

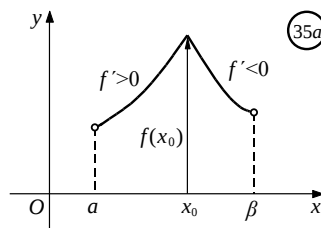
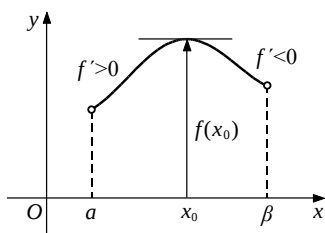
22. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι **συνεχής**.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . (Σχ. 35α)
 ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f . (Σχ. 35β)
 iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) . (Σχ. 35γ).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. (1)

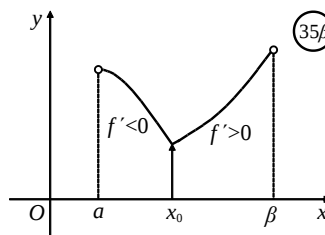
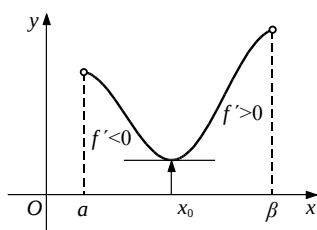
Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)



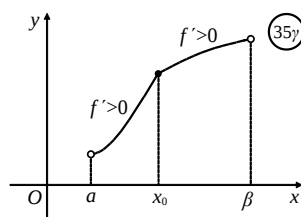
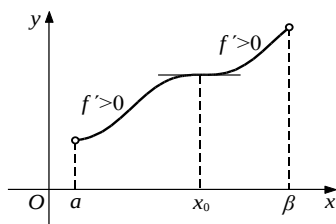
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.



iii) Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. ■