

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$. Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \qquad x \rightarrow f(x)$$

- Το γράμμα x παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του A και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y , που παριστάνει την τιμή της f στο x , λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.
- Το πεδίο ορισμού A της f συμβολίζεται με D_f .

2. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A .

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων

$M(x, f(x)), x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f .

4. Πως προκύπτει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $-f$, $|f|$ με βοήθεια της γραφικής παράστασης της f ;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f , γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των

$M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

6. Πως ορίζονται οι πράξεις των συναρτήσεων;

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις

συναρτήσεις με τύπους $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$,

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A

και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων

των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

7. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g ;

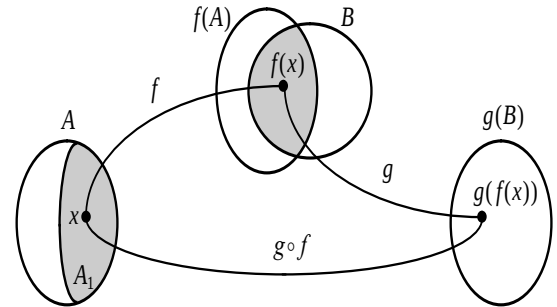
Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.



ΣΧΟΛΙΑ

- Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

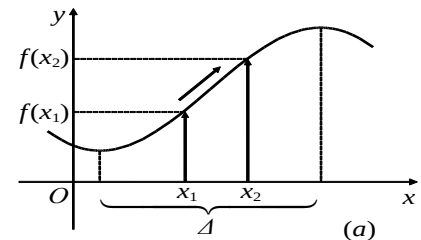
Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$. Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

Askisopolis

8. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα, πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

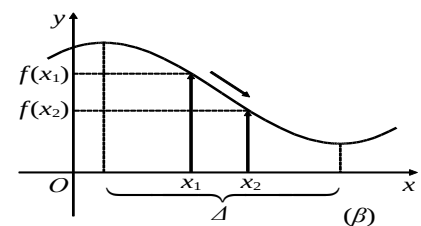
Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)



- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)

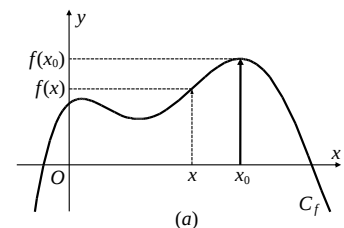
Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ , γράφουμε $f \nearrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \searrow \Delta$). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ .



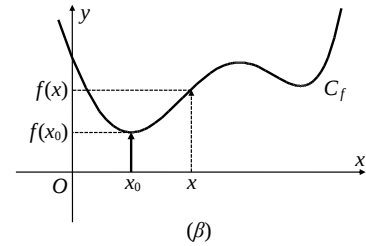
9. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. α)



- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. β)



10. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1; Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι 1-1 μία συνάρτηση;

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

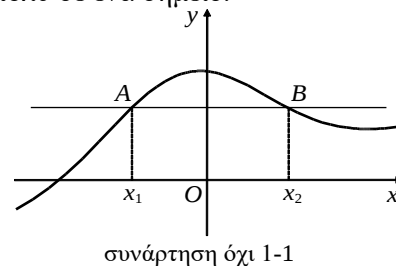
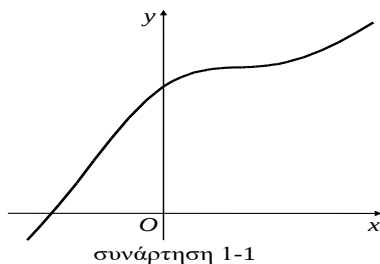
Τα κριτήρια για να είναι μία συνάρτηση 1-1 είναι τα εξής:

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $x_1 = x_2$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν:
 - Για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
 - Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση 1-1.

Askisopolis

11. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f και τι γνωρίζεται για τις γραφικές τους παραστάσεις;

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1-1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

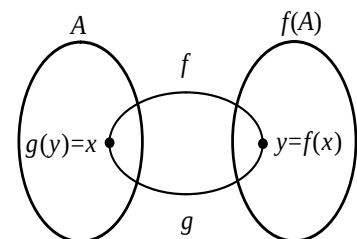
Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f ,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού A της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y , τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f . Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1} . Επομένως έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.



12. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επειδή $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, αν ένα σημείο $M(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$, δηλαδή την $y = x$.

ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

13. Δώστε την έννοια του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ με $\ell \in \mathbb{R}$.

Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 , τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

14. Πότε είναι καλά ορισμένο ένα όριο;

Για να αναζητήσουμε το όριο της f στο x_0 , πρέπει η f να ορίζεται όσο θέλουμε «κοντά στο x_0 », δηλαδή η f να είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ή (α, x_0) ή (x_0, β) .

Askisopolis

15. Δώστε την έννοια των πλευρικών ορίων $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2$ με $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1 , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μικρότερες τιμές ($x < x_0$), τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell_1.$$

- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ_2 , καθώς το x προσεγγίζει με οποιονδήποτε τρόπο τον αριθμό x_0 από μεγαλύτερες τιμές ($x > x_0$), τότε γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell_2.$$

Συνέπειες

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (α, x_0) , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell.$$

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής (x_0, β) , τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} c = c$$

17. Ποια θεωρήματα ισχύουν για το όριο και τη διάταξη;

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

18. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων;

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 .
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^v$, $v \in \mathbb{N}^*$

Askisopolis**19. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.**

Έστω $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_1 x) + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \\ &= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 \lim_{x \rightarrow x_0} x + \alpha_0 = \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_1 x_0 + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

20. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x), Q(x)$, με $Q(x_0) \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

21. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

22. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια στο $x_0 \in \mathbb{R}$;

- $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$)
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

23. Πως ορίζεται το όριο της σύνθεσης $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f, g στο σημείο x_0 ;

Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f \circ g$ στο σημείο x_0 , εργαζόμαστε ως εξής:

- Θέτουμε $u = g(x)$.
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και
- Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x) \neq u_0$ κοντά στο x_0 , τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ , δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u).$$

24. Δώστε την έννοια των ορίων $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (αντίστοιχα όταν $x \rightarrow -\infty$).

- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f προσεγγίζουν όσο θέλουμε έναν πραγματικό αριθμό ℓ , καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα (αντίστοιχα μειώνεται απεριόριστα) με οποιονδήποτε τρόπο, τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$)
- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f αυξάνονται απεριόριστα και γίνονται μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό πραγματικό αριθμό M , καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα (αντίστοιχα μειώνεται απεριόριστα) με οποιονδήποτε τρόπο, τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$)
- Όταν οι τιμές μίας συνάρτησης f ελαττώνονται απεριόριστα και γίνονται μικρότερες από οποιονδήποτε αρνητικό πραγματικό αριθμό $-M$ ($M > 0$), καθώς το x αυξάνεται απεριόριστα (αντίστοιχα μειώνεται απεριόριστα) με οποιονδήποτε τρόπο, τότε γράφουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (αντίστοιχα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$)

25. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μη πεπερασμένου ορίου $x_0 \in \mathbb{R}$;

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , ενώ
αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ
 αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ
 αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.
7. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.
8. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$

Συνέπειες

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2v}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2v+1}} = +\infty, v \in \mathbb{N}^*$, ενώ
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v+1}} = -\infty, v \in \mathbb{N}^*$,

Δηλαδή δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N}^*$,

Askisopolis**26. Ποια είναι τα όρια πολωνυμικής και ρητής συνάρτησης στο ∞ ;**

→ Για την πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_v \neq 0$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha_v x^v) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_v x^v)$$

→ Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_v \neq 0, \beta_\mu \neq 0$, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\mu x^\mu} \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha_v x^v}{\beta_\mu x^\mu} \right)$$

27. Ποια είναι τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;

1. Αν $\alpha > 1$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = +\infty$
2. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_\alpha x = -\infty$

28. Τι ονομάζεται ακολουθία;

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

29. Πότε η ακολουθία (a_n) έχει όριο $\ell \in \mathbb{R}$;

Θα λέμε ότι η ακολουθία (a_n) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

30. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

32. Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

33. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (a, β) ;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) .

34. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a, \beta]$;

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

35. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των f, g είναι συνεχείς στο x_0 ;

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 , τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις: $f + g$, $c \cdot f$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[n]{f}$

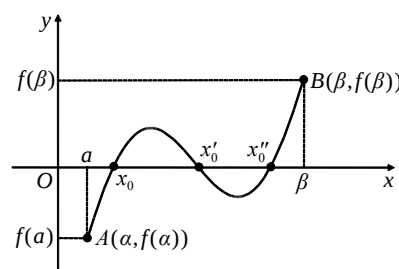
Επιπλέον αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

36. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία.

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(a)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (a, β) .

Γεωμετρική ερμηνεία

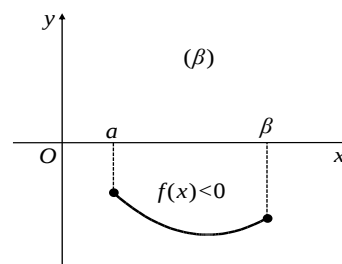
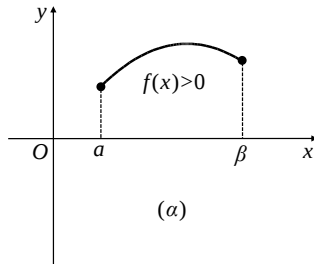
Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(a, f(a))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.



ΣΧΟΛΙΟ

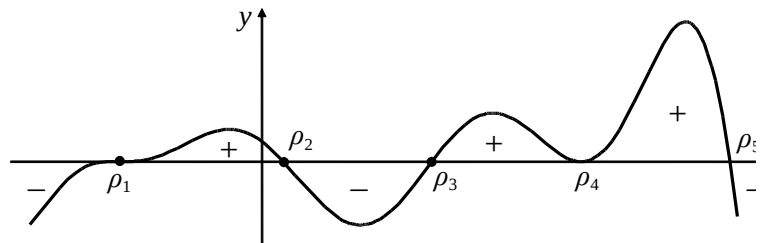
Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

- Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .



- Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του πρόσημου της f για τις διάφορες τιμές του x . Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f .



β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

Askisopolis

37. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, να το αποδείξετε και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

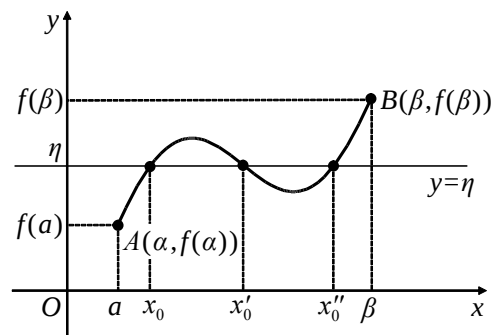
Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y = \eta$ με $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.



38. Τι ισχύει για την εικόνα ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης;

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

39. Να διατυπώσετε για μια συνεχής συνάρτηση το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha, \beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

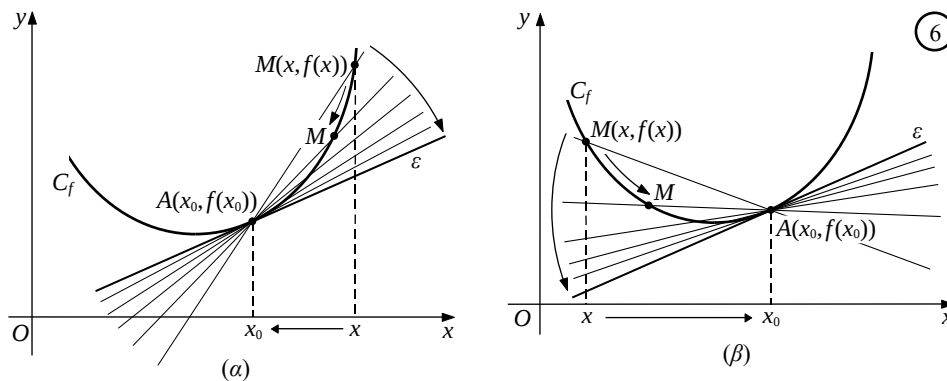
ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

40. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f . Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός λ , τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A , την ευθεία ε που διέρχεται από το A και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ . Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

41. Να δώσετε την γεωμετρική ερμηνεία της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

Έστω f μία συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.



Αν πάρουμε ένα ακόμη σημείο $M(x, f(x))$, $x \neq x_0$, της γραφικής παράστασης της f και την ευθεία AM που ορίζουν τα σημεία A και M , παρατηρούμε ότι:

Καθώς το x τείνει στο x_0 με $x > x_0$, η τέμνουσα AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε (Σχ. 6α). Την ίδια οριακή θέση φαίνεται να παίρνει και όταν το x τείνει στο x_0 με $x < x_0$ (Σχ. 6β). Την οριακή θέση της AM θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A .

Επειδή η κλίση της τέμνουσας AM είναι ίση με $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, είναι λογικό να αναμένουμε ότι η

εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα έχει κλίση το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

42. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0

και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Παρατήρηση

- Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

- Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$ οπότε $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0}$ (Συμβολισμός κατά Leibniz)

43. Πως ορίζεται: α) η συνάρτηση θέσης ενός κινητού, β) η μέση ταχύτητα ενός κινητού, γ) η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και δ) η επιτάχυνση ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;

α) Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ας υποθέσουμε ότι $S = S(t)$ είναι η τετμημένη του σώματος αυτού τη χρονική στιγμή t . Η συνάρτηση S καθορίζει τη θέση του σώματος τη χρονική στιγμή t και ονομάζεται συνάρτηση θέσης του κινητού.

β) Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κάποια χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στη θέση M_0 και ότι μετά από παρέλευση χρόνου h , δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = t_0 + h$, βρίσκεται στη θέση M . Στο χρονικό διάστημα από t_0 έως t η μετατόπιση του κινητού είναι ίση με $S(t) - S(t_0)$. Άρα, η μέση ταχύτητα του κινητού σ' αυτό το χρονικό διάστημα είναι $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{μετατόπιση}}{\text{χρόνος}}$.

γ) Το όριο της μέσης ταχύτητας, καθώς το t τείνει στο t_0 , το ονομάζουμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και τη συμβολίζουμε με $v(t_0)$. Δηλαδή: $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$. Δηλαδή, Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 . Επομένως $v(t_0) = s'(t_0)$.

δ) Η παράγωγος $v'(t_0)$ λέγεται επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 και συμβολίζεται με $a(t_0)$. Είναι δηλαδή $a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$.

Askisopolis

44. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ;

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι $v(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$, οπότε είναι $v(t_0) \leq 0$.

45. Τι ονομάζεται κλίση της f στο x_0 και ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 ;

Κλίση της f στο x_0 ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο x_0 , ονομάζεται το $f'(x_0)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

46. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

47. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A ;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

48. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

49. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και επιπλέον ισχύει $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$.

50. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f ; Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $n \geq 3$;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f .

Η νιοστή παράγωγος της f με $n \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(n)}$ και είναι: $f^{(n)} = [f^{(n-1)}]'$.

51. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή $(c)' = 0$

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0, \text{ δηλαδή } (c)' = 0.$$

52. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή $(x)' = 1$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1. \text{ Επομένως, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1, \text{ δηλαδή } (x)' = 1.$$

53. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$, δηλαδή $(x^v)' = vx^{v-1}$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^v - x_0^v}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1})}{x - x_0} = x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}, \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{v-1} + x^{v-2}x_0 + \dots + x_0^{v-1}) = x_0^{v-1} + x_0^{v-1} + \dots + x_0^{v-1} = vx_0^{v-1}, \text{δηλαδή } (x^v)' = vx^{v-1}.$$

**54. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.**

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \text{οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \text{δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Στο $x_0 = 0$ είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Askisopolis

55. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

Δηλαδή $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Γενίκευση: $(f_1 + f_2 + \dots + f_k)'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \dots + f_k'(x)$

56. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
 Το προηγούμενο θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι για τις τρεις συναρτήσεις ισχύει: $(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

57. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

$$\text{Η } \frac{f}{g} \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 \text{ με } \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

$$\text{Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα } \Delta \text{ τότε } \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

58. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -vx^{-v-1}$, δηλαδή $(x^{-v})' = -vx^{-v-1}$.

$$\text{Για κάθε } x \neq 0 \text{ έχουμε: } (x^{-v})' = \left(\frac{1}{x^v}\right)' = \frac{(1)'x^v - 1(x^v)'}{(x^v)^2} = \frac{-vx^{v-1}}{x^{2v}} = -vx^{-v-1}.$$

Askisopolis

59. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \epsilon\phi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\epsilon\phi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)' \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x (\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

60. Πότε η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και πότε σε ένα διάστημα Δ ; Διατυπώστε τον κανόνα της αλυσίδας.

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $(f(u))' = f'(u)u'$.

Με το συμβολισμό του Leibniz, αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, έχουμε τον τύπο $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

που είναι γνωστός ως κανόνας της αλυσίδας.

61. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Είναι $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

62. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$.

Αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

63. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln |x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

$$\text{Επομένως, } y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \text{ και άρα } (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Askisopolis

64. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 ;

Ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

65. Τι ονομάζεται οριακό κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος;

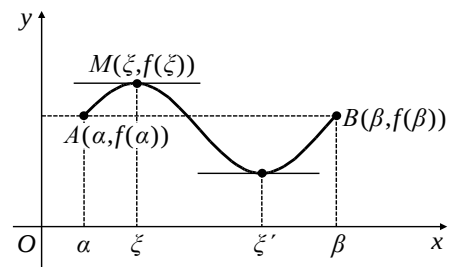
Αν K είναι το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x , όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0 .

66. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο

$M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .



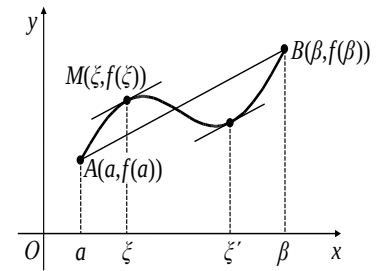
67. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



68. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

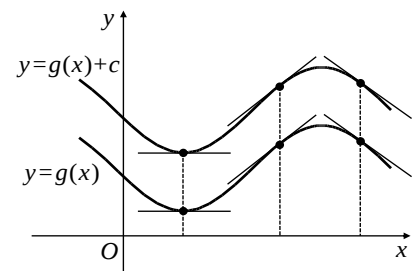
- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

69. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



70. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ οπότε έχουμε } f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

71. Να δώσετε τους ορισμούς για το τοπικό μέγιστο, το τοπικό ελάχιστο και το τοπικό ακρότατο.

- Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f .
- Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f .
- Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται τοπικά ακρότατα αυτής.

72. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \text{ Επομένως,}$$

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι

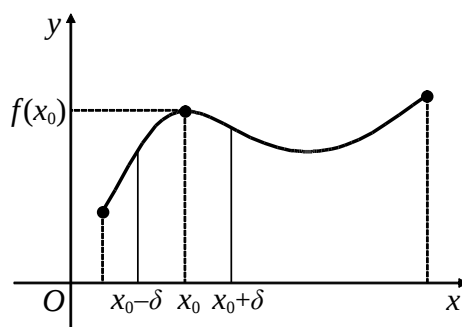
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ οπότε θα έχουμε}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.


73. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα;

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).

Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται και είναι συνεχής ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .

74. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
 ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$. (2)

Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$

είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

Askisopolis

75. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Έστω ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

76. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ , τότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και τότε προς τα κάτω;

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Θα λέμε ότι:

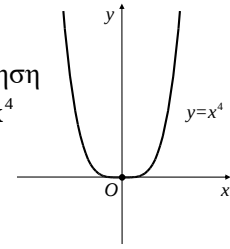
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ , αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ .
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ , αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ .

78. Με βάση ποιο θεώρημα εξετάζουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης f ; Ισχύει το αντίστροφό του; Δώστε παράδειγμα.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

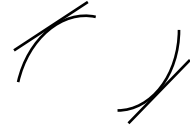
- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ .

Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$ (Σχ. 42). Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Εντούτοις, η f'' δεν είναι θετική στο 0 αφού $f''(0) = 0$.



77. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f ;

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



78. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f ;

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) , ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Askisopolis

79. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της, τότε ποια σχέση ισχύει για τη δεύτερη παράγωγο της f στο x_0 ;

Πότε ένα σημείο είναι βέβαιο σημείο καμπής;

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:

- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
- τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f'' .

Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0) = 0$.

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

80. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

81. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$), τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

82. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντιστοίχως στο $-\infty$);

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$, αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

Θεώρημα: Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως

στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

αντιστοίχως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta \in \mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:

— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

— Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(a, +\infty)$, αντιστοίχως διάστημα της μορφής $(-\infty, a)$

83. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.