ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.5
ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Σύνοψη Θεωρίας – Ορισμοί

Ταυτότητα ονομάζεται κάθε ισότητα η οποία περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για κάθε όλες τις τιμές των μεταβλητών της. Π.χ. Η ισότητα α (β + γ) = αβ + αγ είναι *ταυτότητα.*

Αξιοσημείωτες ταυτότητες :

1. Τετράγωνο αθροίσματος : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Το δεύτερο μέρος της ισότητας ονομάζεται ***ανάπτυγμα τετραγώνου***.

Απόδειξη : $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

2. Τετράγωνο διαφοράς : $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Το δεύτερο μέρος της ισότητας ονομάζεται ***ανάπτυγμα τετραγώνου***.

Απόδειξη : $(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

3. Κύβος αθροίσματος – Κύβος διαφοράς :

α) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

β) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

Απόδειξη :

$(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)$ =

α) $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)=\alpha^3+\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\alpha\beta^2+\beta^3$ =

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

$(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta)$ =

β) $(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)=\alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\alpha\beta^2-\beta^3$ =

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

4. Διαφορά τετραγώνων (Γινόμενο αθροίσματος επί διαφοράς) : $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Απόδειξη : $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$

Σημειώσεις :

α) Η ταυτότητα είναι μια ***ισότητα*** που ισχύει για κάθε τιμή των μεταβλητών. ΔΕΝ είναι εξίσωση να έχει άπειρες λύσεις

β) ΔΕΝ ισχύει $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$. Η ισότητα αυτή ισχύει ΜΟΝΟ όταν τουλάχιστον ένας από τους α ή β ισούται με το 0. $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$ αν και μόνο αν $\alpha=0$ ή / και $\beta=0$

γ) Αν $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε α = 0 και β = 0.

δ) Ισχύει ότι : $(\alpha-\beta)^2=(\beta-\alpha)^2$ ενώ $(\alpha-\beta)^3\neq(\beta-\alpha)^3$

Μεθοδολογία ασκήσεων

1. Για να αποδείξουμε μια ισότητα ξεκινάμε από το πρώτο μέλος της ισότητας κάνουμε πράξεις και καταλήγουμε στο δεύτερο μέλος.

2. Εναλλακτικά, κάνουμε πράξεις και στα δύο μέλη και καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

3. Για να δείξουμε ότι μία παράσταση είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή, κάνουμε τις πράξεις και καταλήγουμε σε ένα αποτέλεσμα που δεν περιέχει τη μεταβλητή.

Ασκήσεις

Α1 : Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

1. Ισχύει ότι : $(x^3+2)^2=x^6+4$
2. Ισχύει ότι : $(x-y)^2=(y-x)^2$
3. Ισχύει ότι : $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
4. Αν ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε α = 0 ή β = 0.
5. Αν $\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta$ τότε α = β.
6. Αν ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)^2=0$ τότε α =0 ή β = 0.
7. Ισχύει : $-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\beta^2-\alpha^2$
8. Ισχύει: $(x-y)^2=x^2-2x(-y)+(-y)^2$

Α2 : Να επιλέξετε την σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις :

1. Αν α – β = 6 τότε η παράσταση $K=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+3$ ισούται με :

α. 0 β. 39 γ. 33 δ. 81

2. Αν x + y = 20 και $x^2-y^2=80$ τότε η τιμή της παράστασης Λ = y – x είναι ίση με

α. 4 β. -4 γ. 1 δ. 10

3. Αν $x-\frac{1}{x}=3$ τότε η παράσταση $x^2+\frac{1}{x^2}$ ισούται με:

α. 9 β. 11 γ. -11 δ. -9

Β1: Να βρεθούν τα αναπτύγματα :

1. $(4x-y)(4x+y)$
2. $(a+2\beta)^3$
3. $(2x+3x^2)^2$
4. $(\frac{2}{3}x^2-4x)^2$
5. $(\frac{3}{4}a^2-4a)^3$
6. $(3x^2-y)(3x^2+y)$
7. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$

Β2 : Να γίνουν οι πράξεις :

α) $(3\alpha-\beta)^2-3(4\alpha+5)(4\alpha-5)$

β) $(3\alpha-3\beta)^2-(3\alpha+2\beta)^2+3\alpha(\beta-1)$

γ) $(1-x)(1+x)+(x-1)^2+2(x-1)$

Β3 : Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^2-5x+1$. Να βρείτε :

α. P(x – 10), **β.** P(3x – 2) **γ.** P(-x + 1) - 2x

Β4 : Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανεξάρτητα του x.

α) $P(x)=(x^3-1)^2+(x^3+1)^2-2(x^3-1)(x^3+1)$

β) $Q(x)=(x^2+1)^3+3(x^2+1)^2(1-x^2)+3(x^2+1)(1-x^2)^2+(1-x^2)^3$

Β5 : Να αποδείξετε ότι :

α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

β) $(2026+\frac{1}{2026})^2-(2026-\frac{1}{2026})^2=4$

γ) $(3\kappa+2)^2-(2\kappa+3)^2=5(\kappa-1)(\kappa+1)$