarrow -x \neq \ln 2 \Leftrightarrow x \neq -\ln 2.$$

$$\text{Άρα } D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{0, -\ln 2\}.$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = g(g(x)) = 2\ln|1 - e^{-2\ln|1 - e^{-x}|}| = 2\ln|1 - e^{\ln|1 - e^{-x}|^2}| = 2\ln|1 - |1 - e^{-x}|^2| = \\ &= 2\ln\left|1 - \left|1 - \frac{1}{e^x}\right|^2\right| = 2\ln\left|1 - \left|\frac{e^x - 1}{e^x}\right|^2\right| = 2\ln\left|1 - \left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)^2\right| = 2\ln\left|\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{e^{2x} - 2e^x + 1} - \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 2e^x + 1}\right| = \\ &= \ln\left|\frac{1 - 2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 1}\right| \end{aligned}$$