

## Τριγωνομετρία Γ' Γυμνασίου

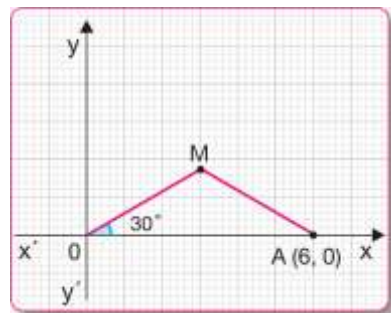
1. Μία ευθεία  $\epsilon$  έχει εξίσωση  $y = 5x$ .

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία  $\epsilon$  και να προσδιορίσετε την τετμημένη του σημείου M που έχει τεταγμένη  $-10$ .

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega = \hat{xOM}$ .

2. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OMA είναι ισοσκελές.

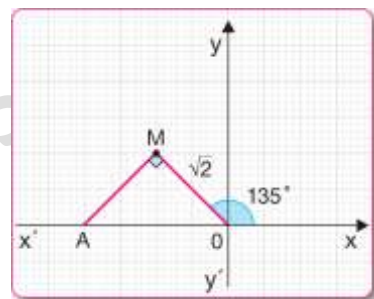
Ν' αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου M είναι  $(3, \sqrt{3})$ .



3. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο OMA είναι ορθογώνιο και  $OM = \sqrt{2}$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M.

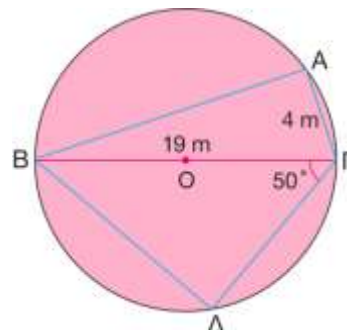
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $135^\circ$ .



4. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε:

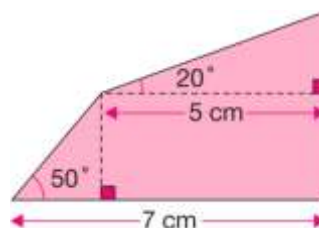
α) τη γωνία  $\hat{BGA}$ .

β) τη χορδή ΓΔ.



(Αν.: α)  $52^\circ$ , β) 12,22 m).

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του διπλανού σχήματος.



## Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

6. Να βρείτε τη γωνία  $x$  όταν  $0 \leq x \leq 180^\circ$  και:

α)  $\sin x = 1 - \sin x$

β)  $2\sin^2 x = 1$

γ)  $3\cos^2 x - 1 = 0$

$$\delta) 2\eta\mu x + \sqrt{3} = 0 \quad \epsilon) 1 - 2\eta\mu^2 x = 0 \quad \sigma\tau) 3 - \epsilon\phi^2 x = 0.$$

7. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu 137^\circ + \sigma\upsilon\nu 29^\circ - \eta\mu 43^\circ + \sigma\upsilon\nu 151^\circ = 0 \quad \beta) \epsilon\phi 68^\circ - \epsilon\phi 45^\circ \cdot \epsilon\phi 22^\circ = 0.$$

8. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 120^\circ = 1 \quad \beta) \epsilon\phi^2 135^\circ + \epsilon\phi^2 60^\circ + 3\epsilon\phi^2 150^\circ = 5.$$

9. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu(56^\circ - x) = \eta\mu(124^\circ + x) \quad \beta) \sigma\upsilon\nu(32^\circ + x) + \sigma\upsilon\nu(148^\circ - x) = 0.$$

10. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu 120^\circ \cdot \eta\mu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 150^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ + \eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \epsilon\phi 45^\circ.$$

$$(A\pi.: -\frac{7}{8}).$$

11. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu A = \eta\mu(B + \Gamma) \quad \beta) \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu(B + \Gamma) = 0 \quad \gamma) \epsilon\phi A + \epsilon\phi(B + \Gamma) = 0.$$

12. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 100^\circ + \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \\ + \sigma\upsilon\nu 140^\circ + \sigma\upsilon\nu 160^\circ + \sigma\upsilon\nu 180^\circ = 0.$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \sigma\upsilon\nu 3^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 179^\circ + \sigma\upsilon\nu 180^\circ = 0.$$

### Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

13. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$  αν γνωρίζετε ότι:

$$\eta\mu \omega = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad 90^\circ < \omega < 180^\circ.$$

14. Αν η γωνία  $\theta$  είναι αμβλεία και γνωρίζουμε ότι  $\epsilon\phi \theta = -\sqrt{3}$ , να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\theta$ .

15. Αν η γωνία  $\omega$  είναι αμβλεία και γνωρίζουμε ότι  $\sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{5}{6}$ , να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$ .

16. Αν  $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{5}{13}$  και  $90^\circ < x < 180^\circ$  να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{(2\eta\mu x - 3\sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x)}{2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}.$$

17. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\beta) \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{1}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

$$\gamma) (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)^2 + (3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)^2 = 13$$

18. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\upsilon\alpha} + \frac{1-\sigma\upsilon\upsilon\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$$

$$\beta) \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\upsilon\alpha} + \frac{1}{\epsilon\phi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha}.$$

$$\gamma) \frac{\eta\mu^3\chi \cdot \sigma\upsilon\upsilon\chi - \eta\mu^5\chi \cdot \sigma\upsilon\upsilon\chi}{\sigma\upsilon\upsilon^3\chi \cdot \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\upsilon^5\chi \cdot \eta\mu\chi} = 1$$

$$\delta) \epsilon\phi\chi(\sigma\upsilon\upsilon\chi - \sigma\upsilon\upsilon^3\chi) = \eta\mu^3\chi$$

19. Ν' απλοποιήσετε τις παραστάσεις:  $A = \frac{\sigma\upsilon\upsilon^2\theta - \eta\mu^2\theta}{1 - \epsilon\phi^2\theta}$

$$B = \frac{2\sigma\upsilon\upsilon^2\theta - 1}{\sigma\upsilon\upsilon^4\theta - \eta\mu^4\theta}$$

20. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \sigma\upsilon\upsilon 120^\circ \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2 70^\circ - \sigma\upsilon\upsilon 120^\circ \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2 110^\circ.$$

21. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\upsilon^4\chi = 1 - 2\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2\chi$$

$$\beta) \eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2\phi - \eta\mu^2\phi \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2\chi = \eta\mu^2\chi - \eta\mu^2\phi$$

$$\gamma) \epsilon\phi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \frac{\eta\mu^4\alpha}{\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha}$$

$$\delta) \epsilon\phi^2\chi \cdot \epsilon\phi^2\gamma - 1 = \frac{\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\upsilon^2\gamma}{\sigma\upsilon\upsilon^2\chi \cdot \sigma\upsilon\upsilon^2\gamma}.$$

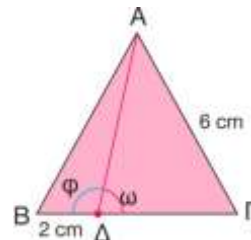
22. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της οξείας γωνίας  $\omega$ , αν γνωρίζετε ότι  $\eta\mu\omega = 3\sigma\upsilon\upsilon\omega - 1$ .

23. Ν' αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\epsilon\phi^2\chi - 2}{1 + \epsilon\phi^2\chi} = \eta\mu^2\chi - 2\sigma\upsilon\upsilon^2\chi$$

$$\beta) \frac{\epsilon\phi\chi}{1 + \epsilon\phi^2\chi} + \frac{\sigma\upsilon\upsilon^3\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{1}{\epsilon\phi\chi}$$

24. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ με πλευρά 6 cm και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τέτοιο, ώστε ΒΔ = 2 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών  $\omega$  και  $\phi$ .



25. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) είναι  $\gamma = \frac{5}{13}\alpha$ . Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\upsilon B + 5\epsilon\phi B}{\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\upsilon\Gamma + 12\epsilon\phi\Gamma}.$$

26. Ν' αποδειχθεί ότι:  $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + 2\sigma\upsilon\upsilon\alpha \cdot \sigma\upsilon\upsilon\beta \leq 2$

27. Ν' αποδειχθεί ότι η παράσταση:  $\Pi = \eta\mu^4\alpha(3 - 2\eta\mu^2\alpha)\sigma\upsilon\upsilon^4\alpha(3 - 2\sigma\upsilon\upsilon^2\alpha)$  είναι ανεξάρτητη του  $\alpha$ .