

ΟΔΗΓΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Ύλης Μαθηματικών Β' Γυμνασίου για τη Γ' Γυμνασίου

Καλώς ήρθες στη Γ' Γυμνασίου! Για να ξεκινήσεις με αυτοπεποίθηση, αυτός ο οδηγός συγκεντρώνει τα πλέον απαραίτητα («SOS») θέματα από την ύλη της Β' Γυμνασίου που θα χρειαστείς αμέσως στα πρώτα κεφάλαια της νέας σου τάξης.

1. Ρητοί Αριθμοί και Ιδιότητες Δυνάμεων

Οι ρητοί αριθμοί και οι πράξεις τους, μαζί με τις δυνάμεις, αποτελούν τη βάση για τις αλγεβρικές παραστάσεις της Γ' Γυμνασίου. Ας θυμηθούμε τους βασικούς κανόνες:

- **Απόλυτη Τιμή:** Η απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν. Είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός, π.χ. $|-5| = 5$ και $|+5| = 5$.
- **Πρόσημα στις Πράξεις:** Ομόσημοι αριθμοί στην πρόσθεση δίνουν το κοινό τους πρόσημο και το άθροισμα των απόλυτων τιμών. Ετερόσημοι δίνουν το πρόσημο του μεγαλύτερου κατά απόλυτη τιμή και τη διαφορά τους. Στον πολλαπλασιασμό/διαίρεση: ομόσημοι δίνουν θετικό (+), ετερόσημοι αρνητικό (-).

Οι Ιδιότητες των Δυνάμεων:

Ιδιότητα	Μαθηματικός Τύπος	Παράδειγμα
Γινόμενο δυνάμεων με την ίδια βάση	$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{(3+4)} = 2^7 = 128$
Πηλίκο δυνάμεων με την ίδια βάση	$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$	$\frac{5^5}{5^3} = 5^{(5-3)} = 5^2 = 25$
Δύναμη δύναμης	$(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$	$(3^2)^3 = 3^{(2 \cdot 3)} = 3^6 = 729$
Δύναμη γινομένου	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
Δύναμη πηλίκου	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{3^2} = \frac{x^2}{9}$
Δύναμη με αρνητικό εκθέτη	$a^{(-n)} = \frac{1}{a^n}$	$2^{(-3)} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ ΛΑΘΗ:

- **Το πρόσημο στη βάση της δύναμης:** Όταν η βάση είναι αρνητική, το αποτέλεσμα είναι θετικό αν ο εκθέτης είναι άρτιος, και αρνητικό αν είναι περιττός. Όμως, προσοχή στις παρενθέσεις!
- $(-3)^2=9$ ενώ $-3^2=-9$ (το μείον δεν υψώνεται στο τετράγωνο).
- **Δεν υπάρχει ιδιότητα για άθροισμα δυνάμεων:** Το a^m+a^n ΔΕΝ ισούται με $a^{(m+n)}$. Οι ιδιότητες ισχύουν μόνο για πολλαπλασιασμό και διαίρεση!

2. Επίλυση Εξισώσεων Α' Βαθμού

Μια εξίσωση 1ου βαθμού έχει τη γενική μορφή $ax + b = 0$. Για να τη λύσουμε, ακολουθούμε πάντα μια συγκεκριμένη σειρά βημάτων, ώστε να απομονώσουμε τον άγνωστο x :

1. **Απαλοιφή Παρονομαστών:** Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ) των παρονομαστών (αν υπάρχουν κλάσματα).
2. **Απαλοιφή Παρενθέσεων:** Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα για να βγάλουμε τις παρενθέσεις.
3. **Χωρισμός Γνωστών από Αγνώστους:** Μεταφέρουμε τους όρους με τον άγνωστο x στο αριστερό μέλος και τους σταθερούς αριθμούς στο δεξί μέλος, αλλάζοντας το πρόσημο κάθε όρου που αλλάζει μέλος.
4. **Αναγωγή Ομοίων Όρων:** Κάνουμε τις πράξεις ώστε να καταλήξουμε στη μορφή $ax = \gamma$.
5. **Διαίρεση με τον Συντελεστή του Αγνώστου:** Διαιρούμε και τα δύο μέλη με τον αριθμό a (αν $a \neq 0$) για να βρούμε $x = \frac{\gamma}{a}$.

Αναλυτικό Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση: $3(x-2) - \frac{(x-1)}{2} = 4$

• **Εύρεση ΕΚΠ:** Οι παρονομαστές είναι το 2 και το 1 (κάτω από το $3(x-2)$ και το 4).
ΕΚΠ(1, 2) = 2.

• **Απαλοιφή Παρονομαστών:** Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με το 2:

$$2 \cdot 3(x-2) - 2 \cdot \left[\frac{(x-1)}{2} \right] = 2 \cdot 4$$

$$2 \cdot 3(x-2) - 2 \cdot \left[\frac{(x-1)}{2} \right] = 2 \cdot 4$$

$$6(x-2) - (x-1) = 8$$

• **Απαλοιφή Παρενθέσεων:** Επιμεριστική ιδιότητα (προσοχή στο μείον έξω από την παρένθεση!):

$$6x - 12 - x + 1 = 8$$

• **Χωρισμός Γνωστών - Αγνώστων:** Μεταφέρουμε το -12 και το +1 στο δεξί μέλος αλλάζοντας πρόσημο:

$$6x - x = 8 + 12 - 1$$

• **Αναγωγή Ομοίων Όρων:** Κάνουμε τις πράξεις:

$$5x = 19$$

• **Διαίρεση με τον συντελεστή:** Διαιρούμε με το 5:

$$x = \frac{19}{5}$$

3. Τύποι Εμβαδών Επίπεδων Σχημάτων

Στη Γεωμετρία της Γ' Γυμνασίου θα μελετήσουμε την ομοιότητα σχημάτων και τον λόγο των εμβαδών τους. Είναι απαραίτητο να γνωρίζεις απέξω τους τύπους εμβαδού των βασικών γεωμετρικών σχημάτων:

Γεωμετρικό Σχήμα	Τύπος Εμβαδού	Επεξήγηση Μεταβλητών
Τετράγωνο	$E = a^2$	a = η πλευρά του τετραγώνου
Ορθογώνιο	$E = a \cdot \beta$	a, β = οι δύο διαστάσεις (μήκος, πλάτος)
Παραλληλόγραμμο	$E = \beta \cdot u$	β = η βάση, u = το αντίστοιχο ύψος
Τρίγωνο	$E = \frac{(\beta \cdot u)}{2}$	β = η βάση, u = το ύψος προς αυτή τη βάση
Τραπεζίο	$E = \frac{[(\beta + B) \cdot u]}{2}$	β, B = η μικρή και η μεγάλη βάση, u = το ύψος
Κύκλος	$E = \pi \cdot \rho^2$	ρ = η ακτίνα του κύκλου, $\pi \approx 3,14$

4. Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέει τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και είναι το πιο διάσημο και χρήσιμο θεώρημα της Γεωμετρίας!

«Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας (της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία) είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.»

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

όπου a = η υποτείνουσα, και β, γ = οι δύο κάθετες πλευρές.

Παράδειγμα Εφαρμογής:

Σε ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές είναι $\beta = 6 \text{ cm}$ και $\gamma = 8 \text{ cm}$. Να βρεθεί η υποτείνουσα α .

1. Εφαρμόζουμε τον τύπο: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$
2. Αντικαθιστούμε τις τιμές: $\alpha^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
3. Υπολογίζουμε την τετραγωνική ρίζα: $\alpha = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$.

5. Εισαγωγή στη βασική Τριγωνομετρία

Στο τέλος της Β' Γυμνασίου γνωρίσαμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας ω σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτοί οι ορισμοί θα επεκταθούν φέτος στη Γ' Γυμνασίου για γωνίες από 0° έως 180° :

- **Ημίτονο (ημω):** $\eta\mu\omega = \frac{(\text{Απέναντι Κάθετη Πλευρά})}{\text{Υποτείνουσα}}$
- **Συνημίτονο (συνω):** $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{(\text{Προσκειμένη Κάθετη Πλευρά})}{\text{Υποτείνουσα}}$
- **Εφαπτομένη (εφω):** $\epsilon\phi\omega = \frac{(\text{Απέναντι Κάθετη Πλευρά})}{\text{Προσκειμένη}}$ Κάθετη Πλευρά

Βασική Σχέση:

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

Πίνακας Τιμών για τις βασικές γωνίες:

Γωνία ω	30°	45°	60°
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$