

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου

Επαναληπτικές ασκήσεις



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Στέλιος Μιχαήλογλου

Έκδοση γ'
29-8-2017

Ασκήσεις

1. α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = \frac{2x+1}{3} - 2$.

β) Αν x είναι η λύση της προηγούμενης εξίσωσης, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{x+2}}}$$

2. Δίνεται ευθεία ε με τύπο: $y = 2x - 4$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της:

x	-1	2		
y			4	-2

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

γ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε ευθεία ε_1 παράλληλη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ δίνονται $B\Gamma = 10$ cm και $\eta\mu B = 0,8$. Να βρείτε:

α) Το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

β) Το μήκος της πλευράς AB .

γ) Τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .

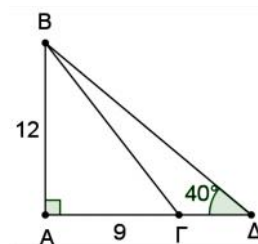
δ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ε) Το ύψος του $A\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$.

4. Στο διπλανό σχήμα η γωνία A είναι ορθή, $AB = 12$ cm,

$A\Gamma = 9$ cm και $\hat{A} = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τις πλευρές $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$ και $B\Delta$.

Δίνεται ότι $\eta\mu 40^\circ = 0,64$, $\sigma\upsilon\nu 40^\circ = 0,77$, $\epsilon\varphi 40^\circ = 0,84$



5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $B\Gamma = 4\sqrt{3}$ cm. Να υπολογίσετε:

α) Τις κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου.

γ) Το ύψος $A\Delta$ που αντιστοιχεί στη πλευρά $B\Gamma$.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια ευθεία ε και δύο σημεία της A, B .

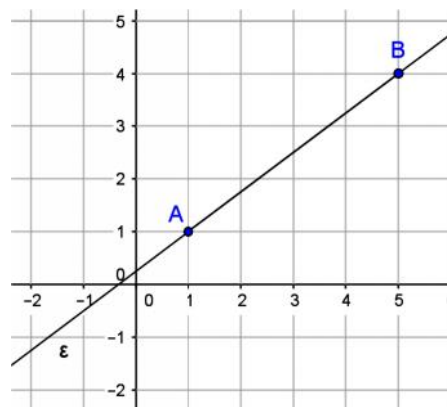
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A, B .

β) Να βρείτε την απόσταση AB .

γ) Να βρείτε την κλίση της ε .

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ε .

ε) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες.

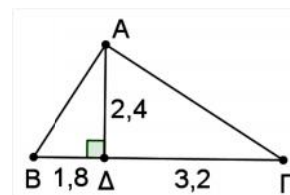


7. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(1, 2)$.

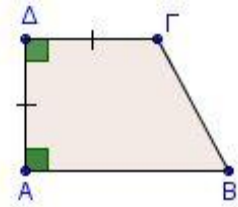
β) Αν το σημείο $B\left(\frac{\lambda-4}{2}, \frac{\lambda+2}{3}\right)$ ανήκει στη προηγούμενη ευθεία να βρείτε το λ .

γ) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ε και τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 3.

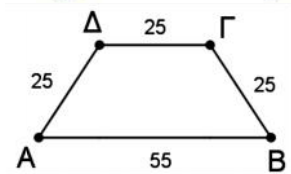
8. Μια ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(2,6)$.
- Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
 - Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
 - Να εξετάσετε αν τα σημεία $B(-5,10)$ και $\Gamma(100,300)$ ανήκουν στην ευθεία ε .
 - Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_1 παράλληλης της ε που διέρχεται από το σημείο $\Delta(2,-2)$.
9. Έστω ευθεία ε με εξίσωση $y = 2\lambda x + 3$ η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
- Να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$.
 - Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες.
 - Αν η ε διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{2\alpha-3}{3}, \frac{\alpha-1}{2}\right)$, να βρείτε τον αριθμό α .
 - Να σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων την ε .
10. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $y = 1$, $y = 4$, $x = 1$ και $x = 5$.
- Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών A , B , Γ και Δ ;
 - Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$;
 - Να βρείτε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, Δ .
11. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε τα σημεία $A(0,3)$, $B(-3,2)$ και $\Gamma(4,-2)$.
- Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του.
 - Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
12. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 26cm και το μήκος του είναι κατά 5cm μεγαλύτερο από το πλάτος του.
- Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.
 - Να βρείτε τη πλευρά τετραγώνου που έχει το ίδιο εμβαδό με το ορθογώνιο.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου μια πλευρά είναι η διαγώνιος του ορθογωνίου.
13. Για να καλυφθούν τα έξοδα της εκδρομής ενός τμήματος της Β' Γυμνασίου, κάθε μαθητής έπρεπε να πληρώσει 2,5€. Επειδή όμως 6 μαθητές δεν μπορούσαν να συμμετάσχουν στην εκδρομή, οι υπόλοιποι πλήρωσαν 3,25€ ο καθένας. Πόσους μαθητές έχει το τμήμα;
14. Η ηλικία του πατέρα είναι σήμερα τριπλάσια από την ηλικία του γιού του. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία του πατέρα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιού του. Ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες;
15. Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.
16. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ το AD είναι ύψος του. Αν $AD = 2,4\text{cm}$, $BD = 1,8\text{cm}$ και $D\Gamma = 3,2\text{cm}$, τότε:
- Να δείξετε ότι $AB = 3\text{cm}$
 - Να δείξετε ότι $A\Gamma = 4\text{cm}$
 - Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
 - Να δείξετε ότι $5\eta\mu B + 4\epsilon\phi\Gamma = 7$



17. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος είναι $AD = DG$, $BG = 10\text{ cm}$ και οι βάσεις του διαφέρουν κατά 6 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



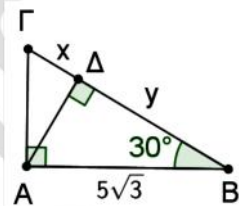
18. Να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν του διπλανού ισοσκελούς τραπέζιου.



19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABG ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 5\sqrt{3}\text{ cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$.

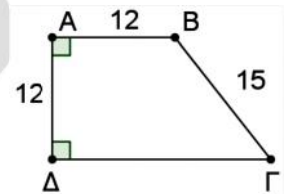
Να υπολογίσετε:

- α) Τις πλευρές AG , BG του τριγώνου.
- β) το εμβαδό του τριγώνου ABG .
- γ) Το ύψος AD του τριγώνου.
- δ) Τα τμήματα x, y .



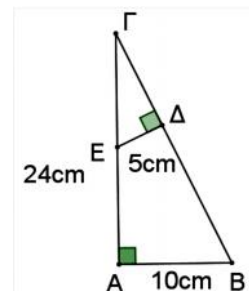
20. Στο διπλανό τραπέζιο οι γωνίες A και Δ είναι ορθές, $AB = AD = 12\text{ cm}$ και $BG = 15\text{ cm}$.

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπέζιου.
- β) Να βρείτε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου του οποίου οι πλευρές διαφέρουν κατά 4 cm και έχει την ίδια περίμετρο με το τραπέζιο $ABGD$.



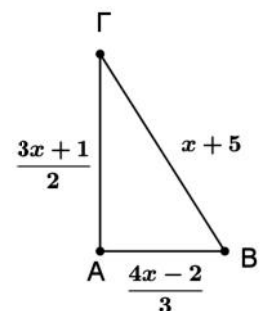
21. Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι $AG = 24\text{ cm}$, $AB = 10\text{ cm}$, $DE = 5\text{ cm}$.

- α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς BG .
- β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ .
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος του GD .
- δ) Να υπολογίσετε το μήκος του AE .
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABDE$.



22. Το διπλανό τρίγωνο ABG έχει περίμετρο 24.

- α) Να δείξετε ότι $x = 5$
- β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
- γ) Αν κατασκευάσουμε κύκλο που να διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου, που θα είναι το κέντρο του;



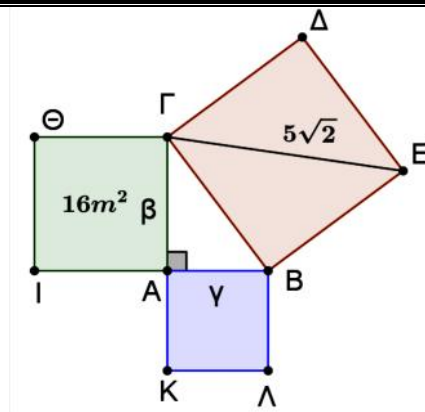
23. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα τετράγωνα $AB\Lambda K$, $B\Gamma\Delta E$ και $A\Gamma\Theta I$.

Αν $\Gamma E = 5\sqrt{2}$ και το τετράγωνο $A\Gamma\Theta I$ έχει εμβαδόν 16 m^2 τότε:

α) Να δείξετε ότι $B\Gamma = 5\text{ m}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Lambda K$.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



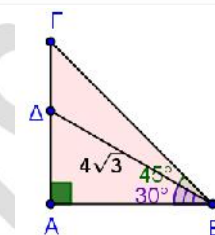
24. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Delta = 4\sqrt{3}\text{ cm}$, $\hat{A}B\Gamma = 45^\circ$ και

$\hat{A}\hat{B}\Delta = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = 2\sqrt{3}\text{ cm}$

β) $AB = 6\text{ cm}$

γ) $B\Gamma = 6\sqrt{2}\text{ cm}$



25. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίμετρο 54 cm του οποίου η βάση $B\Gamma$ είναι κατά 3 cm μεγαλύτερη από τις ίσες πλευρές του.

α) Να δείξετε ότι $AB = A\Gamma = 17\text{ cm}$ και $B\Gamma = 20\text{ cm}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου. Δίνεται ότι $\sqrt{189} = 13,75$.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος BZ του τριγώνου.

δ) Να δείξετε ότι $(\eta\mu B)^2 + (\sigma\upsilon\nu B)^2 = 1$

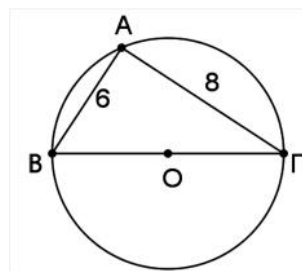
26. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) ο οποίος έχει διάμετρο την πλευρά $B\Gamma$. Αν $AB = 6\text{ cm}$ και $A\Gamma = 8\text{ cm}$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τη $B\Gamma$.

β) Να βρείτε το μήκος του κύκλου (O, ρ) .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, ρ) .

δ) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ .



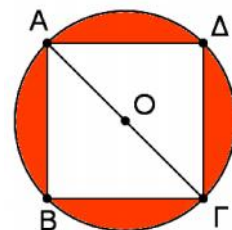
27. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $2\sqrt{2}\text{ cm}$ και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ . Να βρείτε :

α) Τη διαγώνιο $A\Gamma$ του τετραγώνου.

β) Το μήκος του κύκλου.

γ) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

δ) Το εμβαδόν της χρωματισμένης περιοχής.

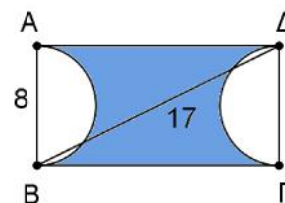


28. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με $AB = 8\text{ cm}$, $B\Delta = 17\text{ cm}$. Με διαμέτρους τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ σχεδιάζουμε ημικύκλια εσωτερικά του ορθογώνιου. Να υπολογίσετε:

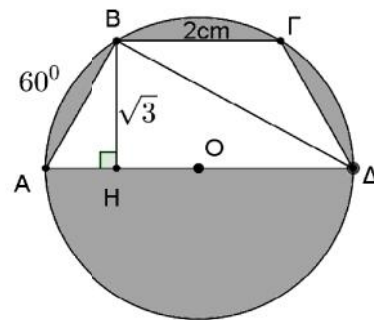
α) Την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογώνιου $AB\Gamma\Delta$.

β) Τη περίμετρο και το εμβαδόν του κάθε ημικυκλίου,

γ) το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας.



29. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο με μικρή βάση $B\Gamma = 2\text{cm}$ και ύψος $BH = \sqrt{3}\text{cm}$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O και διαμέτρου AD . Το μέτρο του τόξου AB είναι 60° .



- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{B}$.
- β) Να εξηγήσετε γιατί $\hat{A}\hat{B}\hat{D} = 90^\circ$.
- γ) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο $B\Delta$ του τραπεζίου.
- δ) Να αποδείξετε ότι $AD = 4\text{cm}$.
- ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου.
- στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
- ζ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας.

Λύσεις

1. α) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = \frac{2x+1}{3} - 2$.

β) Αν x είναι η λύση της προηγούμενης εξίσωσης, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{x+2}}}.$$

Λύση

α)

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{6} = \frac{2x+1}{3} - 2$$

$$\cancel{6}^3 \cdot \frac{x-1}{\cancel{2}^1} - \cancel{6}^1 \cdot \frac{x+3}{\cancel{6}^1} = \cancel{6}^2 \cdot \frac{2x+1}{\cancel{3}^1} - 6 \cdot 2$$

$$3(x-1) - (x+3) = 2(2x+1) - 12$$

$$3x - 3 - x - 3 = 4x + 2 - 12$$

$$3x - x - 4x = 2 - 12 + 3 + 3$$

$$-2x = -4$$

$$x = \frac{-4}{-2} = 2$$

β) $A = \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{x+2}}} = \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{2+2}}} = \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}} = \sqrt{1 + \sqrt{7+2}} = \sqrt{1 + \sqrt{9}} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

2. Δίνεται ευθεία ε με τύπο: $y = 2x - 4$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της:

x	-1	2		
y			4	-2

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

γ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

δ) Να βρείτε ευθεία ε₁ παράλληλη στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

α) Αν $x = -1$ τότε $y = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$,

αν $x = 2$ τότε $y = 2 \cdot 2 - 4 = 0$,

αν $y = 4$ τότε $4 = 2x - 4$

$$4 + 4 = 2x$$

$$8 = 2x$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

αν $y = -2$ τότε $-2 = 2x - 4$

$$-2 + 4 = 2x$$

$$2 = 2x$$

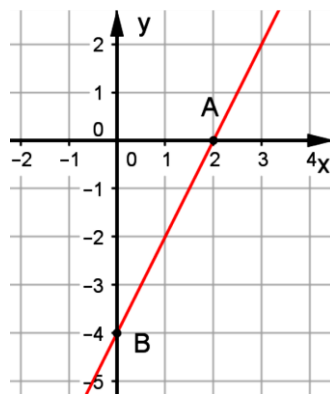
$$x = \frac{2}{2} = 1$$

x	-1	2	4	1
y	-6	0	4	-2

β) Από τον πίνακα τιμών παρατηρούμε ότι τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο A(2,0)

Αν $x = 0$ τότε $y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$, οπότε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$.

γ)



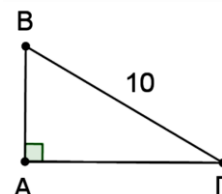
δ) Η ευθεία ε , επειδή διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχει εξίσωση της μορφής $y = ax$ και επειδή είναι παράλληλη στην ε θα έχει την ίδια κλίση, δηλαδή $a = 2$, οπότε έχει εξίσωση $y = 2x$.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ δίνονται $B\Gamma = 10$ cm και $\eta\mu B = 0,8$. Να βρείτε:

- α) Το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.
- β) Το μήκος της πλευράς AB .
- γ) Τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .
- δ) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- ε) Το ύψος του $A\Delta$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα $B\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$, άρα $0,8 = \frac{A\Gamma}{10}$ ή $A\Gamma = 10 \cdot 0,8 = 8$.



β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

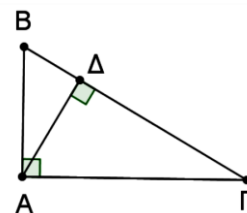
$$\begin{aligned} AB^2 + A\Gamma^2 &= B\Gamma^2 \\ AB^2 + 8^2 &= 10^2 \\ AB^2 + 64 &= 100 \\ AB^2 &= 100 - 64 \\ AB^2 &= 36 \\ AB &= \sqrt{36} = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

γ) $\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{6}{10} = 0,6$ και $\epsilon\phi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

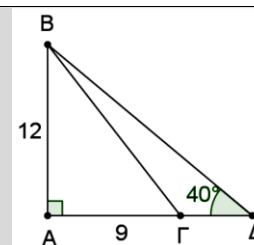
δ) $E = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ cm}^2$

ε) Αν θεωρήσουμε ως βάση του τριγώνου τη $B\Gamma$ τότε αντίστοιχο ύψος είναι το $A\Delta$, οπότε το εμβαδόν E του τριγώνου είναι:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta \\ 24 &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot A\Delta \\ 24 &= 5 \cdot A\Delta \\ A\Delta &= \frac{24}{5} = 4,8 \text{ cm} \end{aligned}$$



4. Στο διπλανό σχήμα η γωνία Α είναι ορθή, $AB = 12\text{cm}$, $AG = 9\text{cm}$ και $\hat{A} = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τις πλευρές $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$ και $B\Delta$. Δίνεται ότι $\eta\mu 40^\circ = 0,64$, $\sigma\upsilon\nu 40^\circ = 0,77$, $\epsilon\varphi 40^\circ = 0,84$



Λύση

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + AG^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225 \text{ άρα } B\Gamma = \sqrt{225} = 15\text{cm}$$

$$\text{Είναι } \epsilon\varphi 40^\circ = \frac{AB}{A\Delta} \text{ ή } 0,84 = \frac{12}{A\Delta} \text{ ή } 0,84 \cdot A\Delta = 12 \text{ άρα } A\Delta = \frac{12}{0,84} = \frac{12}{\frac{84}{100}} = \frac{12 \cdot 100}{84} = \frac{100}{7} = 14,29\text{cm}$$

$$\text{Τότε } \Delta\Gamma = 14,29 - 9 = 5,29\text{cm}$$

$$\eta\mu 40^\circ = \frac{AB}{B\Delta} \text{ ή } 0,64 = \frac{12}{B\Delta} \text{ ή } 0,64 \cdot B\Delta = 12 \text{ άρα } B\Delta = \frac{12}{0,64} = 18,75\text{cm}$$

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και $B\Gamma = 4\sqrt{3}\text{cm}$. Να υπολογίσετε:

- α) Τις κάθετες πλευρές AB και AG .
 β) Το εμβαδόν του τριγώνου.
 γ) Το ύψος $A\Delta$ που αντιστοιχεί στη πλευρά $B\Gamma$.

Λύση

α) Είναι $\eta\mu 60^\circ = \frac{AG}{B\Gamma}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AG}{4\sqrt{3}}$$

$$2AG = 4(\sqrt{3})^2$$

$$2AG = 4 \cdot 3$$

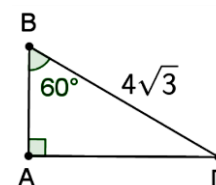
$$AG = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{AB}{4\sqrt{3}}$$

$$2AB = 4\sqrt{3}$$

$$AB = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$



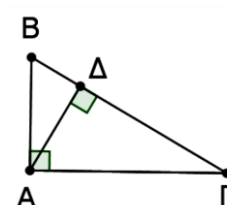
β) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AG \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\text{cm}^2$

γ) $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta$

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot A\Delta$$

$$6\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot A\Delta$$

$$A\Delta = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 3\text{cm}$$



6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια ευθεία ε και δύο σημεία της Α, Β.

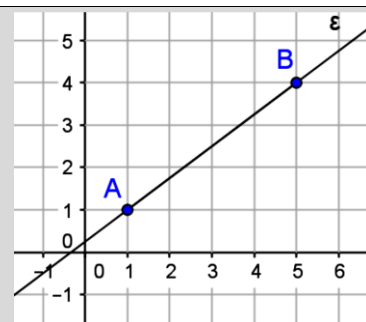
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β.

β) Να βρείτε την απόσταση ΑΒ.

γ) Να βρείτε την κλίση της ε .

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ε .

ε) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες.



Λύση

α) Είναι Α(1,1) και Β(5,4).

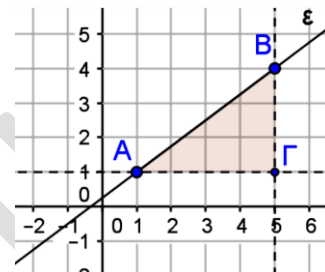
β) Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος.

Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (5,1) και $ΑΓ = 5 - 1 = 4$,

$$ΒΓ = 4 - 1 = 3.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

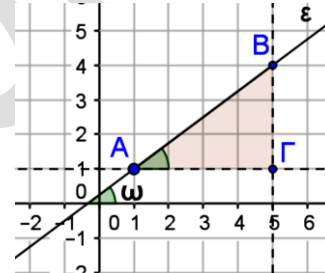
$$ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \text{ άρα } ΑΒ = 5$$



γ) Η κλίση της ευθείας ε είναι η εφαπτομένη της γωνίας ω .

Όμως οι γωνίες ω και Α είναι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΑΓ, $x'x$ που τέμνονται από την ε , άρα:

$$\varepsilon\omega = \varepsilon Α = \frac{ΒΓ}{ΑΓ} = \frac{3}{4}.$$



δ) Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \frac{3}{4}x + \beta$.

Επειδή η ε διέρχεται από το σημείο Α, έχουμε:

$$1 = \frac{3}{4} \cdot 1 + \beta \text{ άρα } \beta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \text{ οπότε } \varepsilon: y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}.$$

ε) Για $x = 0$ στην ε έχουμε $y = \frac{1}{4}$, οπότε η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ και

$$\text{για } y = 0 \text{ είναι } 0 = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{3}{4}x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

Οπότε η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

- 7. α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(1,2)$.
- β)** Αν το σημείο $B\left(\frac{\lambda-4}{2}, \frac{\lambda+2}{3}\right)$ ανήκει στη προηγούμενη ευθεία να βρείτε το λ .
- γ)** Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ζ που είναι παράλληλη στην ε και τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 3.

Λύση

α) Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση της μορφής $y = ax$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ έχουμε: $2 = a \cdot 1$ άρα $a = 2$ και $\varepsilon: y = 2x$.

β) Επειδή το σημείο B ανήκει στην ε , έχουμε:

$$\frac{\lambda+2}{3} = 2 \cdot \frac{\lambda-4}{2}$$

$$\lambda+2 = 3(\lambda-4)$$

$$\lambda+2 = 3\lambda-12$$

$$2+12 = 3\lambda-\lambda$$

$$14 = 2\lambda$$

$$\lambda = \frac{14}{2} = 7$$

γ) Επειδή η ευθεία ζ είναι παράλληλη στην ε έχει κλίση $a = 2$ και επειδή τέμνει τον άξονα $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 3, έχει εξίσωση $y = 2x + 3$

8. Μια ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(2,6)$.

α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.

β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία $B(-5,10)$ και $\Gamma(100,300)$ ανήκουν στην ευθεία ε .

δ) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ζ παράλληλης της ε που διέρχεται από το σημείο $\Delta(2,-2)$.

Λύση

α) Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση της μορφής $y = ax$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο $A(2,6)$ έχουμε: $6 = a \cdot 2$ άρα $a = \frac{6}{2} = 3$.

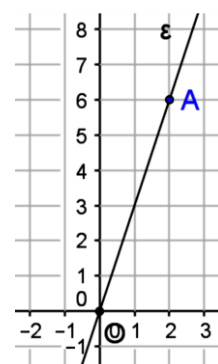
β) Είναι $\varepsilon: y = 3x$ και η γραφική της παράσταση γίνεται αν σχεδιάσουμε την ευθεία που διέρχεται από το O και το $A(2,6)$.

γ) Ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία αν επαληθεύει την εξίσωσή της.

Για το σημείο $B(-5,10)$ έχουμε: $10 = 3 \cdot (-5)$ αδύνατο και

για το σημείο $\Gamma(100,300)$ έχουμε: $300 = 3 \cdot 100$ που είναι αλήθεια.

Άρα το Γ ανήκει στην ε και το B δεν ανήκει στην ευθεία αυτή.



δ) Επειδή η ευθεία ζ είναι παράλληλη στην ε έχει κλίση $a = 3$ και η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = 3x + \beta$. Επειδή η ζ διέρχεται από το σημείο $\Delta(2,-2)$ έχουμε:

$$-2 = 3 \cdot 2 + \beta$$

$$-2 = 6 + \beta$$

$$\beta = -2 - 6 = -8$$

Άρα $\zeta: y = 3x - 8$.

9. Έστω ευθεία ε με εξίσωση $y = 2\lambda x + 3$ η οποία σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

α) Να δείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες.

γ) Αν η ε διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{2\alpha-3}{3}, \frac{\alpha-1}{2}\right)$, να βρείτε τον αριθμό α .

δ) Να σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων την ε .

Λύση

α) Η ευθεία ε έχει κλίση $\alpha = 2\lambda$. Όμως $\alpha = \varepsilon\phi 45^\circ = 1$ άρα $2\lambda = 1$ ή $\lambda = \frac{1}{2}$.

β) Για $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι $\varepsilon: y = x + 3$.

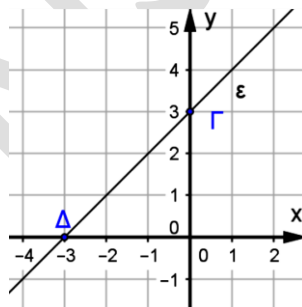
Αν $x = 0$ τότε $y = 3$, οπότε η ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Gamma(0, 3)$.

Αν $y = 0$ τότε $0 = x + 3$ ή $x = -3$, οπότε η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(-3, 0)$.

γ) Επειδή το σημείο $A\left(\frac{2\alpha-3}{3}, \frac{\alpha-1}{2}\right)$ είναι σημείο της ε , ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-1}{2} &= \frac{2\alpha-3}{3} + 3 \\ \cancel{6}^3 \cdot \frac{\alpha-1}{\cancel{2}^1} &= \cancel{6}^2 \cdot \frac{2\alpha-3}{\cancel{3}^1} + 6 \cdot 3 \\ 3(\alpha-1) &= 2(2\alpha-3) + 18 \\ 3\alpha-3 &= 4\alpha-6+18 \\ 3\alpha-4\alpha &= -6+18+3 \\ -\alpha &= 15 \\ \alpha &= -15\end{aligned}$$

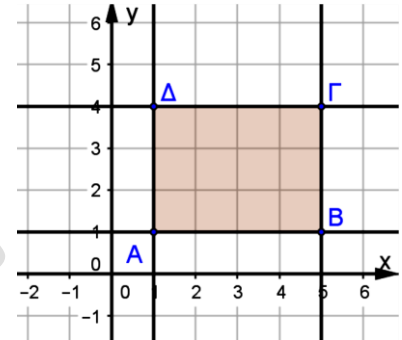
δ)



- 10.** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων το ορθογώνιο ΑΒΓΔ, του οποίου οι πλευρές ανήκουν στις ευθείες $y = 1$, $y = 4$, $x = 1$ και $x = 5$.
- α) Ποιες είναι οι συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ και Δ;
- β) Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ;
- γ) Να βρείτε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.

Λύση

- α) Οι ευθείες $y = 1$, $y = 4$ είναι οριζόντιες ευθείες και τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία $(0,1)$ και $(0,4)$ αντίστοιχα.
Οι ευθείες $x = 1$, $x = 5$ είναι κάθετες στον άξονα $x'x$ και τον τέμνουν στα σημεία $(1,0)$ και $(5,0)$ αντίστοιχα.
Τα σημεία τομής των τεσσάρων ευθειών είναι τα $A(1,1)$, $B(5,1)$, $\Gamma(5,4)$ και $\Delta(1,4)$.



β) $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot A\Delta = 4 \cdot 3 = 12$

- γ) Το κέντρο το ζητούμενου κύκλου είναι το σημείο τομής Κ των διαγωνίων του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

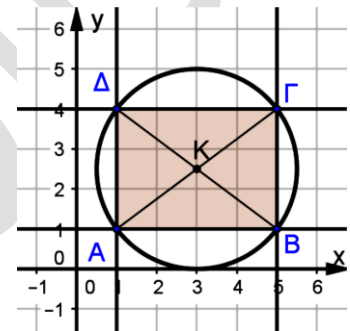
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$B\Delta^2 = A\Delta^2 + AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ άρα } B\Delta = 5.$$

Αν ο κύκλος έχει ακτίνα ρ , τότε $2\rho = B\Delta = 5$ άρα $\rho = \frac{5}{2} = 2,5$.

Το μήκος του κύκλου είναι $L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 = 15,7$ και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου είναι:

$$E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot (2,5)^2 = 19,625$$



- 11.** Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε τα σημεία $A(0,3)$, $B(-3,2)$ και $\Gamma(4,-2)$.

- α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να βρείτε το εμβαδόν του.
γ) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Λύση

- α) Από τα σημεία Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τους άξονες και έτσι σχηματίζεται το ορθογώνιο ΔΖΓΗ.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

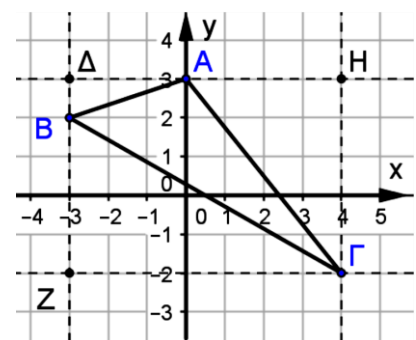
$$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10 \text{ άρα } AB = \sqrt{10}.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BZ^2 + Z\Gamma^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65 \text{ άρα } B\Gamma = \sqrt{65}.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΗΑ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = \Gamma H^2 + H A^2 = 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41 \text{ άρα } A\Gamma = \sqrt{41}.$$



β) $(AB\Gamma) = (\Delta Z\Gamma H) - (A\Delta B) - (BZ\Gamma) - (A\Gamma H)$

$$(AB\Gamma) = Z\Gamma \cdot Z\Delta - \frac{1}{2} A\Delta \cdot \Delta B - \frac{1}{2} Z\Gamma \cdot ZB - \frac{1}{2} A\Gamma \cdot H\Gamma$$

$$(AB\Gamma) = 7 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 35 - 1,5 - 14 - 10 = 9,5$$

- γ) Για να είναι το τρίγωνο ορθογώνιο αρκεί να ισχύει το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος. Είναι $B\Gamma^2 = 65$ και $AB^2 + A\Gamma^2 = 10 + 41 = 51$. Επειδή $B\Gamma^2 \neq AB^2 + A\Gamma^2$ το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο.

12. Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι 26cm και το μήκος του είναι κατά 5cm μεγαλύτερο από το πλάτος του.

α) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

β) Να βρείτε τη πλευρά τετραγώνου που έχει το ίδιο εμβαδό με το ορθογώνιο.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου μια πλευρά είναι η διαγώνιος του ορθογωνίου.

Λύση

α) Έστω x cm το πλάτος του ορθογωνίου, τότε το μήκος του θα είναι $(x+5)$ cm.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $x + x + 5 + x + x + 5 = 4x + 10$ άρα

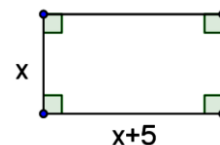
$$4x + 10 = 26$$

$$4x = 26 - 10$$

$$4x = 16$$

$$x = \frac{16}{4} = 4$$

Οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 4cm και 9cm



β) Έστω a η πλευρά του τετραγώνου που έχει το ίδιο εμβαδόν με το ορθογώνιο. Τότε

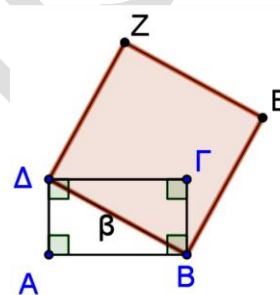
$$a^2 = 4 \cdot 9 = 36 \text{ άρα } a = \sqrt{36} = 6 \text{ cm.}$$

γ) Έστω ότι το τετράγωνο που δημιουργείται με πλευρά τη διαγώνιο ΒΔ έχει πλευρά β cm.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 9^2 + 4^2 = 81 + 16 = 97 \text{ άρα } \beta^2 = 97$$

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΕΖΔ είναι: $(BEZ\Delta) = \beta^2 = 97 \text{ cm}^2$



13. Για να καλυφθούν τα έξοδα της εκδρομής ενός τμήματος της Β' Γυμνασίου, κάθε μαθητής έπρεπε να πληρώσει 2,5€. Επειδή όμως 6 μαθητές δεν μπορούσαν να συμμετάσχουν στην εκδρομή, οι υπόλοιποι πλήρωσαν 3,25€ ο καθένας. Πόσους μαθητές έχει το τμήμα;

Λύση

Έστω ότι το τμήμα έχει x μαθητές.

Αν πήγαιναν στην εκδρομή όλοι οι μαθητές, τότε τα έξοδα θα ήταν $2,5 \cdot x$ €.

Επειδή 6 μαθητές δεν πήγαν στην εκδρομή, τα έξοδα τα κάλυψαν οι υπόλοιποι $x - 6$ μαθητές. Τα έξοδα στη περίπτωση αυτή ήταν $3,25 \cdot (x - 6)$ €.

$$\text{Άρα } 3,25 \cdot (x - 6) = 2,5 \cdot x$$

$$3,25x - 19,5 = 2,5x$$

$$3,25x - 2,5x = 19,5$$

$$0,75x = 19,5$$

$$x = \frac{19,5}{0,75} = \frac{1950}{75} = 26 \text{ μαθητές.}$$

14. Η ηλικία του πατέρα είναι σήμερα τριπλάσια από την ηλικία του γιού του. Μετά από 10 χρόνια η ηλικία του πατέρα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιού του.

Ποιες είναι οι σημερινές τους ηλικίες;

Λύση

Έστω x έτη η σημερινή ηλικία του γιού, τότε η ηλικία του πατέρα του θα είναι $3x$ έτη.

Μετά από 10 χρόνια η ηλικία του γιού είναι $x + 10$ και $3x + 10$ έτη θα είναι η ηλικία του πατέρα του.

Επειδή η ηλικία του πατέρα είναι διπλάσια από την ηλικία του γιού του, ισχύει ότι:

$$3x + 10 = 2 \cdot (x + 10)$$

$$3x + 10 = 2x + 20$$

$$3x - 2x = 20 - 10$$

$$x = 10$$

Άρα η σήμερα ο γιός είναι 10 ετών και ο πατέρας του είναι 30 ετών.

- 15.** Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

Λύση

Έστω x € το χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν.

Ο πρώτος πήρε $\frac{1}{4} \cdot x$ €, ο δεύτερος $\frac{1}{3} \cdot x$ και ο τρίτος $\left(\frac{1}{3} \cdot x + 100\right)$ €. Είναι

$$\frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + 100 = x$$

$$\cancel{12}^3 \cdot \frac{1}{\cancel{4}^1} \cdot x + \cancel{12}^4 \cdot \frac{1}{\cancel{3}^1} \cdot x + \cancel{12}^4 \cdot \frac{1}{\cancel{3}^1} \cdot x + 12 \cdot 100 = 12 \cdot x$$

$$3x + 4x + 4x + 1200 = 12x$$

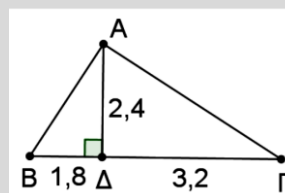
$$1200 = 12x - 4x - 4x - 3x$$

$$1200 = x$$

Το ποσό που μοιράστηκαν οι τρεις φίλοι ήταν 1200€

- 16.** Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ το AD είναι ύψος του. Αν $AD = 2,4$ cm, $BD = 1,8$ cm και $D\Gamma = 3,2$ cm, τότε:

- Να δείξετε ότι $AB = 3$ cm
- Να δείξετε ότι $A\Gamma = 4$ cm
- Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- Να δείξετε ότι $5\eta\mu B + 4\epsilon\phi\Gamma = 7$



Λύση

- α)** Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta B$ έχουμε:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (2,4)^2 + (1,8)^2 = 5,76 + 3,24 = 9 \text{ άρα } AB = 3 \text{ cm.}$$

- β)** Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AD^2 + D\Gamma^2 = (2,4)^2 + (3,2)^2 = 5,76 + 10,24 = 16 \text{ άρα } A\Gamma = 4 \text{ cm.}$$

- γ)** Είναι $B\Gamma = BD + D\Gamma = 1,8 + 3,2 = 5$ και $B\Gamma^2 = 5^2 = 25$

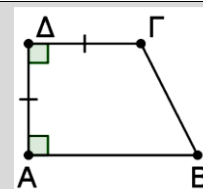
$$AB^2 + A\Gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Επειδή $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

- δ)** Είναι $\eta\mu B = \frac{AD}{AB} = \frac{2,4}{3} = 0,8$ και $\epsilon\phi\Gamma = \frac{AD}{D\Gamma} = \frac{2,4}{3,2} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.

$$5\eta\mu B + 4\epsilon\phi\Gamma = 5 \cdot 0,8 + 4 \cdot \frac{3}{4} = 4 + 3 = 7$$

17. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος είναι $AD = DG$, $BG = 10\text{cm}$ και οι βάσεις του διαφέρουν κατά 6cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.



Λύση

Έστω ΓΚ κάθετη στην ΑΒ, τότε το ΑΚΓΔ είναι ορθογώνιο και $ΓΚ = AD$, $ΓΔ = AK$.
Επειδή οι βάσεις του διαφέρουν κατά 6cm , αν $AD = DG = x\text{cm}$ τότε
 $AK = ΓΚ = x\text{cm}$ και $KB = 6\text{cm}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ έχουμε:

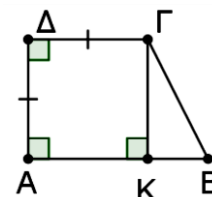
$$ΓΚ^2 + KB^2 = BG^2$$

$$x^2 + 6^2 = 10^2$$

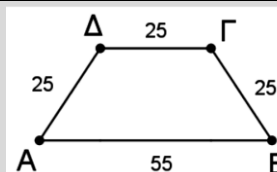
$$x^2 + 36 = 100$$

$$x^2 = 100 - 36 = 64 \text{ άρα } x = \sqrt{64} = 8\text{cm}$$

$$(ABΓΔ) = \frac{(AB + ΓΔ) \cdot AD}{2} = \frac{(14 + 8) \cdot 8}{2} = 88\text{cm}^2$$



18. Να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν του διπλανού ισοσκελούς τραπεζίου.



Λύση

Φέρουμε τα ύψη ΔΚ και ΓΛ του τραπεζίου. Επειδή το ΔΚΛΓ είναι ορθογώνιο ισχύει ότι $ΚΛ = DG = 25$ και $ΔΚ = ΓΛ$. Είναι $AB = 55$, άρα
 $AK + BL = 55 - 25 = 30$, οπότε $ΔΚ = ΓΛ = 15\text{cm}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ έχουμε:

$$ΔΚ^2 + AK^2 = AD^2$$

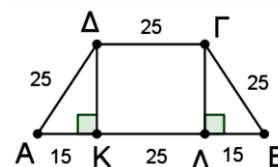
$$ΔΚ^2 + 15^2 = 25^2$$

$$ΔΚ^2 + 225 = 625$$

$$ΔΚ^2 = 625 - 225 = 400 \text{ άρα}$$

$$ΔΚ = \sqrt{400} = 20\text{cm}$$

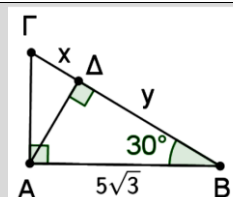
Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $(ABΓΔ) = \frac{(AB + ΓΔ) \cdot ΔΚ}{2} = \frac{(55 + 25) \cdot 20}{2} = 800\text{cm}^2$



19. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 5\sqrt{3}\text{cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$.

Να υπολογίσετε:

- Τις πλευρές ΑΓ, ΒΓ του τριγώνου.
- το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.
- Το ύψος ΑΔ του τριγώνου.
- Τα τμήματα x, y.



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\sin 30^\circ = \frac{AB}{BG}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{BG}$$

$$B\Gamma \cdot \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$B\Gamma = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 10$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

$$(5\sqrt{3})^2 + A\Gamma^2 = 10^2$$

$$25 \cdot 3 + A\Gamma^2 = 100$$

$$A\Gamma^2 = 100 - 75 = 25 \text{ άρα } A\Gamma = \sqrt{25} = 5\text{cm}$$

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5 = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι: $\eta\mu 30^\circ = \frac{A\Delta}{AB}$

$$\frac{1}{2} = \frac{A\Delta}{5\sqrt{3}}$$

$$2A\Delta = 5\sqrt{3}$$

$$A\Delta = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ είναι: $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\Delta B}{AB}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\Delta B}{5\sqrt{3}}$$

$$2\Delta B = 5(\sqrt{3})^2$$

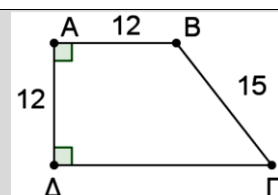
$$2\Delta B = 5 \cdot 3 = 15 \text{ άρα } \Delta B = \frac{15}{2} = 7,5\text{cm και}$$

$$\Delta\Gamma = 10 - 7,5 = 2,5\text{cm}$$

20. Στο διπλανό τραπέζιο οι γωνίες Α και Δ είναι ορθές, $AB = A\Delta = 12\text{cm}$ και $B\Gamma = 15\text{cm}$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου.

β) Να βρείτε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου του οποίου οι πλευρές διαφέρουν κατά 4 cm και έχει την ίδια περίμετρο με το τραπέζιο ΑΒΓΔ.



Λύση

α) Φέρουμε το ύψος ΒΚ του τραpezίου. Επειδή το ΑΔΚΒ είναι ορθογώνιο ισχύει ότι $\Delta K = AB = 12\text{cm}$ και $BK = A\Delta = 12\text{cm}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ έχουμε:

$$BK^2 + K\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

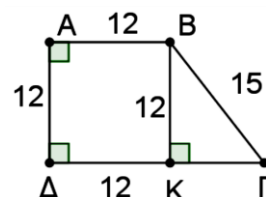
$$12^2 + K\Gamma^2 = 15^2$$

$$144 + K\Gamma^2 = 225$$

$$K\Gamma^2 = 225 - 144 = 81$$

$$K\Gamma = \sqrt{81} = 9\text{ cm}$$

Τότε $\Delta\Gamma = 12 + 9 = 21\text{cm}$ και το εμβαδόν του τραpezίου είναι:



$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{(AB + \Gamma\Delta) \cdot BK}{2} = \frac{(12 + 21) \cdot 12}{2} = 198 \text{ cm}^2$$

β) Έστω x cm η μια πλευρά του ορθογωνίου, τότε η άλλη του πλευρά θα είναι $(x + 4)$ cm.

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $x + x + x + 4 + x + 4 = 4x + 8$ και η περίμετρος του τραπέζιου είναι: $12 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 21 \text{ cm} = 60 \text{ cm}$, οπότε: $4x + 8 = 60$

$$4x = 60 - 8$$

$$4x = 52$$

$$x = \frac{52}{4} = 13 \text{ cm}.$$

Οι πλευρές του ορθογωνίου είναι 13 και 17 cm και το εμβαδόν του είναι $E = 13 \cdot 17 = 221 \text{ cm}^2$.

21. Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι $AG = 24$ cm, $AB = 10$ cm, $AE = 5$ cm.

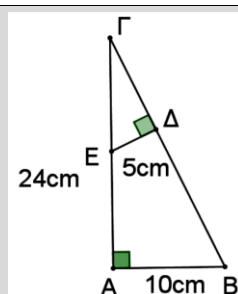
α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $B\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ .

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του $\Gamma\Delta$.

δ) Να υπολογίσετε το μήκος του AE .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Delta E$.



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 \text{ άρα } B\Gamma = \sqrt{676} = 26 \text{ cm}$$

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}, \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \text{ και } \epsilon\phi\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ έχουμε: $\epsilon\phi\Gamma = \frac{\Delta E}{\Gamma\Delta}$

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{\Gamma\Delta}$$

$$5\Gamma\Delta = 60$$

$$\Gamma\Delta = \frac{60}{5} = 12 \text{ cm}$$

δ) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Delta\Gamma$ έχουμε:

$$E\Gamma^2 = E\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \text{ άρα } E\Gamma = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$AE = A\Gamma - E\Gamma = 24 \text{ cm} - 13 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$$

ε) Από το σχήμα παρατηρούμε ότι:

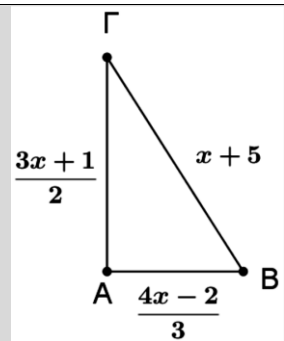
$$(AB\Delta E) = (AB\Gamma) - (\Delta\Gamma E) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot A\Gamma - \frac{1}{2} \cdot E\Delta \cdot \Gamma\Delta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 24 - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 120 - 30 = 90 \text{ cm}^2$$

22. Το διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 24.

α) Να δείξετε ότι $x = 5$

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

γ) Αν κατασκευάσουμε κύκλο που να διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου, που θα είναι το κέντρο του;



Λύση

α) Η περίμετρος του τριγώνου είναι $\frac{3x+1}{2} + \frac{4x-2}{3} + x+5$, άρα

$$\frac{3x+1}{2} + \frac{4x-2}{3} + x+5 = 24$$

$$\cancel{6}^3 \cdot \frac{3x+1}{\cancel{2}^1} + \cancel{6}^2 \cdot \frac{4x-2}{\cancel{3}^1} + 6x + 6 \cdot 5 = 6 \cdot 24$$

$$3(3x+1) + 2(4x-2) + 6x + 30 = 144$$

$$9x + 3 + 8x - 4 + 6x + 30 = 144$$

$$23x = 144 - 3 + 4 - 30$$

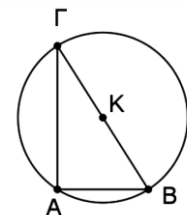
$$23x = 115$$

$$x = \frac{115}{23} = 5 \text{ cm}$$

β) Είναι $AB = \frac{4 \cdot 5 - 2}{3} = 6$, $AG = \frac{3 \cdot 5 + 1}{2} = 8$ και $BΓ = 5 + 5 = 10$

Είναι $AB^2 + AG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = BΓ^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$.

γ) Επειδή η γωνία Α είναι ορθή και γνωρίζουμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή, ο κύκλος που διέρχεται από τα Α, Β, Γ έχει διάμετρο την υποτείνουσα ΒΓ, οπότε το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο Κ της ΒΓ.



23. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα τετράγωνα

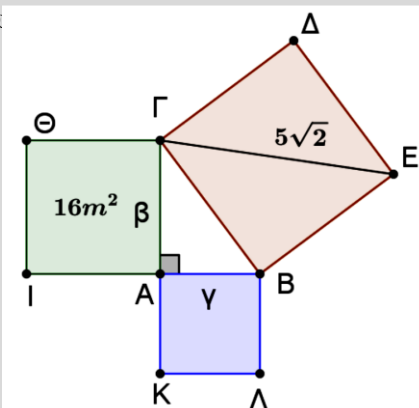
Αν $ΓΕ = 5\sqrt{2}$ m και το τετράγωνο ΑΓΘΙ έχει εμβαδόν

16 m^2 τότε:

α) Να δείξετε ότι $BΓ = 5 \text{ m}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΛΚ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



Λύση

α) Επειδή το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο, οι πλευρές του είναι ίσες. Έστω $BΓ = BE = x$, τότε από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ έχουμε:

$$BΓ^2 + BE^2 = ΓΕ^2$$

$$x^2 + x^2 = (5\sqrt{2})^2$$

$$2x^2 = 25 \cdot 2$$

$$x^2 = \frac{50}{2} = 25$$

$$x = \sqrt{25} = 5\text{m}$$

Άρα $B\Gamma = 5\text{m}$.

β) Είναι $(A\Gamma\Theta I) = \beta^2 = 16$ άρα $\beta = 4\text{m}$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = B\Gamma^2$$

$$16 + \gamma^2 = 25$$

$$\gamma^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\gamma = \sqrt{9} = 3\text{m}$$

$$(AB\Lambda K) = \gamma^2 = 9\text{m}^2$$

$$\gamma) (AB\Gamma) = \frac{1}{2} AB \cdot A\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6\text{m}^2$$

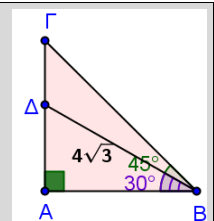
24. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Delta = 4\sqrt{3}$ cm, $AB\Gamma = 45^\circ$ και

$AB\Delta = 30^\circ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A\Delta = 2\sqrt{3}$ cm

β) $AB = 6$ cm

γ) $B\Gamma = 6\sqrt{2}$ cm



Λύση

α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε: $\eta\mu 30^\circ = \frac{A\Delta}{B\Delta}$

$$\frac{1}{2} = \frac{A\Delta}{4\sqrt{3}}$$

$$2A\Delta = 4\sqrt{3}$$

$$A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{cm}$$

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Delta^2 = B\Delta^2$$

$$AB^2 + (2\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$AB^2 + 4 \cdot 3 = 16 \cdot 3$$

$$AB^2 + 12 = 48$$

$$AB^2 = 48 - 12 = 36$$

$$AB = \sqrt{36} = 6\text{cm}$$

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε: $\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{AB}{B\Gamma}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{B\Gamma}$$

$$\sqrt{2} \cdot B\Gamma = 12$$

$$B\Gamma = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\text{cm}$$

25. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίμετρο 54cm του οποίου η βάση $B\Gamma$ είναι κατά 3cm μεγαλύτερη από τις ίσες πλευρές του.

α) Να δείξετε ότι $AB = A\Gamma = 17\text{cm}$ και $B\Gamma = 20\text{cm}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου. Δίνεται ότι $\sqrt{189} = 13,75$.

γ) Να υπολογίσετε το ύψος BZ του τριγώνου.

δ) Να δείξετε ότι $(\eta\mu B)^2 + (\sigma\upsilon\nu B)^2 = 1$.

Λύση

α) Έστω x cm το μήκος των ίσων πλευρών AB, Γ του τριγώνου. Τότε $B\Gamma = x + 3$ cm και επειδή η περίμετρος του τριγώνου είναι 54 cm, έχουμε:

$$x + x + x + 3 = 54$$

$$3x = 54 - 3$$

$$3x = 51$$

$$x = \frac{51}{3} = 17\text{cm}$$

Άρα $AB = A\Gamma = 17\text{cm}$ και $B\Gamma = 20\text{cm}$.

β) Έστω $A\Delta$ ύψος του τριγώνου.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$B\Delta^2 + A\Delta^2 = AB^2$$

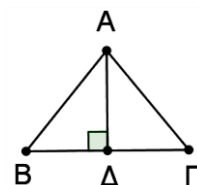
$$10^2 + A\Delta^2 = 17^2$$

$$100 + A\Delta^2 = 289$$

$$A\Delta^2 = 289 - 100 = 189$$

$$A\Delta = \sqrt{189} = 13,75\text{cm}$$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot A\Delta = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 13,75 = 137,5\text{cm}^2$$

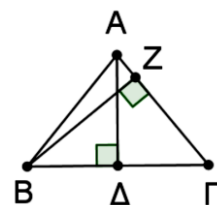


γ) Με βάση την $A\Gamma$ το εμβαδόν του τριγώνου είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot BZ$ άρα

$$137,5 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot BZ$$

$$2 \cdot 137,5 = 17BZ$$

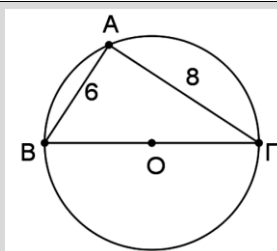
$$BZ = \frac{275}{17} = 16,18\text{cm}$$



δ) Είναι $\eta\mu B = \frac{A\Delta}{AB}$ και $\sigma\upsilon\nu B = \frac{B\Delta}{AB}$

$$(\eta\mu B)^2 + (\sigma\upsilon\nu B)^2 = \frac{A\Delta^2}{AB^2} + \frac{B\Delta^2}{AB^2} = \frac{A\Delta^2 + B\Delta^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

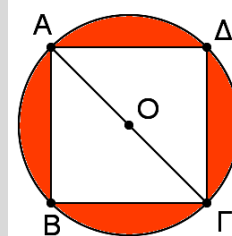
- 26.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, ρ) ο οποίος έχει διάμετρο την πλευρά ΒΓ. Αν $AB = 6\text{cm}$ και $AG = 8\text{cm}$, τότε:
- Να υπολογίσετε τη ΒΓ.
 - Να βρείτε το μήκος του κύκλου (Ο, ρ).
 - Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο, ρ).
 - Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ.



Λύση

- Η γωνία Α είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο, οπότε είναι ορθή.
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
 $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ άρα $B\Gamma = \sqrt{100} = 10\text{cm}$.
- Είναι $B\Gamma = 2\rho = 10\text{cm}$ άρα η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 5\text{cm}$.
Το μήκος του κύκλου είναι $L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = 31,4\text{cm}$
- Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 5^2 = 3,14 \cdot 25 = 78,5\text{cm}^2$
- $\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{6}{10} = 0,6$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{8}{10} = 0,8$ και $\epsilon\varphi\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8} = 0,75$

- 27.** Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $2\sqrt{2}\text{cm}$ και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Να βρείτε :
- Τη διαγώνιο ΑΓ του τετραγώνου.
 - Το μήκος του κύκλου.
 - Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
 - Το εμβαδόν της χρωματισμένης περιοχής.

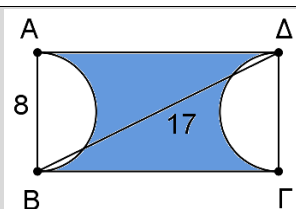


Λύση

- Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:
 $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 8 + 8 = 16$ άρα $A\Gamma = \sqrt{16} = 4\text{cm}$.
- Είναι $A\Gamma = 2\rho = 4\text{cm}$ άρα η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 2\text{cm}$.
Το μήκος του κύκλου είναι $L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56\text{cm}$
- Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 3,14 \cdot 4 = 12,56\text{cm}^2$
- Το τετράγωνο έχει εμβαδόν $(AB\Gamma\Delta) = (2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8\text{cm}^2$.
Το εμβαδόν Ε της χρωματισμένης περιοχής βρίσκεται αφαιρώντας από τον κυκλικό δίσκο το τετράγωνο, δηλαδή: $E = 12,56\text{cm}^2 - 8\text{cm}^2 = 4,56\text{cm}^2$.

28. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ= 8cm, ΒΔ= 17cm. Με διαμέτρους τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ σχεδιάζουμε ημικύκλια εσωτερικά του ορθογωνίου. Να υπολογίσετε:

- α) Την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.
 β) Την περίμετρο και το εμβαδόν του κάθε ημικυκλίου,
 γ) το εμβαδό της χρωματισμένης επιφάνειας.



Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$8^2 + AD^2 = 17^2$$

$$64 + AD^2 = 289$$

$$AD^2 = 289 - 64 = 225$$

$$AD = \sqrt{225} = 15\text{cm}$$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι: $AB + BG + ΓΔ + ΔΑ = 8 + 15 + 8 + 15 = 46\text{cm}$ και το εμβαδόν του είναι $(ABΓΔ) = 15 \cdot 8 = 120\text{cm}^2$

β) Το καθένα από τα δύο ημικύκλια έχει ακτίνα $\rho = \frac{AB}{2} = 4\text{cm}$.

Το μήκος του αντίστοιχου κύκλου είναι $L = 2\pi\rho = 2 \cdot 3,14 \cdot 4 = 25,12\text{cm}$, οπότε το κάθε ημικύκλιο έχει

μήκος: $\frac{25,12}{2}\text{cm} = 12,56\text{cm}$

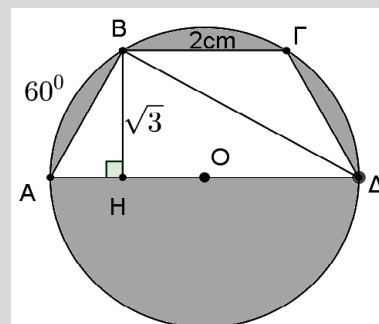
Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 4^2 = 3,14 \cdot 16 = 50,24\text{cm}^2$, οπότε το κάθε ημικύκλιο

έχει εμβαδόν $\frac{50,24}{2}\text{cm}^2 = 25,12\text{cm}^2$.

γ) Το εμβαδόν Ε της χρωματισμένης περιοχής βρίσκεται αφαιρώντας από το εμβαδόν του ορθογωνίου τα δύο ημικύκλια, άρα: $E = 120\text{cm}^2 - 50,24\text{cm}^2 = 69,76\text{cm}^2$

29. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο με μικρή βάση ΒΓ = 2cm και ύψος $BH = \sqrt{3}\text{cm}$, το οποίο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΔ. Το μέτρο του τόξου είναι ΑΒ είναι 60° .

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}B$.
 β) Να εξηγήσετε γιατί $\hat{A}B\hat{A} = 90^\circ$.
 γ) Να υπολογίσετε τη διαγώνιο ΒΔ του τραpezίου.
 δ) Να αποδείξετε ότι $AD = 4\text{cm}$.
 ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τραpezίου. Δίνεται ότι $\sqrt{3} = 1,73$.
 στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.
 ζ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της χρωματισμένης επιφάνειας.



Λύση

α) Η γωνία ΑΔΒ είναι εγγεγραμμένη σε τόξο 60° , οπότε $\hat{A}B = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.

β) Η γωνία $\hat{A}B\hat{A}$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο οπότε είναι ορθή.

γ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΗΔ είναι $\eta\mu 30^\circ = \frac{BH}{BD}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{BD}$$

$$B\Delta = 2\sqrt{3}\text{cm}$$

δ) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ είναι $\text{συν}\Delta = \frac{B\Delta}{A\Delta}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{A\Delta}$$
$$\sqrt{3} \cdot A\Delta = 4\sqrt{3}$$
$$A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\text{cm}$$

ε) $(AB\Gamma\Delta) = \frac{(A\Delta + B\Gamma) \cdot BH}{2} = \frac{(4 + 2)\sqrt{3}}{2} = 3 \cdot 1,73 = 5,19\text{cm}^2$

στ) Αν ρ είναι η ακτίνα του κυκλικού δίσκου, τότε $A\Delta = 2\rho = 4\text{cm}$ οπότε $\rho = 2\text{cm}$.

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου είναι $E = \pi\rho^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 3,14 \cdot 4 = 12,56\text{cm}^2$.

η) Το εμβαδόν E της χρωματισμένης περιοχής θα υπολογιστεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου. Είναι: $E = 12,56\text{cm}^2 - 5,19\text{cm}^2 = 7,37\text{cm}^2$