

11η Άσκηση

Τριγωνομετρικά όρια

Έστω περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq \eta\mu x - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu x - x$.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x) + 2x}$

γ) Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι $f(g(x)) = g(x) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = -1$

δ) Να βρείτε το πρόσημο της f .

ε) Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{f(x) + 2x - \pi}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)(\eta\mu x + x)}$

στ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|e^{-x} - f(x)|}{f(x) + 2}$

ζ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln|\eta\mu f(x)|}{\ln x}$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Αντικαθιστώντας στη σχέση $f(x) \geq \eta\mu x - x$ (1) όπου x το $-x$, προκύπτει:

$$f(-x) \geq \eta\mu(-x) + x \Leftrightarrow -f(x) \geq -\eta\mu x + x \Leftrightarrow f(x) \leq \eta\mu x - x \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow f(x) = \eta\mu x - x$.

β) i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$ γιατί $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{\eta\mu x = u}{x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 1$

iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{f(x) + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{\eta\mu x - x + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x}{\eta\mu x + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x - x}{x}}{\frac{\eta\mu x + x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{x} - 1}{\frac{\eta\mu x}{x} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$

γ) i. $f(g(x)) = g(x) + x \Leftrightarrow \eta\mu g(x) - g(x) = g(x) + x \Leftrightarrow \eta\mu g(x) = 2g(x) + x \quad (3)$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu g(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow |2g(x) + x| \leq |g(x)|$ και $|2g(x) + x| \geq |2g(x)| - |x|$, άρα

$$2|g(x)| - |x| \leq |2g(x) + x| \leq |g(x)| \Rightarrow 2|g(x)| - |x| \leq |g(x)| \Leftrightarrow |g(x)| \leq |x| \text{ και για } x \neq 0 \text{ είναι}$$

$-|x| \leq g(x) \leq |x|$. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η (3) γίνεται: $\frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} = 2 \frac{g(x)}{g(x)} + \frac{x}{g(x)} \Leftrightarrow \frac{x}{g(x)} = \frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} - 2$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu g(x)}{g(x)} - 2 \right) \stackrel{g(x)=u}{x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu u}{u} - 2 \right) = 1 - 2 = -1$.

Θέτουμε $\frac{x}{g(x)} = a(x) \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{a(x)}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{a(x)} = -1$

δ) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $|\eta\mu x| < |x|$.

Αν $x > 0$ είναι $|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x \Rightarrow \eta\mu x - x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$ και

αν $x < 0$ είναι $|\eta\mu x| < -x \Leftrightarrow x < \eta\mu x < -x \Rightarrow 0 < \eta\mu x - x \Leftrightarrow f(x) > 0$

ε) i. Επειδή για $x > 0$ είναι $f(x) < 0$, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^-} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$.

Επειδή για $x < 0$ είναι $f(x) > 0$, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{x \rightarrow 0^- \Rightarrow u \rightarrow 0^+} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$.

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{f(x) + 2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\eta\mu x - x + 2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\eta\mu x + x - \pi} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\eta\mu(\pi - x) - (\pi - x)} \stackrel{\pi - x = u}{x \rightarrow \pi \Rightarrow u \rightarrow 0} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\eta\mu u - u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{f(u)} \text{ και με βάση το προηγούμενο σκέλος το όριο δεν}$$

υπάρχει

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)(\eta\mu x + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\eta\mu x - x)(\eta\mu x + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta\mu^2 x - x^2}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x - x^2 \leq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta\mu^2 x - x^2} \stackrel{\eta\mu^2 x - x^2 = u}{x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0^-} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$$

$$\text{στ) i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\eta\mu x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{\eta\mu x}{x} - 1 \right) \right] = -\infty(0 - 1) = +\infty \text{ γιατί για } x < 0 \text{ είναι:}$$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{-x} \leq -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq -\frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0, \text{ οπότε από το κριτήριο}$$

$$\text{παρεμβολής είναι και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|e^x - f(x)|}{f(x) + 2}$$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - f(x)) = 0 - \infty = -\infty$, είναι $e^{-x} - f(x) < 0$ κοντά στο $-\infty$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|e^x - f(x)|}{f(x) + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - e^x}{f(x) + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{f(x)} \left(1 - \frac{e^x}{f(x)} \right)}{\cancel{f(x)} \left(1 + \frac{2}{f(x)} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - e^x \frac{1}{f(x)}}{1 + 2 \frac{1}{f(x)}} = \frac{1 - 0 \cdot 0}{1 + 2 \cdot 0} = 1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{x \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{u} = 0$$

$$\zeta) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |\eta\mu f(x)|}{\ln |f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln |\eta\mu f(x)| - \ln |f(x)| + \ln |f(x)|}{\ln |f(x)|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln \left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right|}{\ln |f(x)|} + 1 \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| \frac{1}{\ln |f(x)|} + 1 \right) = 0 \cdot 0 + 1 = 1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^-} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left| \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right| = \ln 1 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln |f(x)|} = 0 \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln |f(x)| \stackrel{|f(x)|=u}{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Askisopolis