

Συναρτήσεις

1	Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .	
2	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .	
3	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{ x }$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.	
4	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.	
5	Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.	
6	Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.	
7	Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f , για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .	
8	Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.	
9	Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.	
Askisopolis		
10	Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.	
11	Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.	
12	Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.	
13	Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.	
14	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.	
15	Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.	
16	Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .	
17	Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} .	
18	Αν η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$.	
19	Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.	
20	Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.	

21	Αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} .	
22	Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.	
23	Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.	
24	Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι '1-1', τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.	
25	Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.	
Όρια		
26	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.	
27	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$.	
28	Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.	
29	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .	
Askisopolis		
30	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .	
31	Αν οι συναρτήσεις έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.	
32	Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.	
33	Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.	
34	Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.	
35	Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.	
36	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.	
37	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.	
38	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.	
39	Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .	
40	Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .	

41	Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.	
42	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2v+1}} \right) = +\infty$ για κάθε $v \in \mathbb{N}$	
43	Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty)$	
44	Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.	
45	Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$.	
Askisopolis		
46	$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$	
47	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.	
48	Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.	
49	Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.	
50	Ισχύει ότι: $ \eta \mu x \leq x $ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	
51	Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$	
Συνέχεια – Θεωρήματα συνέχειας		
52	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .	
53	Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[a, \beta]$ και συνεχής στο $(a, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[a, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.	
54	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .	
56	Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.	
56	Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.	
57	Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$.	
58	Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.	
59	Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .	
60	Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.	

61	Αν η f είναι συνεχής στο $[α,β]$, τότε η f παίρνει στο $[α,β]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .	
Παράγωγος		
62	Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.	
63	Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .	
64	Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0 .	
65	Αν η f έχει δευτέρα παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .	
66	$(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$.	
67	Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	
68	Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\cos x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.	
69	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{x / \cos x \neq 0\}$.	
70	Αν $f(x) = \ln x $ για κάθε $x \neq 0$, τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.	
Askisopolis		
71	$(\ln x)' = -\frac{1}{x},$ για κάθε $x < 0$	
72	Αν $f(x) = a^x, a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$.	
73	Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.	
74	Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.	
75	Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.	
76	Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [α,β] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(α,β)$, αν $f(α) = f(β)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.	
77	Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[α,β]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.	
78	Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (α, x_0) \cup (x_0, β)$, είναι σταθερή στο $(α, x_0) \cup (x_0, β)$.	

79	Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.	
80	Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .	
81	Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .	
82	Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .	
83	Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .	
84	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .	
Askisopolis		
85	Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και σημείο $x_0 \in [a, b]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.	
86	Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	
87	Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.	
88	Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.	
89	Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .	
90	Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .	
91	Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο της f .	
92	Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .	
93	Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.	
94	Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής.	
95	Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.	

96	Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .	
97	Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .	
Askisopolis		
98	Υπάρχει πολωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.	
99	Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.	

Απαντήσεις

Συναρτήσεις

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ

23	24	25
Λ	Σ	Λ

Όρια

2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4
6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ

48	49	50	51
Λ	Λ	Σ	Σ

Συνέχεια – Θεωρήματα συνέχειας

52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ

Παράγωγος

62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81
Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ

82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ