

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

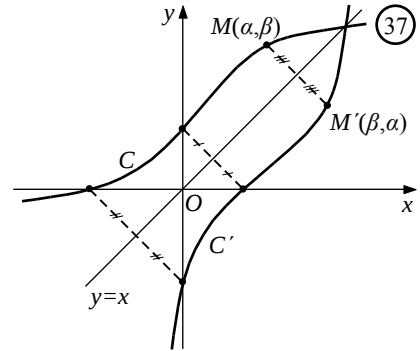
1. Δικαιολογήστε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ δηλαδή τη διχοτόμο των γωνιών xOy και $x'Oy'$.

Ας πάρουμε τώρα μια 1-1 συνάρτηση f και ας θεωρήσουμε τις γραφικές παραστάσεις C και C' των f και της f^{-1} στο ίδιο σύστημα αξόνων (Σχ. 37).

Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$,

αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία, όμως, αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Επομένως:

Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.



2. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

— Έστω τώρα το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0) =$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0).$$

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

3. Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$
 Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

4. Να αποδειχθεί ότι , $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

Πράγματι, για $x \neq 0$ έχουμε $\left| x \eta \mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|$,

Οπότε $-|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x|$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, σύμφωνα με το παραπάνω κριτήριο, έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$.

5. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

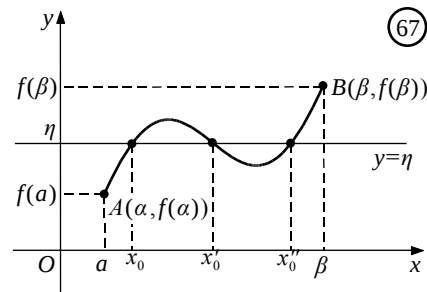
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
- $g(a)g(\beta) < 0$,

Αφού $g(a) = f(a) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$. ■



$x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο,

6. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$,

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 . ■

7. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$ δηλαδή $(c)' = 0$

• Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$. ■

8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$

• Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$. ■

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0\}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$

• Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1},$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$. ■

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

• Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. ■

11. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

$$\text{Για } x \neq x_0, \text{ ισχύει: } \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$\text{Δηλαδή } (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

12. Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ , τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $(f \cdot g \cdot h)'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$.

$$(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h'(x)$$

$$= [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]h(x) + f(x)g(x)h'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu x^{-\nu-1}$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}} \right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}. \quad \blacksquare$$

Είδαμε, όμως, πιο πριν ότι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, για κάθε φυσικό $\nu > 1$. Επομένως, αν $\kappa \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, τότε $(x^{\kappa})' = \kappa x^{\kappa-1}$.

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

• Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε: $(\varepsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} . \quad \blacksquare$$

15. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

Άμεση συνέπεια του κανόνα της αλυσίδας είναι :

• Πράγματι, αν $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} .$$

16. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή

• Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$.

Επομένως, $y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha$.

Άρα $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$

17. Η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

Πράγματι

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$. Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} (-1) = \frac{1}{x} \quad \text{και άρα } (\ln |x|)' = \frac{1}{x} .$$

18. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε
$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$. ■

19. Έστω δύο συναρτήσεις f και g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

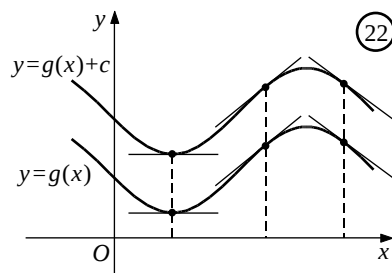
- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $f(x) = g(x) + c$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$. ■



20. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως. ■

21. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$ (Θεώρημα Fermat)

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad \text{Επομένως,}$$

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη. ■

