

Πυθαγόρειο θεώρημα

Πυθαγόρειο θεώρημα

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

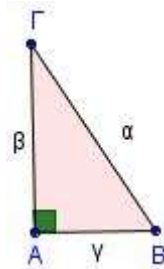
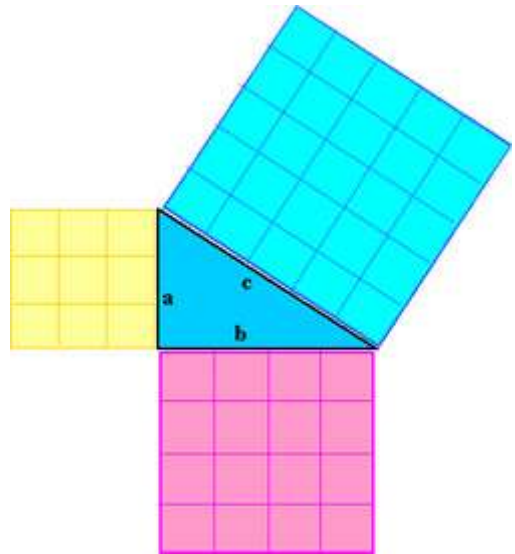
Για παράδειγμα στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm. Τα τετράγωνα που σχηματίζονται με πλευρές τις κάθετες πλευρές του τριγώνου έχουν εμβαδόν 9cm^2 (9 κίτρινα τετραγωνάκια) και 16cm^2 (16 ρόζ τετραγωνάκια).

Αν τώρα μετρήσουμε τα τετραγωνάκια που έχει το τετράγωνο που σχηματίζεται στην υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου, θα διαπιστώσουμε ότι είναι 25, δηλαδή το εμβαδόν του είναι 25cm^2 .

Δηλαδή το εμβαδόν του τετραγώνου της υποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.

Γενικά, αν έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή το πυθαγόρειο θεώρημα είναι:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

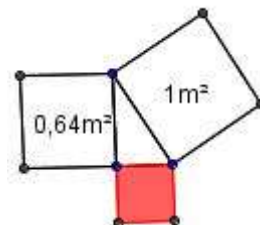
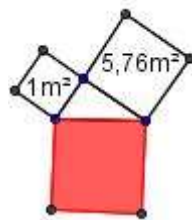
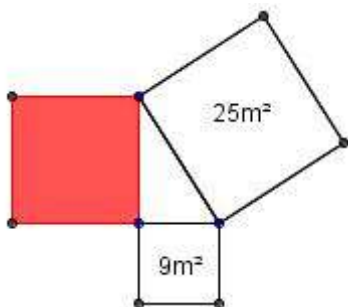


Αντίστροφο πυθαγορείου θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου στα επόμενα σχήματα.



Λύση

Εστω Ε το εμβαδόν του κόκκινου τετραγώνου.

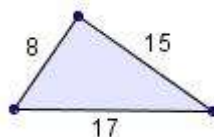
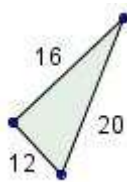
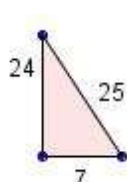
Εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα στο 1ο σχήμα για το ορθογώνιο τρίγωνο που βρίσκεται ενδιάμεσα των τετραγώνων, έχουμε:

$$E + 9 = 25 \text{ άρα } E = 25 - 9 = 16\text{m}^2$$

$$\text{Όμοια στο δεύτερο σχήμα είναι: } E = 1 + 5,76 = 6,76\text{m}^2$$

$$\text{Στο τρίτο σχήμα είναι } E + 0,64 = 1 \text{ άρα } E = 1 - 0,64 = 0,36\text{m}^2.$$

2. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια.



Λύση

Για να είναι ορθογώνιο το πρώτο τρίγωνο πρέπει:

$$24^2 + 7^2 = 25^2 \text{ ή } 576 + 49 = 625 \text{ που ισχύει.}$$

Για να είναι ορθογώνιο το δεύτερο τρίγωνο πρέπει:

$$12^2 + 16^2 = 20^2 \text{ ή } 144 + 256 = 400 \text{ που ισχύει.}$$

Για να είναι ορθογώνιο το τρίτο τρίγωνο πρέπει:

$$15^2 + 8^2 = 17^2 \text{ ή } 225 + 64 = 289 \text{ που ισχύει.}$$

3. α) Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών 6 cm, 8 cm και 10cm. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, καθώς και το τρίγωνο που έχει τις μισές πλευρές από τις πλευρές του ΑΒΓ, είναι επίσης ορθογώνιο.

Λύση

α) Εστω $a = 10$ cm, $\beta = 8$ cm και $\gamma = 6$ cm.

Για να είναι το τρίγωνο ορθογώνιο πρέπει:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 \text{ ή } 10^2 = 8^2 + 6^2 \text{ ή } 100 = 64 + 36 \text{ που ισχύει. Άρα το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.}$$

β) Εστω Α, Β, Γ οι πλευρές με το διπλάσιο μήκος από τις a, β, γ . Τότε $A = 20$ cm, $B = 16$ cm και $\Gamma = 12$ cm.

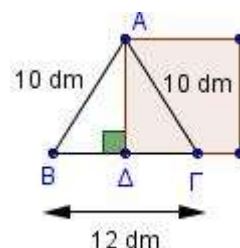
Είναι $A^2 = 400$ και $B^2 + \Gamma^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$, δηλαδή $B^2 + \Gamma^2 = A^2$, οπότε και το τρίγωνο που έχει διπλάσιες πλευρές από το ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Εστω x, y, z οι πλευρές του τριγώνου με το μισό μήκος από τις a, β, γ . Τότε $x = 5$ cm,

$y = 4$ cm και $z = 3$ cm. Είναι $y^2 + z^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = x^2$, άρα και το τρίγωνο με τις μισές πλευρές του ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

4. Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ισοσκελές με $AB = AG = 10$ dm και $B\Gamma = 12$ dm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με το ύψος ΑΔ του τριγώνου.

Λύση



Εστω x το μήκος του ύψους AD . Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ADB , έχουμε:

$$AD^2 + BD^2 = AB^2$$

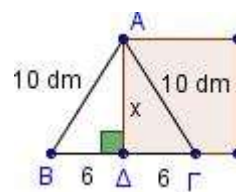
$$x^2 + 6^2 = 10^2$$

$$x^2 + 36 = 100$$

$$x^2 = 100 - 36$$

$$x^2 = 64$$

Το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά ίση με την $AD = x$ είναι $E = x^2 = 64 \text{ dm}^2$.



5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μπλέ τετραγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με τη διαγώνιο του ορθογώνιου $AB\Gamma$.

Λύση

Εστω ότι η $A\Gamma$ έχει μήκος x m.

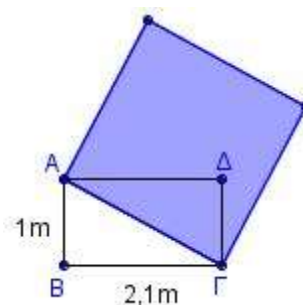
Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, έχουμε: $AB^2 + B\Gamma^2 = A\Gamma^2$

$$1^2 + 2,1^2 = x^2$$

$$x^2 = 1 + 4,41 = 5,41$$

Η πλευρά του μπλέ τετραγώνου είναι ίση με x m, άρα το εμβαδόν του είναι:

$$E = x^2 = 5,41 \text{ m}^2.$$

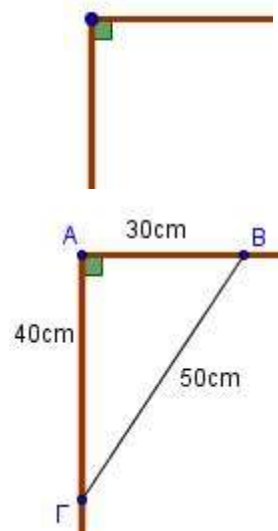


6. Για να σχηματιστεί ορθή γωνία με δύο ξύλινα δοκάρια (όπως λέμε για να «γωνιάσει» τα δοκάρια), ένας τεχνίτης μετράει στο ένα δοκάρει $AB = 30 \text{ cm}$ και στο άλλο $A\Gamma = 40 \text{ cm}$. Στη συνέχεια τα τοποθετεί κατάλληλα, ώστε να είναι $B\Gamma = 50 \text{ cm}$. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί είναι σίγουρος ότι η γωνία που σχηματίζουν τα δοκάρια είναι ορθή;

Λύση

Είναι $AB^2 + A\Gamma^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500$ και

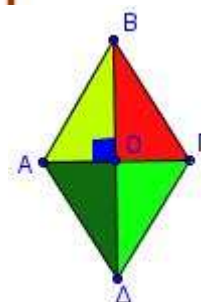
$B\Gamma^2 = 50^2 = 2500$, δηλαδή $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, οπότε στο τρίγωνο $AB\Gamma$ επαληθεύεται το πυθαγόρειο θεώρημα, άρα η γωνία A είναι ορθή.



7. Ο χαρταετός του διπλανού σχήματος είναι ρόμβος με διαγώνιες 12 dm και 16 dm . Να βρείτε τη περίμετρο και το εμβαδόν της επιφάνειας του χαρταετού.

Λύση

Επειδή οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες, θα υπολογίσουμε το μήκος μιας μόνο πλευράς.



Είναι $BO = OD = \frac{16}{2} \text{ dm} = 8 \text{ dm}$ και $AO = OG = \frac{12}{2} \text{ dm} = 6 \text{ dm}$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο BOG έχουμε:

$$BG^2 = BO^2 + OG^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2 \text{ άρα } BG = 10 \text{ dm}$$

Η περίμετρος του ρόμβου είναι: $4BG = 40 \text{ dm}$.

Τώρα για να βρούμε το εμβαδόν του ρόμβου, θα υπολογίσουμε το εμβαδόν των τριγώνων ABG και ADG . Είναι:

$$(ABG) = \frac{1}{2} AG \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ dm}^2 \text{ και } (ADG) = \frac{1}{2} AG \cdot DO = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48 \text{ dm}^2, \text{ άρα}$$

$$(ABGD) = 2 \cdot 48 \text{ dm}^2 = 96 \text{ dm}^2.$$

8. Η διατομή ενός καναλιού είναι σχήματος ισοσκελούς τραπέζιου με πλευρές:

$$GD = AB = 5 \text{ m}, BG = 7 \text{ m} \text{ και } AD = 13 \text{ m}. \text{ Να}$$

υπολογίσετε το ύψος x του καναλιού.

Λύση

Επειδή το $BGEZ$ είναι ορθογώνιο είναι $EZ = BG = 7 \text{ m}$.

Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, ισχύει ότι

$$AE = ZD = \frac{13 - 7}{2} \text{ m} = 3 \text{ m}.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AEB έχουμε:

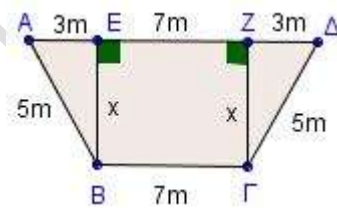
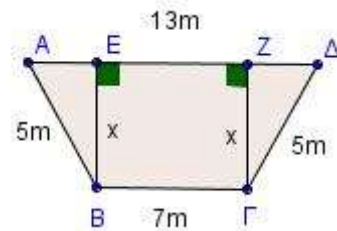
$$AE^2 + EB^2 = AB^2$$

$$3^2 + x^2 = 5^2$$

$$9 + x^2 = 25$$

$$x^2 = 25 - 9$$

$$x^2 = 16 = 4^2 \text{ άρα } x = 4 \text{ m}.$$



9. Ποια από τις τοποθεσίες E, Δ, A είναι πλησιέστερα στη πόλη B;

Λύση

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $EΔB$ έχουμε:

$$EΔ^2 + ΔB^2 = EB^2$$

$$8^2 + ΔB^2 = 17^2$$

$$64 + ΔB^2 = 289$$

$$ΔB^2 = 289 - 64$$

$$ΔB^2 = 225 = 15^2 \text{ άρα } ΔB = 15 \text{ m}.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ έχουμε:

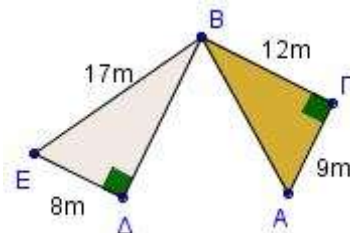
$$AΓ^2 + ΓB^2 = AB^2$$

$$9^2 + 12^2 = AB^2$$

$$AB^2 = 81 + 144$$

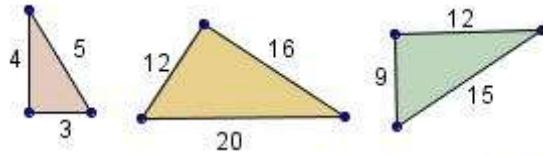
$$AB^2 = 225 = 15^2 \text{ άρα } AB = 15 \text{ m}$$

Επομένως οι τοποθεσίες Δ και A είναι πλησιέστερες στο B.

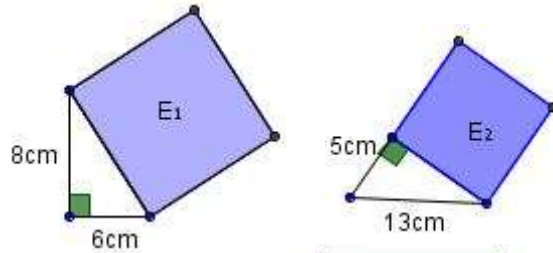


ΕΞΑΣΚΗΣΗ

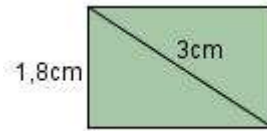
10. Να επαληθεύσετε το πυθαγόρειο θεώρημα στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα:



11. Να υπολογίσετε τα εμβαδά E_1 , E_2 των τετραγώνων των διπλανών σχημάτων.

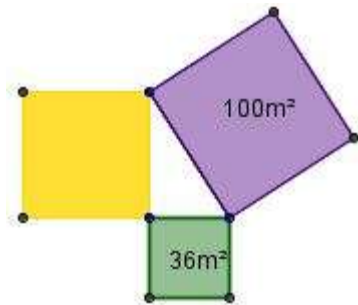


12. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου του διπλανού σχήματος.



13. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $a = 10$, $b = 8$, $\gamma = 6$.
 α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές 10λ , 8λ και 6λ , $\lambda > 0$ είναι επίσης ορθογώνιο.

14. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κίτρινου τετραγώνου στο διπλανό σχήμα.



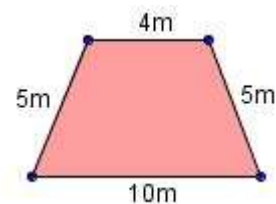
15. Αν α, β οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου και δ η διαγώνιός του, να αποδείξετε ότι: $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

16. α) Αν a η πλευρά ενός τετραγώνου και δ η διαγώνιός του, να αποδείξετε ότι $\delta^2 = 2a^2$.
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν τετραγώνου που η διαγώνιός του είναι 4 cm.

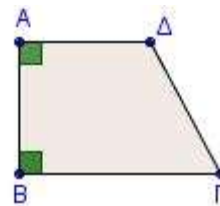
17. Αν u το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς a , να αποδείξετε ότι $u^2 = \frac{3a^2}{4}$.

18. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ίσες πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ και $B\Gamma = 30\text{cm}$. Αν το τρίγωνο έχει περίμετρο 64cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που κατασκευάζεται με πλευρά ίση με το ύψος ΑΔ του τριγώνου.

19. Να υπολογίσετε το ύψος και το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου του διπλανού σχήματος.



20. Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος οι βάσεις του διαφέρουν κατά 3 cm , $\Delta\Gamma = 5\text{cm}$ και $AB = A\Delta$. Να υπολογίσετε τη περίμετρο και το εμβαδόν του.



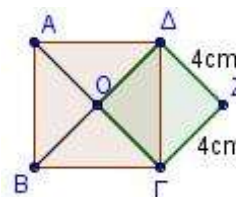
21. Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο έχει εμβαδόν 100 cm^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου.

22. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $AB = A\Gamma = 10\text{cm}$ και βάση $B\Gamma = 16\text{cm}$. Να υπολογίσετε:

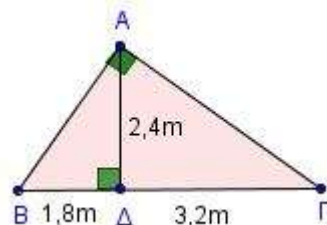
α) Το εμβαδόν του τριγώνου.

β) Το εμβαδόν του τετραγώνου που κατασκευάζεται με πλευρά το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου.

23. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος, αν γνωρίζετε ότι το τετράγωνο $O\Gamma Z\Delta$ έχει πλευρά 4 cm.



24. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο.



Στέλιος Μιχαήλογλου