1η Άσκηση

2020-2021

Συναρτήσεις

Έστω συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(e^{x}+x\right)+f\left(x+1\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\dfrac{f\left(x\right)}{e^{x}-e}>0$ για κάθε $x\neq 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{-x}-x\right)<0$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)+f\left(x^{3}\right)<f\left(x^{2}\right)+f\left(x^{4}\right)$ για κάθε $x>1$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)+f\left(x^{3}\right)=f\left(x^{2}\right)+f\left(x^{4}\right)$

δ) Αν $0<f\left(x\right)<1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f^{2}\left(x\right)+1}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h\left(x\right)=f\left(x^{6}-4x^{3}+3\right)+3$ έχει ελάχιστο, του οποίου να βρείτε τη θέση.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) $e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1$. Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής του κλάσματος έχει ρίζα το 1 και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του. Για το λόγο αυτό υποψιαζόμαστε ότι το ίδιο θα συμβαίνει με την f. Έτσι θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το $f(1)$.

Η σχέση $f(e^x + x) + f(x+1) = x$ για $x = 0$ γίνεται:

$f(e^0 + 0) + f(0+1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + f(1) = 0 \Leftrightarrow 2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$

Για κάθε $x < 1$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$ και επειδή $e^x - e < 0$, είναι $\dfrac{f(x)}{e^x - e} > 0$.

Για κάθε $x > 1$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$ και επειδή $e^x - e > 0$, είναι $\dfrac{f(x)}{e^x - e} > 0$.

β) $f(e^{-x} - x) < 0 \Leftrightarrow f(e^{-x} - x) < f(1) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} e^{-x} - x < 1 (a)$

Έστω $\varphi(x) = e^{-x} - x,\ x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $-x_1 > -x_2$ (i) και $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ (ii) .

Από $(i)+(ii) \Rightarrow e^{-x_1} - x_1 > e^{-x_2} - x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi \searrow \mathbb{R}$.

Η σχέση (a) γίνεται: $\varphi(x) < \varphi(0) \overset{\varphi\searrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

γ) i. Για κάθε $x > 1$ είναι: $x - x^2 = x(1-x) < 0 \Leftrightarrow x < x^2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x^2)$ (1)

και $x^3 - x^4 = x^3(1-x) < 0 \Leftrightarrow x^3 < x^4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^3) < f(x^4)$ (2)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε: $f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^4)$

ii. Για κάθε $x < 0$ είναι:

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$x - x^2$	–	+	–

$x - x^2 = x(1-x) < 0 \Leftrightarrow x < x^2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x^2)$ (3)

$x^3 - x^4 = x^3(1-x) < 0 \Leftrightarrow x^3 < x^4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^3) < f(x^4)$(4).

x	$-\infty$ 0	1	$+\infty$
$x^3 - x^4$	–	+	–

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) έχουμε:

$f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^4)$.Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι:

$x - x^2 = x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x > x^2 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x^2)$ (5)

$x^3 - x^4 = x^3(1-x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > x^4 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x^3) > f(x^4)$ (6)

Με πρόσθεση κατά μέλη των (5), (6) έχουμε: $f(x) + f(x^3) > f(x^2) + f(x^4)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ είναι $f(x) + f(x^3) \neq f(x^2) + f(x^4)$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) + f(0) = f(0) + f(0)$ ισχύει και για $x = 1$ είναι $f(1) + f(1) = f(1) + f(1)$ ισχύει.

Άρα $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^4) \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$

δ) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ πρέπει να δείξουμε ότι $g(x_1) < g(x_2)$ ή $g(x_1) - g(x_2) < 0$.

Για το λόγο αυτό θα βρούμε το πρόσημο της διαφοράς $g(x_1)-g(x_2)$.

Είναι $g(x_1)-g(x_2)=\dfrac{f(x_1)}{f^2(x_1)+1}-\dfrac{f(x_2)}{f^2(x_2)+1}=\dfrac{f(x_1)f^2(x_2)+f(x_1)-f^2(x_1)f(x_2)-f(x_2)}{\left(f^2(x_1)+1\right)\left(f^2(x_2)+1\right)}\Leftrightarrow$

$g(x_1)-g(x_2)=\dfrac{-f(x_1)f(x_2)\left(f(x_1)-f(x_2)\right)+\left(f(x_1)-f(x_2)\right)}{\left(f^2(x_1)+1\right)\left(f^2(x_2)+1\right)}=\dfrac{\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\left(1-f(x_1)f(x_2)\right)}{\left(f^2(x_1)+1\right)\left(f^2(x_2)+1\right)}$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, είναι $f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<0$ (7)

Επειδή $0<f(x_1)<1,\ 0<f(x_2)<1$ είναι $0<f(x_1)f(x_2)<1\Rightarrow 1-f(x_1)f(x_2)>0$ (8) .

Ακόμη $f^2(x_1)+1>0$ και $f^2(x_2)+1>0$ (9)

Από τις σχέσεις (7),(8), (9), συμπεραίνουμε ότι $g(x_1)-g(x_2)<0\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow\mathbb{R}$

ε) $h(x)=f\left(x^6-4x^3+5\right)+3=f\left(x^6-4x^3+4+1\right)+3=f\left(\left(x^3-2\right)^2+1\right)+3$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(x^3-2\right)^2\geq 0\Leftrightarrow\left(x^3-2\right)^2+1\geq 1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(\left(x^3-2\right)^2+1\right)\geq f(1)\Leftrightarrow f\left(\left(x^3-2\right)^2+1\right)\geq 0\Leftrightarrow$

$f\left(\left(x^3-2\right)^2+1\right)+3\geq 3\Leftrightarrow h(x)\geq 3$ και η ισότητα ισχύει όταν $x^3-2=0\Leftrightarrow x^3=2\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}$.

Δηλαδή $h(x)\geq 3=h\left(\sqrt[3]{2}\right)$, οπότε η h έχει ελάχιστο το 3 για $x=\sqrt[3]{2}$