Διαγώνισμα προσομοίωσης χειμερινής περιόδου
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
2021-2022
Συμμετέχουν τα σχολεία:
2ο Περιστερίου - 14ο Περιστερίου - 2ο Πετρούπολης

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)=P(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0\in A$;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$ τότε

$f\circ g=g\circ f$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$, για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)\neq 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $-\infty$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο x_0, τότε το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

δ) Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

ε) Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2\ln x+\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\sqrt{2e^x-\beta}, \beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ και ότι $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$.

Β1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β.

μονάδες 4

Για $\alpha=0, \beta=1$:

Β2.α) Να ορίσετε και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)=f(x)+g(x)$.

β) Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$

μονάδες 4+2

Β3. Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση g^{-1}.

μονάδες 1+2+3

Β4. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$.

μονάδες 2+2

Β5. Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(e^x)}{xg(4x)}$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\alpha x^3-\beta x^2+1$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x-1} & ,x<1\\ \lambda & ,x=1\\ (x-1)^2\eta\mu\dfrac{1}{1-x}+10, & x>1\end{cases}$ για τις οποίες ισχύει ότι $\alpha>2$ και $g(1)=0$.

Γ1. Να δείξετε ότι: $g(x)=(x-1)(\alpha x^2-x-1)$.

μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η g έχει δυο ακριβώς ρίζες στο (-1,1).

μονάδες 7

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής, τότε

Γ3. Να δείξετε ότι $\alpha=12$, $\lambda=10$ και στη συνέχεια να βρείτε τους τύπους της f και της g.

μονάδες 6

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση $g(x)\geq 12x^3-12x^2+(x-1)e^{2x}-2x+2$

μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-3x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ και αν $\alpha<0$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(f(\alpha)+1\right)x^7+5x^2+\ln 2\right]$.

μονάδες 6

Δ2. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)+f(2x)=f(3x)+f(10x)$.

μονάδες 6

Δ3. Να βρεθεί συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$e^{-g(x)+e^{x-2}+x-3}-3g(x)+3e^{x-2}+3x=10.$$

μονάδες 6

Δ4. Αν $g(x)=e^{x-2}+x-3$, $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση h είναι ορισμένη στο $(-\infty,2)$ και για $x<2$ ισχύει $g(x)h(x)\leq\ln(2-x)$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to2^-}h(x)$.

μονάδες 7

Ευχόμαστε επιτυχία!

ΛΥΣΕΙΣ

7 μ
A1

Θέμα Α

Α1. Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$

$$=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+...+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0)$$

4μ

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

1μ

Α3.α) Ψ

3μ

β) Έστω $f(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+1$ και $(g\circ f)(x)=g(f(x))=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

Είναι φανερό ότι $f\circ g\ne g\circ f$.

Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

5x2 μονάδες

Θέμα Β

4 μ

Β1. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$ οπότε $f(1)=0\Leftrightarrow\alpha=0$.

2 μ

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2e^x-\beta}=1\Leftrightarrow\sqrt{2-\beta}=1\Leftrightarrow 2-\beta=1\Leftrightarrow\beta=1$.

2 μ

6 μ

Β2. α) Για $\alpha=0,\beta=1$ είναι $f(x)=x^2\ln x$ και $g(x)=\sqrt{2e^x-1}$.

- Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει και αρκεί $x>0$ οπότε $A_f=(0,+\infty)$ και
- και για το πεδίο ορισμού της g πρέπει :

1 μ

$2e^x-1\ge 0\Leftrightarrow 2e^x\ge 1\Leftrightarrow e^x\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge-\ln 2$ οπότε $A_g=[-\ln 2,+\infty)$.

1 μ

1 μ

Άρα $A_h=A_f\cap A_g=(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση h έχει τύπο $h(x)=f(x)+g(x)=x^2\ln x+\sqrt{2e^x-1}$.

1 μ

β) Για κάθε $x_1,x_2>1$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

2 μ

$e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow 2e^{x_1}<2e^{x_2}\Leftrightarrow 2e^{x_1}-1<2e^{x_2}-1\Leftrightarrow\sqrt{2e^{x_1}-1}<\sqrt{2e^{x_2}-1}$ (1) ,

$x_1<x_2\overset{x_1,x_2>0}{\Leftrightarrow}x_1^2<x_2^2$ (2) και $\ln x_1<\ln x_2$ (3).

Οι όροι των σχέσεων (2) και (3) είναι θετικοί αφού $x_1,x_2>1$.

Με πολλαπλασιασμό των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $x_1^2\ln x_1<x_1^2\ln x_1$ (4).

Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (4) έχουμε $x_1^2\ln x_1+\sqrt{2e^{x_1}-1}<x_2^2\ln x_2+\sqrt{2e^{x_2}-1}\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$

οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$.

6 μ   1 μ

B3. Από το B2 β) έχουμε $1 < x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{2e^{x_1}-1} < \sqrt{2e^{x_2}-1} \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε $g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2e^x - 1} = y \overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} 2e^x - 1 = y^2 \Leftrightarrow 2e^x = y^2 + 1 \Leftrightarrow e^x = \dfrac{y^2+1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\dfrac{y^2+1}{2} \Leftrightarrow$

$g^{-1}(y) = \ln\dfrac{y^2+1}{2} \Leftrightarrow g^{-1}(x) = \ln\dfrac{x^2+1}{2}$ με $A_{g^{-1}} = [0, +\infty)$.

2 μ

4 μ

($x \geq -\ln 2 \Leftrightarrow \ln\dfrac{y^2+1}{2} \geq \ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{y^2+1}{2} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 0$ ισχύει)

3 μ

B4. Για το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ έχουμε: $\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

οπότε $A_{f \circ f} = (1, +\infty)$.

2 μ

Η $f \circ f$ έχει τύπο $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2 \ln x)^2 \ln(x^2 \ln x) = x^4 \ln^2 x \cdot (2\ln x + \ln(\ln x)) \Leftrightarrow$

$(f \circ f)(x) = 2x^4 \ln^3 x + x^4 \ln^2 x \cdot \ln(\ln x)$

2 μ

3 μ   2 μ

6 μ   1 μ

B5. Είναι : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(e^x)}{xg(4x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x} e^{2x}}{\cancel{x}\sqrt{2e^{4x}-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}} \cdot \sqrt{2 - \dfrac{1}{e^{4x}}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2 - \underbrace{\dfrac{1}{e^{4x}}}_{0}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5 μ

Θέμα Γ

Γ1. Α τρόπος: g(1)=0 $\Leftrightarrow \alpha - \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha + 1$ (1) οπότε

2 μ

3 μ

$g(x) = \alpha x^3 - \beta x^2 + 1 = \alpha x^3 - (\alpha+1)x^2 + 1$

$= \alpha x^3 - \alpha x^2 - x^2 + 1 = \alpha x^2(x-1) - (x^2-1) = \alpha x^2(x-1) - (x-1)(x+1) = (x-1)(\alpha x^2 - x - 1)$

Β τρόπος: g(1)=0 $\Leftrightarrow \alpha - \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha + 1$ (1) άρα

1 μ

$g(x) = \alpha x^3 - (\alpha+1)x^2 + 1$ και με Horner $g(x) = (x-1)(\alpha x^2 - x - 1)$.

7 μ

Γ2. Θέτω $h(x) = \alpha x^2 - x - 1$ που είναι συνεχής στο [-1,0] και στο [0,1] ως πολυωνυμική και $h(-1) = \alpha > 0,\ h(0) = -1 < 0$ και $h(1) = \alpha - 2 > 0$ οπότε από το Θεώρημα Bolzano η h έχει δύο λύσεις στο (-1,1) που είναι και μοναδικές γιατί η συνάρτηση είναι δευτεροβάθμια εξίσωση.
Επομένως η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$ οπότε έχει ακριβώς δύο λύσεις στο (-1,1).

3+3 μ το κάθε θεώρημα

6 μ

Γ3. Ισχύει $f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x-1} & , x < 1 \\ \lambda & , x = 1 \\ (x-1)^2 \eta\mu\dfrac{1}{1-x} + 10, & x > 1 \end{cases}$ και επειδή είναι συνεχής θα ισχύει

3 μ   1 μ

$\lim\limits_{x \to 1^-}(\alpha x^2 - x - 1) = \lim\limits_{x \to 1^+}(x-1)^2 \eta\mu(\dfrac{1}{x-1}) + 10 = f(1) \overset{*}{\Leftrightarrow} \alpha - 2 = 10 = \lambda \Rightarrow \alpha = 12$ και $\lambda = 10$

*Για $x>1$ είναι $\left|(x-1)^2 ημ(\frac{1}{x-1})\right| = (x-1)^2\left|ημ(\frac{1}{x-1})\right| \le (x-1)^2$ οπότε 2 μ

$-(x-1)^2 \le (x-1)^2 ημ(\frac{1}{x-1}) \le (x-1)^2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to1^-} -(x-1)^2 = 0 = \lim\limits_{x\to1^-}(x-1)^2$ από ΚΠ προκύπτει

$\lim\limits_{x\to1^+}[(x-1)^2 ημ(\frac{1}{x-1})+10]=10$ επομένως $f(x)=\begin{cases} 12x^2-x-1, & x<1 \\ 10, & x=1 \\ (x-1)^2 ημ\frac{1}{1-x}+10, & x>1 \end{cases}$ και $g(x)=12x^3-13x^2+1$.

7 μ

Γ4. $g(x)\ge 12x^3-12x^2+(x-1)e^{2x}-2x+2 \Leftrightarrow (x-1)(12x^2-x-1)\ge 12x^2(x-1)+(x-1)e^{2x}-2(x-1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(12x^2-x-1)\ge (x-1)(12x^2+e^{2x}-2) \Leftrightarrow (x-1)(-e^{2x}-x+1)\ge 0$ 1 μ

Θέτω $b(x)=-e^{2x}-x+1$ με $A_b=\mathbb{R}$ και για

2 μ

κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ προκύπτει ότι :

$b(x_1)>b(x_2)$ άρα η b είναι γνησίως

φθίνουσα με προφανή ρίζα την x=0.

2 μ

Και άρα $b(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\le 0$.

Συνεπώς πρέπει $x\in[0,1]$ 2 μ

x	-∞	0		1	+∞
x-1	-		-	0	+
b(x)	+	0	-		-
γιν.	-	0	+	0	-

2ος τρόπος

$g(x)\ge 12x^3-12x^2+(x-1)e^{2x}-2x+2 \Leftrightarrow 12x^3-13x^2+1\ge 12x^3-12x^2+(x-1)e^{2x}-2x+2$

$\Leftrightarrow -x^2+2x-1-(x-1)e^{2x}\ge 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2-(x-1)e^{2x}\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(x-1)e^{2x}\le 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(e^{2x}+x-1)\le 0$ κ.τ.λ.

6 μ

Θέμα Δ

Δ1. Για όλα τα $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \overset{e^{-t}\searrow}{\Rightarrow} e^{-x_1}>e^{-x_2}$ (1) και $-3x_1>-3x_2$ (2) 2 μ

$(1)+(2)\Rightarrow e^{-x_1}-3x_1>e^{-x_2}-3x_2 \Rightarrow e^{-x_1}-3x_1-1>e^{-x_2}-3x_2-1\Rightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow$ στο $\mathbb{R}\Rightarrow f$ είναι 1−1 στο $\mathbb{R}$. Οπότε : $f(x)=0 \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(x)=f(0) \overset{f\text{ είναι } 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$. 1 μ

Για $α<0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(α)>f(0)\Rightarrow f(α)>0\Rightarrow f(α)+1>0$ (3). Συνεπώς 1 μ

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(f(α)+1)x^7+5x^2+\ln 2\right]=(f(α)+1)\lim\limits_{x\to-\infty}x^7=(f(α)+1)(-\infty)\overset{(3)}{=}-\infty$ 2 μ

6 μ

Δ2. Η εξίσωση : $f(x)+f(2x)=f(3x)+f(10x)$, $x\in\mathbb{R}$ (I) έχει προφανή ρίζα $x=0$. 1 μ

και για $x>0\Rightarrow x<3x \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)>f(3x)$ (3) και $2x<10x \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(2x)>f(10x)$ (4)

$(3)+(4)\Rightarrow f(x)+f(2x)>f(3x)+f(10x)$ 2 μ

για $x<0\Rightarrow x>3x \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)<f(3x)$ (3) και $2x>10x \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(2x)<f(10x)$ (4) 2 μ

$(3)+(4)\Rightarrow f(x)+f(2x)<f(3x)+f(10x)$.

Κατά συνέπεια η $x=0$, είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (I). 1 μ

6 μ

Δ3. Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε : $e^{-g(x)+e^{x-2}+x-3}-3g(x)+3e^{x-2}+3x=10\Leftrightarrow$

$e^{-g(x)+e^{x-2}+x-3}-3g(x)+3e^{x-2}+3x-9-1=0\Leftrightarrow$

$e^{-g(x)+e^{x-2}+x-3}-3\left(g(x)-e^{x-2}-x+3\right)-1=0\ (5)$ 3 μ

1 μ

Έστω $y=g(x)-e^{x-2}-x+3$,(6) τότε $(5)\Leftrightarrow e^{-y}-3y+1=0\Leftrightarrow$

$f(y)=0\overset{\Delta 1}{\Leftrightarrow}y=0\overset{(6)}{\Leftrightarrow}g(x)-e^{x-2}-x+3=0\Leftrightarrow g(x)=e^{x-2}+x-3\ ,x\in\mathbb{R}$ 2 μ

7 μ

Δ4. Για όλα τα $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1-2<x_2-2\overset{e^t\nearrow}{\Rightarrow}e^{x_1-2}<e^{x_2-2}\ (7)$ και $x_1-3<x_2-3\ (8)$

$(7)+(8)\Rightarrow e^{x_1-2}+x_1-3<e^{x_2-2}+x_2-3\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow$ στο $\mathbb{R}\Rightarrow g$ είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$. 1 μ

Οπότε: $g(x)=0\overset{g(2)=0}{\Leftrightarrow}g(x)=g(2)\overset{g\text{ είναι }1-1}{\Leftrightarrow}x=2.$ 1 μ

$g(x)>0\Leftrightarrow g(x)>g(2)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}x>2$, $g(x)<0\Leftrightarrow g(x)<g(2)\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}x<2$ 1 μ

Έχουμε για $x<2$: $g(x)h(x)\le\ln(2-x)\overset{g(x)<0}{\Leftrightarrow}h(x)\ge\dfrac{\ln(2-x)}{g(x)}\ (9)$

$\lim\limits_{x\to2^-}g(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(e^{x-2}+x-3\right)=0\overset{g(x)<0}{\Rightarrow}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$ 1 μ

θέτω $u=2-x$ με $x<2\Leftrightarrow 2-x>0\Leftrightarrow u>0$ και $\lim\limits_{x\to2^-}u=\lim\limits_{x\to2^-}(2-x)=0$

$\lim\limits_{x\to2^-}\ln(2-x)=\lim\limits_{u\to0^+}u=-\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\ln(2-x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{g(x)}\lim\limits_{x\to2^-}\ln(2-x)=(-\infty)(-\infty)=+\infty\ (10)$

$(9),(10)\Rightarrow\lim\limits_{x\to2^-}h(x)=+\infty.$

1 μ

1 μ

1 μ