



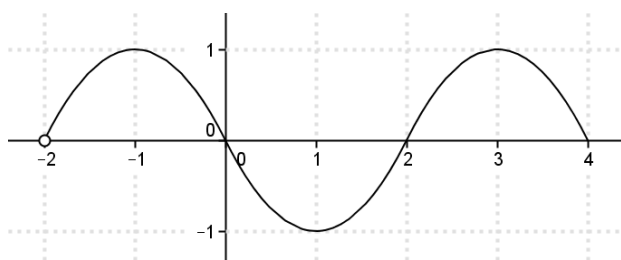
Διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στις συναρτήσεις

Θέμα Α

- A 1.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της $-|f|$.
 - β)** Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f, g σ' ένα διάστημα Δ για τις οποίες ισχύει :
 $f(x)g(x) = 0$.
 - γ)** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) > f(x_2)$.
 - δ)** Αν η ευθεία $x = a, a \in \mathbb{R}$ τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης το πολύ σ' ένα σημείο τότε η συνάρτηση είναι 1-1.
 - ε)** Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $f \circ g$ ορίζεται αν $g(B) \cap A \neq \emptyset$.

μονάδες 5x2

- A2.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- α)** Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- β)** Με βάση το σχήμα, να γράψετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
- γ)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- δ)** Να δείξετε ότι $f(f(-1)) = -f(f(1))$.

μονάδες 3+4+4+4

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1-x) - x$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$.

- B1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

μονάδες 2

- B2.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x) = f \circ g$ και να βρείτε τον τύπο της.

μονάδες 5

- B3.** Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις f και g .

μονάδες 6

- B4.** Αν $g(h(x)) = 2x + 2019, x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο τύπος της h .

μονάδες 6

- B5.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g, -g$ και $|g|$.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x-1) + f(x-1) \leq e^{x-1} \leq \frac{f^3(x) + f(x)}{e}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f^3(x) + f(x) = e^x$.

μονάδες 4

Γ2. Αφού δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$ είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι και η f είναι γνησίως αύξουσα.

μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της.

μονάδες 1+4

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x) + \ln 5) = 2$.

μονάδες 5

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}[2 - f^3(e^{2x})] \leq e^{2x}$.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x - \alpha, & x < \alpha - 2 \\ 3x, & x \geq -\alpha + 2 \end{cases}, \alpha \geq 2, h(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ -x^2 - 3x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 0 \\ 3x, & x \geq 0 \end{cases}$.

μονάδες 4

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (f + h)(x)$. Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και

β) τον τύπο της.

γ) Αφού δείξετε ότι η g αντιστρέφεται να βρείτε τον τύπο της g^{-1} .

μονάδες 1+3+5

Αν $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 0 \\ -x^2 - 2, & x \geq 0 \end{cases}$:

Δ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $m(x) = (g \circ f)(x)$.

μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης k για την οποία ισχύει $k(f(x)) = -x - 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x δεν τέμνει τη γραφική παράσταση της g .

μονάδες 6

Καλή τύχη!

Δημήτρης Πατσιμάς

Λύσεις

Θέμα Α

A1. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

A2.α) $D_f = (-2, 4]$, $f(A) = [-1, 1]$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-2, -1]$, $[1, 3]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1, 1]$, $[3, 4]$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x ή οπότε είναι οι 0, 2, 4.

δ) $f(f(-1)) = f(1) = -1$, $f(f(1)) = f(-1) = 1$ άρα $f(f(-1)) = -f(f(1))$

Θέμα Β

B1. Για να ορίζεται η f πρέπει: $1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, άρα $D_f = (-\infty, 1)$.

Για να ορίζεται η g πρέπει: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, άρα $D_g = [1, +\infty)$.

B2. Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1}^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x < 2 .$$

Επομένως η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού $D_{f \circ g} = [1, 2)$ και τύπο

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(1 - \sqrt{x-1}) - \sqrt{x-1} .$$

B3. Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$. Τότε: $-x_1 > -x_2$ (1) $\Leftrightarrow 1-x_1 > 1-x_2 \Leftrightarrow \ln(1-x_1) > \ln(1-x_2)$ (2)

Από (1)+(2) $\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty, 1)$.

Έστω $x_1, x_2 \in D_g$ με $x_1 < x_2$. Τότε: $x_1 - 1 < x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 1} < \sqrt{x_2 - 1} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$

οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

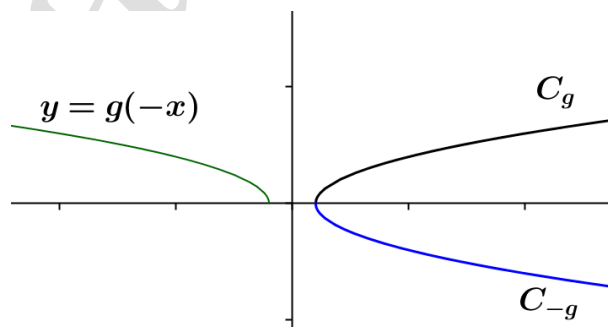
B4. Έχουμε :

$$g(h(x)) = 2x + 2019 \Leftrightarrow \sqrt{h(x) - 1} = 2x + 2019 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{h(x) - 1}^2 = (2x + 2019)^2 \Leftrightarrow h(x) - 1 = (2x + 2019)^2 \Leftrightarrow$$

$$h(x) = (2x + 2019)^2 + 1, x \in \mathbb{R} .$$

B5.



Θέμα Γ

Γ1. Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε: $e^{x-1} \cdot e \leq f^3(x) + f(x) \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) \geq e^x$ (1).

και $f^3(x-1) + f(x-1) \leq e^{x-1}$ (*).

Από την (*) αν θέσουμε όπου x το $x-1$ έχουμε $f^3(x) + f(x) \leq e^x$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε $f^3(x) + f(x) = e^x$.

Γ2. Έστω $x_1, x_2 \in D_g = \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (3) $\Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$ (4).

Με πρόσθεση των σχέσεων (3) και (4) έχουμε $g(x_1) < g(x_2)$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Επίσης από τη σχέση που μας δίνεται

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \stackrel{g'}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Γ3. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $f(x) = y$ οπότε από την αρχική σχέση έχουμε

$y^3 + y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y^3 + y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln(y^3 + y)$ άρα
η αντίστροφη της f έχει τύπο $f^{-1}(x) = \ln(x^3 + x), x > 0$.

Γ4. Έχουμε: $f^{-1}(2) = \ln(2^3 + 2) = \ln 10 \Leftrightarrow f(\ln(10)) = 2$.

$f(f^{-1}(x) + \ln 5) = 2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x) + \ln 5) = f(\ln 10) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x) + \ln 5 = \ln 10 \Leftrightarrow$

$f^{-1}(x) = \ln 10 - \ln 5 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln \frac{10}{5} = \ln 2 \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f^{-1}(2) \Leftrightarrow x = 2$.

Γ5. Έχουμε $f^{-1}[e^2 - f^3(e^{2x})] \leq e^{2x} \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f(f^{-1}[e^2 - f^3(e^{2x})]) \leq f(e^{2x}) \Leftrightarrow$
 $e^2 - f^3(e^{2x}) \leq f(e^{2x}) \Leftrightarrow f^3(e^{2x}) + f(e^{2x}) \geq e^2 \Leftrightarrow e^{e^{2x}} \geq e^2 \Leftrightarrow$
 $\ln e^{e^{2x}} \geq \ln e^2 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{\ln 2}{2}$.

Θέμα Δ

Δ1. Για να είναι η g συνάρτηση πρέπει $\alpha - 2 \leq -\alpha + 2 \Leftrightarrow 2\alpha \leq 4 \Leftrightarrow \alpha \leq 2 \stackrel{\alpha \geq 2}{\Leftrightarrow} \alpha = 2$ άρα

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0 \\ 3x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Δ2. α) $A_g = A_f \cap A_h = \mathbb{R}$.

β) Για $x < 0$ έχουμε

$$g(x) = (f+h)(x) = f(x) + h(x) = x-2 + x^2 - x = x^2 - 2$$

Για $x \geq 0$ έχουμε

$$g(x) = (f+h)(x) = f(x) + h(x) = 3x - x^2 - 3x - 2 = -x^2 - 2.$$

$$\text{Άρα } g(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x < 0 \\ -x^2 - 2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

γ) Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $x^2 - 2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$.

Επίσης η συνάρτηση $-x^2 - 2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Έστω $x_1 < 0 \leq x_2$, τότε $x_1^2 > 0 \Leftrightarrow x_1^2 - 2 > -2 \Leftrightarrow g(x_1) > -2$ και $-x_2^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_2^2 - 2 \leq -2 \Leftrightarrow g(x_2) \leq -2$

Άρα $g(x_2) < g(x_1)$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε $g(x) = y$.

$$\text{Για } x < 0 \text{ έχουμε: } x^2 - 2 = y \Leftrightarrow x^2 = y + 2 \xrightarrow{x < 0} x = -\sqrt{y+2} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = -\sqrt{y+2}$$

οπότε η αντίστροφη της g έχει τύπο

$$g^{-1}(x) = -\sqrt{x+2}, x > -2 \quad (x < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{y+2} < 0 \text{ ισχύει})$$

$$\text{Για } x \geq 0 \text{ έχουμε: } -x^2 - 2 = y \Leftrightarrow x^2 = -y - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{-y-2} \Leftrightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{-y-2}$$

οπότε η αντίστροφη της g έχει τύπο

$$g^{-1}(x) = \sqrt{-x-2}, x \leq -2 \quad (x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{-y-2} \geq 0 \text{ ισχύει})$$

$$\text{Άρα } g^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+2}, & x > -2 \\ \sqrt{-x-2}, & x \leq -2 \end{cases}.$$

$$\Delta 3. \text{ Έχουμε } f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0 \\ 3x, & x \geq 0 \end{cases} \text{ και } A_{g \circ f} = \{x \in A_f / f(x) \in A_g\}.$$

Έχουμε να λύσουμε τα συστήματα των ανισώσεων:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases} \Rightarrow x < 0.$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \end{cases} \text{ αδύνατο.}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases} \text{ αδύνατο.}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Άρα η $g \circ f$ ορίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0), [0, +\infty)$, με τύπους αντίστοιχα

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x-2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 4 - 2 = x^2 - 4x + 2,$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -(3x)^2 = -9x^2 - 2$$

$$\text{Άρα } m(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2, & x < 0 \\ -9x^2 - 2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

$$\Delta 4. \text{ Για } x < 0 \text{ έχουμε } k(f(x)) = k(x-2) = -x-1.$$

Αν θέσουμε $\alpha = x-2 \Leftrightarrow x = \alpha+2$ έχουμε $k(\alpha) = -\alpha-3$ οπότε $k(x) = -x-3$.

Έχουμε $k(x) = g(x) \Leftrightarrow -x-3 = x^2 - 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ αδύνατη αφού $\Delta = -3 < 0$.

Για $x \geq 0$ έχουμε $k(f(x)) = k(3x) = -x-1$.

Αν θέσουμε $\beta = 3x \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{3}$ έχουμε $k(\beta) = -\frac{\beta}{3}-1$ οπότε $k(x) = -\frac{x}{3}-1$.

Έχουμε $k(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{x}{3} - 1 = -x^2 - 2 \Leftrightarrow -x - 3 = -3x^2 - 6 \Leftrightarrow 3x^2 - x + 3 = 0$ αδύνατη αφού $\Delta = -35 < 0$.

