



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Τι λέγεται ταυτότητα;

Β. Να συμπληρώσετε στο γραπτό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν ταυτότητες:

$$(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$$

$$(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$$

Γ. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Να δώσετε τον ορισμό της ομοιότητας τριγώνων.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.



1. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες θα είναι ίσα Σ ☐ Λ ☐
2. Δύο όμοια τρίγωνα είναι ίσα. Σ ☐ Λ ☐
3. Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια. Σ ☐ Λ ☐
4. Δύο ίσα τρίγωνα είναι όμοια Σ ☐ Λ ☐
5. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες θα είναι όμοια. Σ ☐ Λ ☐

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται η παράσταση: $A(x) = (x+3)^2 - 2(x-1)(x+1) - (x-4)^2 - 7$

A. Να εκτελέσετε τις πράξεις και να δείξετε ότι : $A(x) = -2x^2 + 14x - 12$

B. Να λύσετε την εξίσωση: $A(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3(x-1) - 2 = 2(y+3) + 1 \end{cases}$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



A. Να δείξετε με κατάλληλες πράξεις ότι μετασχηματίζεται στο $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$.

B. Να λυθεί (με οποιαδήποτε μέθοδο) το σύστημα του ερωτήματος A.

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{25\sigma\upsilon\nu^2\omega - 16\epsilon\varphi^2\omega - \frac{9}{\epsilon\varphi^2\omega}}{25\eta\mu^2\omega}$$

Σημείωση: Από τα δύο θέματα θεωρίας να επιλέξετε και να απαντήσετε στο ένα και από τις τρεις ασκήσεις να επιλέξετε και να λύσετε τις δύο

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1°

- A. Ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται μονώνυμο και από ποια μέρη αποτελείται
- B. Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα
- Γ. Ποια αλγεβρική παράσταση λέγεται πολυώνυμο

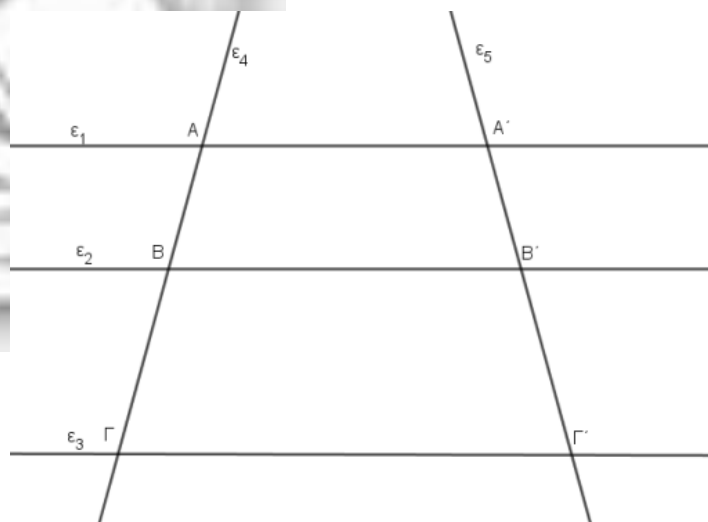
ΘΕΜΑ 2°

- A. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
- B. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και να

συμπληρώσετε τους λόγους

$$\frac{\dots}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \text{ που προκύπτουν από}$$

το σχήμα. ($\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$)





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Αν $A(x) = (2x+1)^2 - 3x$ και $B(x) = (x-3)^2 + (x-2)(x+2)$, τότε να γίνουν οι πράξεις στα πολυώνυμα $A(x)$, $B(x)$ και μετά να λύσετε την εξίσωση $A(x) - B(x) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Δίνονται τα παρακάτω συστήματα **(Σ1)** και **(Σ2)**:

$$(\Sigma 1) \begin{cases} 2x - 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases} \quad (\Sigma 2) \begin{cases} \alpha y - \beta = -2x \\ -\alpha - \beta y = -3x \end{cases}$$

A. Να λυθεί το σύστημα **(Σ1)**.

B. Αν η λύση του συστήματος **(Σ1)**: $(x, y) = (4, 1)$ είναι και λύση του συστήματος **(Σ2)**, να

δημιουργήσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους α , β .

Γ. Να βρεθεί η λύση (α, β) του παραπάνω συστήματος που δημιουργήσατε

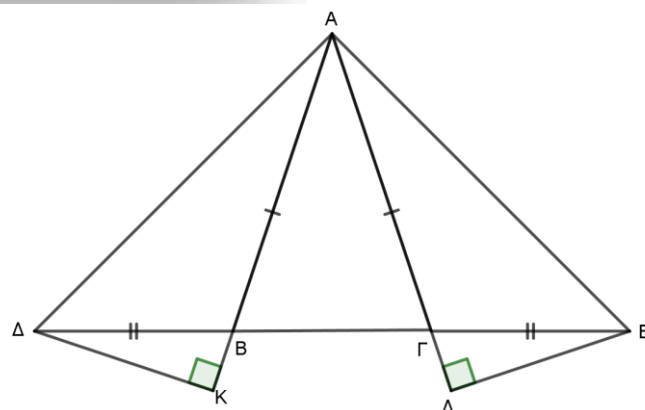
ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)

προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$, ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

A. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$

είναι ίσα.





ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ 

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



Β. Αν $\Delta K \perp AB$ και $EL \perp AG$, να δείξετε ότι $\Delta K = EL$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Σημείωση: Από τα δύο θέματα θεωρίας να επιλέξετε και να απαντήσετε στο ένα και από τις τρεις ασκήσεις να επιλέξετε και να λύσετε τις δύο

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1°:

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$.

Α. Ποια ποσότητα λέγεται διακρίνουσα Δ της εξίσωσης.

Να γράψετε τον τύπο που δίνει τις ρίζες της εξίσωσης.

Β. Τι γνωρίζετε για τις ρίζες της εξίσωσης αυτής όταν $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$.

Γ. Όταν $\Delta > 0$ και ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης τότε να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

ΘΕΜΑ 2°:

Α. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνεται το σημείο $M(x, \psi)$.

Ονομάζουμε ρ την απόστασή του OM από το O και $\hat{\omega}$ τη γωνία $x\hat{O}M$.

Να συμπληρώσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\omega}$ (κανόνας-τύπος)



$\eta\mu\omega = \text{---} = \text{---}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \text{---} = \text{---}$, $\epsilon\varphi\omega = \text{---} = \text{---}$

Β. Για δύο παραπληρωματικές γωνίες $\hat{\omega}$ και $(180^\circ - \hat{\omega})$ να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$\eta\mu(180^\circ - \hat{\omega}) = \text{---}$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \hat{\omega}) = \text{---}$ και $\epsilon\varphi(180^\circ - \hat{\omega}) = \text{---}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

Α. Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα

$$3x^2 - 6x, x^2 + 4x + 4, 2x^2 - 8, (2x + 1)^2 - (4x - 5)^2.$$

Β. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα $A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8}$, $B = \frac{(2x + 1)^2 - (4x - 5)^2}{x^2 + 4x + 4}$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

Α. Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} 3 + 2(x - 3y) = y + x \\ 1 - \frac{2x - 3y}{5} = \frac{x + 6}{10} - y \end{cases}$$

Β. Αν (x_0, y_0) η λύση του συστήματος, τότε να δείξετε ότι $3x_0 + 2y_0 + 2004 = 2018$



ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

Στο διπλανό σχήμα είναι

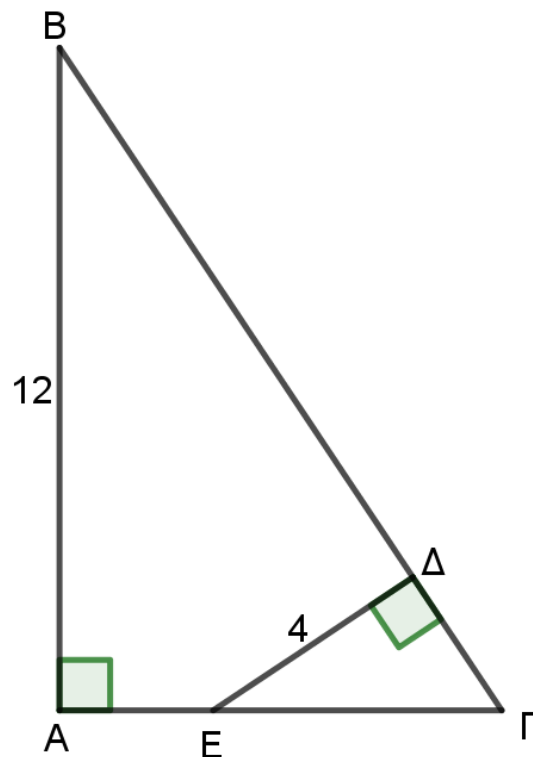
$$\hat{A} = 90^\circ, \hat{\Delta} = 90^\circ, AB = 12 \text{ cm}, DE = 4 \text{ cm}.$$

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι

όμοια

B. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους

Γ. Αν το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ έχει εμβαδόν 6 cm^2 , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.



Σημείωση: Από τα δύο θέματα θεωρίας να επιλέξετε και να απαντήσετε στο ένα και από τις τρεις ασκήσεις να επιλέξετε και να λύσετε τις δύο

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ





ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1°:

- A. Να συμπληρώσετε το δεύτερο μέρος της ταυτότητας $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$
- B. Τι λέγεται αναγωγή όμοιων όρων και τι παραγοντοποίηση;
- Γ. Τι ονομάζεται ΜΚΔ και τι ΕΚΠ αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;

ΘΕΜΑ 2°:

- A. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων
- B. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ (σχήμα)
- Γ. Να γράψετε το νόμο των ημιτόνων και πότε τον χρησιμοποιούμε.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι 265.

A. Αν συμβολίσουμε με x τον μικρότερο από τους δύο αριθμούς, αποδείξτε ότι:

$$x^2 + x - 132 = 0$$

B. Να υπολογίσετε τους δύο αριθμούς.

ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

A. Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ -3\alpha + 5\beta = 2 \end{cases}$$

B. Αν $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ η λύση του συστήματος του Α ερωτήματος, να παραγοντοποιηθούν οι

παραστάσεις: $A = 2\alpha x^2 + x$ και $B = 4x^2 - \beta$

Γ. Να απλοποιηθεί το κλάσμα $\frac{A}{B}$ για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε ότι $\varepsilon\varphi B = -1$ και $\sigma\upsilon\nu A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του και να βρείτε, σε μοίρες, τη μεγαλύτερη γωνία του.



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



Β. Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας A .

Γ. Αν επιπλέον, γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς $ΑΓ$ είναι 2, να προσδιορίσετε το μήκος της $ΒΓ$.

Σημείωση: Από τα δύο θέματα θεωρίας να επιλέξετε και να απαντήσετε στο ένα και από τις τρεις ασκήσεις να επιλέξετε και να λύσετε τις δύο

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1°:

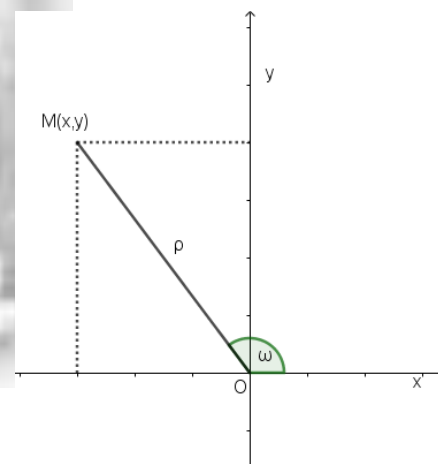
- A. Τι ονομάζουμε μονώνυμο και ποια μονώνυμα λέγονται όμοια;
- B. Πως πολλαπλασιάζουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο και πως μονώνυμο με πολυώνυμο;
- Γ. Να γράψετε και να αποδείξετε τον τύπο της ταυτότητας κύβος αθροίσματος

ΘΕΜΑ 2°:

- A. Για μια γωνία ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ να συμπληρωθούν οι ισότητες:

$$\eta\mu\omega = \dots \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \dots \quad \epsilon\varphi\omega = \dots \quad \rho = \sqrt{\dots}$$

- B. Να αποδειχθεί η τριγωνομετρική ταυτότητα: $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$





ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

A. Να αποδείξετε ότι : $4x = (x+1)^2 - (x-1)^2$

B. Να γράψετε τον αριθμό 2020 ως διαφορά τετραγώνων δυο φυσικών αριθμών.

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $(504+1)^2 - (504-1)^2$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = 2\alpha x + 3\beta$

Αν η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(1, -4)$ και $K(-1, -8)$, τότε να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω ευθείας.

ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

Στο διπλανό σχήμα δίνονται $KB \parallel \Lambda\Gamma$

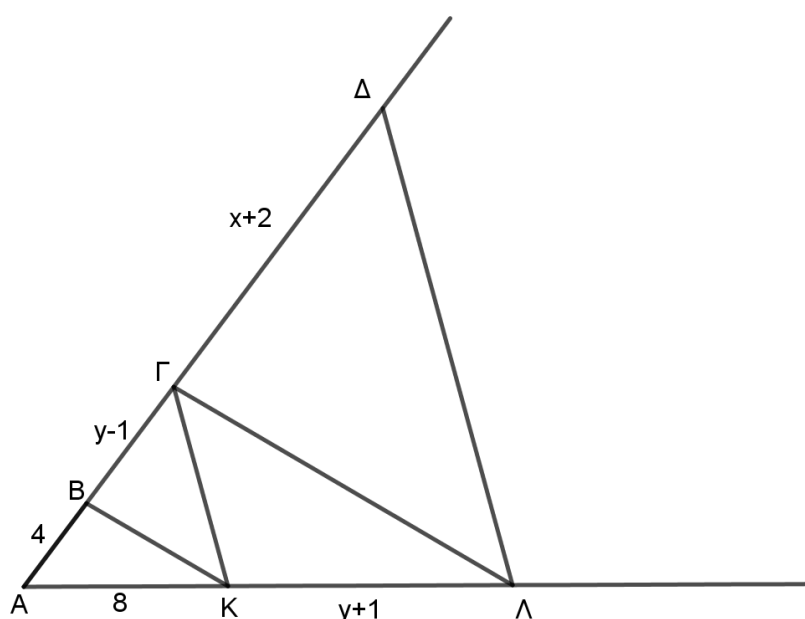
και $K\Gamma \parallel \Lambda\Delta$. Επιπλέον $AB = 4$,

$B\Gamma = y - 1$, $\Gamma\Delta = x + 2$, $AK = 8$ και

$KL = y + 1$. Να υπολογίσετε:

A. το y

B. το x και





ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ 

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



Γ. τον λόγο $\frac{(ΑΚΓ)}{(ΑΛΔ)}$

Σημείωση: Από τα δύο θέματα θεωρίας να επιλέξετε και να απαντήσετε στο ένα και από τις τρεις ασκήσεις να επιλέξετε και να λύσετε τις δύο

Καλή επιτυχία και καλό καλοκαίρι!



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Β. • $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

• $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

• $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

• $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Γ. $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$

$$= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

ΘΕΜΑ 2°

Α. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.



Β. 1. Λάθος, 2. Λάθος, 3. Σωστό, 4. Σωστό, 5. Σωστό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Είναι: $A(x) = (x+3)^2 - 2(x-1)(x+1) - (x-4)^2 - 7$

$$= x^2 + 6x + 9 - 2(x^2 - 1) - (x^2 - 8x + 16) - 7$$

$$= x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 2 - x^2 + 8x - 16 - 7$$

$$= -2x^2 + 14x - 12$$

Β. Είναι: $A(x) = 0$

$$-2x^2 + 14x - 12 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

Είναι: $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 > 0$$

Οπότε: $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \\ \frac{7-5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Άρα, $x = 1$ ή $x = 6$

ΘΕΜΑ 2°

$$\text{Α. Είναι: } \begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{y-1}{2} = 3 \\ 3(x-1) - 2 = 2(y+3) + 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 6 \cdot \frac{x+1}{3} - 6 \cdot \frac{y-1}{2} = 6 \cdot 3 \\ 3x - 3 - 2 = 2y + 6 + 1 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} \frac{2}{\cancel{6}} \cdot \frac{(x+1)}{\cancel{3}} - \frac{3}{\cancel{6}} \cdot \frac{(y-1)}{\cancel{2}} = 6 \cdot 3 \\ 3x - 3 - 2 = 2y + 6 + 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2(x+1) - 3(y-1) = 18 \\ 3x - 2y = 6 + 1 + 3 + 2 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} 2x + 2 - 3y + 3 = 18 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 18 - 2 - 3 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

$$\text{Β. Είναι: } \begin{cases} 3 \cdot \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \\ (-2) \cdot \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 3 \cdot 2x - 3 \cdot 3y = 3 \cdot 13 \\ (-2) \cdot 3x - (-2) \cdot 2y = (-2) \cdot 12 \end{cases}$$

$$\text{ή} \quad \begin{cases} 6x - 9y = 39 \\ -6x + 4y = -24 \end{cases}$$

$$-5y = 15$$

$$\frac{-5y}{-5} = \frac{15}{-5}$$



$$y = -3$$

$$\Gamma\iota\alpha \quad 3x - 2 \cdot (-3) = 12$$

$$3x + 6 = 12$$

$$3x = 12 - 6$$

$$3x = 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

$$\text{Άρα, } (x, y) = (2, -3)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

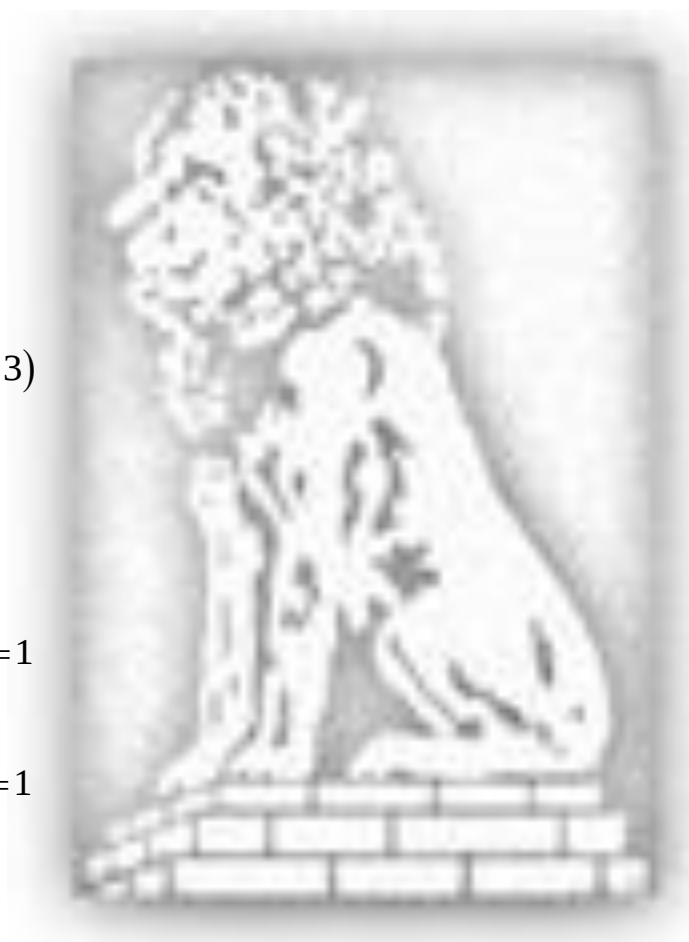
$$\text{Είναι: } \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\frac{9}{25} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$





$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{16}{25}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{\frac{16}{25}} \quad \eta \quad \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5} \quad \eta \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{4}{5}$$

Επειδή $90^\circ < x < 180^\circ$ άρα $\sigma\upsilon\nu x < 0$ άρα $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{4}{5}$

Είναι: $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ οπότε $\epsilon\phi x = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$ άρα $\epsilon\phi x = -\frac{3}{4}$

Επομένως, $A = \frac{25\sigma\upsilon\nu^2 \omega - 16\epsilon\phi^2 \omega - \frac{9}{\epsilon\phi^2 \omega}}{25\eta\mu^2 \omega} = \frac{25 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 16 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}}{25 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2}$

$$= \frac{25 \cdot \frac{16}{25} - 16 \cdot \frac{9}{16} - \frac{9}{\frac{9}{16}}}{25 \cdot \frac{9}{25}} = \frac{16 - 9 - 16}{9} = -\frac{9}{9} = -1$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο:

Α. Είναι: $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Β. • Αν $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις, τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

• Αν $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma = 0$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή λύση, τις $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

• Αν $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma < 0$, τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη)

Γ. Αν ϱ_1, ϱ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε το τριώνυμο

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)$



ΘΕΜΑ 2^ο:

A. • $\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}$

• $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$

• $\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$

B. • $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$

• $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$

• $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\epsilon\varphi\omega$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

A. $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

$$2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x - 2)(x + 2)$$

$$(2x + 1)^2 - (4x + 5)^2 = [(2x + 1) - (4x + 5)][(2x + 1) + (4x + 5)]$$



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



$$= (2x+1-4x-5)(2x+1+4x+5)$$

$$= (6x+6)(-2x-4) = -12(x+1)(x+2)$$

$$\text{B. } A = \frac{3x^2 - 6x}{2x^2 - 8} = \frac{3x(x-2)}{2(x-2)(x+2)} = \frac{3x \cancel{(x-2)}}{2 \cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{3x}{2(x+2)},$$

$$B = \frac{(2x+1)^2 - (4x+5)^2}{x^2 + 4x + 4} = \frac{-12(x+1)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{-12(x+1) \cancel{(x+2)}}{(x+2) \cancel{(x+2)}} = \frac{-12(x+1)}{x+2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

$$\text{A. } \begin{cases} 3 + 2(x - 3y) = y + x \\ 1 - \frac{2x - 3y}{5} = \frac{x + 6}{10} - y \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{cases} 3 + 2x - 6y = y + x \\ 10 \cdot 1 - 10 \cdot \frac{2x - 3y}{5} = 10 \cdot \frac{x + 6}{10} - 10 \cdot y \end{cases}$$

$$\dot{\eta} \quad \begin{cases} 2x - x - 6y - y = -3 \\ 10 - \cancel{10} \cdot \frac{2x - 3y}{\cancel{5}} = \cancel{10} \cdot \frac{x + 6}{\cancel{10}} - 10y \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{cases} x - 7y = -3 \\ 10 - 2(2x - 3y) = x + 6 - 10y \end{cases}$$

$$\dot{\eta} \quad \begin{cases} x - 7y = -3 \\ 10 - 4x + 6y = x + 6 - 10y \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{cases} x - 7y = -3 \\ -4x - x + 6y + 10y = 6 - 10 \end{cases}$$

$$\dot{\eta} \quad \begin{cases} x - 7y = -3 \\ -5x + 16y = -4 \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{matrix} \cdot 5 \\ \cdot 1 \end{matrix} \begin{cases} x - 7y = -3 \\ -5x + 16y = -4 \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{matrix} 5x - 35y = -15 \\ -5x + 16y = -4 \end{matrix}$$

$$-19y = -19$$

$$\frac{-19y}{-19} = \frac{-19}{-19}$$



$$y=1$$

Για $y=1$ είναι: $x-7 \cdot 1=-3$

$$x-7=-3$$

$$x=7-3$$

$$x=4$$

Άρα, $(x, y)=(4, 1)$

Β. Αν $(x, y)=(4, 1)$, τότε: $3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2004 = 12 + 2 + 2004 = 2018$

ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

Α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta E\Gamma$ είναι όμοια γιατί έχουν:

$$\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ \text{ και την } \hat{\Gamma} \text{ κοινή.}$$

Β. Είναι: $\lambda = \frac{AB}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Gamma}{E\Gamma}$ οπότε $\lambda = \frac{12}{4} = 3$

Γ. Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου

ομοιότητας, άρα $\frac{AB\Gamma}{\Delta E\Gamma} = \lambda^2$ δηλαδή $\frac{AB\Gamma}{6} = 3^2$ οπότε $AB\Gamma = 54\text{cm}^2$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο:

A. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

B. Όταν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, τότε τα αντικαθιστούμε με το άθροισμά τους. Η εργασία αυτή λέγεται αναγωγή ομοίων όρων.

Γ. Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.



ΘΕΜΑ 2°:

A. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

B. Για την απόσταση $\rho = OM$ ενός σημείου $M(x, y)$ από

την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ή} \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

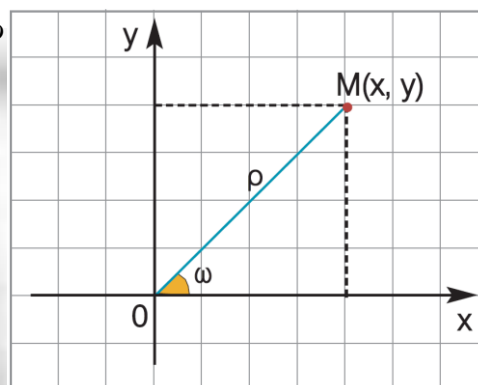
Αν διαιρέσουμε κατά μέλη με το ρ^2 , τότε έχουμε:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2} = \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} \quad \text{ή} \quad 1 = \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2$$

Επειδή $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ η ισότητα γίνεται:

$$1 = (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 \quad \text{ή} \quad \text{συντομότερα} \quad \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

Γ. Νόμος των ημιτόνων: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$



Τον χρησιμοποιούμε σε οποιαδήποτε τρίγωνο, αν γνωρίζουμε δύο πλευρές και μία αντίστοιχη γωνία αυτών, ή αν γνωρίζουμε δύο γωνίες και μία αντίστοιχη πλευρά αυτών για να βρούμε τα υπόλοιπα πρωτεύοντα στοιχεία.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

Α. Έστω x ο μικρότερος από τους δύο αριθμούς, τότε $x+1$ ο άλλος αριθμός

$$\text{Άρα, } x^2 + (x+1)^2 = 265$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 265$$

$$2x^2 + 2x - 264 = 0$$

$$x^2 + x - 132 = 0$$

Β. Είναι: $\Delta = \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-132) = 1 + 528 = 529$$

$$\text{Είναι: } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{529}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 23}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + 23}{2} = \frac{22}{2} = 11 \\ \frac{-1 - 23}{2} = -\frac{24}{2} = -12 \end{cases}$$

Αλλά, $x = -12$ απορρίπτεται γιατί δεν είναι φυσικός αριθμός.

Άρα, οι ζητούμενοι αριθμοί είναι: 11 και 12.



ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

$$\text{Α. Είναι: } \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ -3\alpha + 5\beta = 2 \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{cases} \cdot 3 \\ \cdot 2 \end{cases} \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 5 \\ -3\alpha + 5\beta = 2 \end{cases} \quad \dot{\eta} \quad \begin{cases} 6\alpha + 9\beta = 15 \\ -6\alpha + 10\beta = 4 \end{cases}$$

$$19\beta = 19$$

$$\frac{19\beta}{19} = \frac{19}{19}$$

$$\beta = 1$$

Για $\beta = 1$ είναι: $2\alpha + 3 \cdot 1 = 5$

$$2\alpha + 3 = 5$$

$$2\alpha = 5 - 3$$

$$2\alpha = 2$$

$$\frac{2\alpha}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\alpha = 1$$

Άρα, $(\alpha, \beta) = (1, 1)$

Β. Είναι: $A = 2x^2 + x = x(2x + 1)$ και

$$B = 4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x - 1)(2x + 1)$$

Γ. Για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$ είναι: $\frac{A}{B} = \frac{x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{\cancel{x(2x+1)}}{(2x-1)\cancel{(2x+1)}} = \frac{x}{2x-1}$



ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι $\varepsilon\varphi B = -1$ και $\sigma\upsilon\nu A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. Να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του και να βρείτε, σε μοίρες, τη μεγαλύτερη γωνία του.

B. Να υπολογίσετε το ημίτονο της γωνίας Α.

Γ. Αν επιπλέον, γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς ΑΓ είναι 2, να προσδιορίσετε το μήκος της ΒΓ.

A. Επειδή $\varepsilon\varphi B = -1$ άρα η $\hat{B} > 90^\circ$ άρα το τρίγωνο αμβλυγώνιο.

Είναι: $\varepsilon\varphi B = -1 = -\varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = \varepsilon\varphi 135^\circ$ οπότε $\hat{B} = 135^\circ$

B. Είναι: $\eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1$

$$\eta\mu^2 A + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\eta\mu^2 A + \frac{3}{4} = 1$$

$$\eta\mu^2 A = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



$$\eta\mu^2 A = \frac{1}{4}$$

$$\eta\mu A = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta\mu A = \frac{1}{2}$$

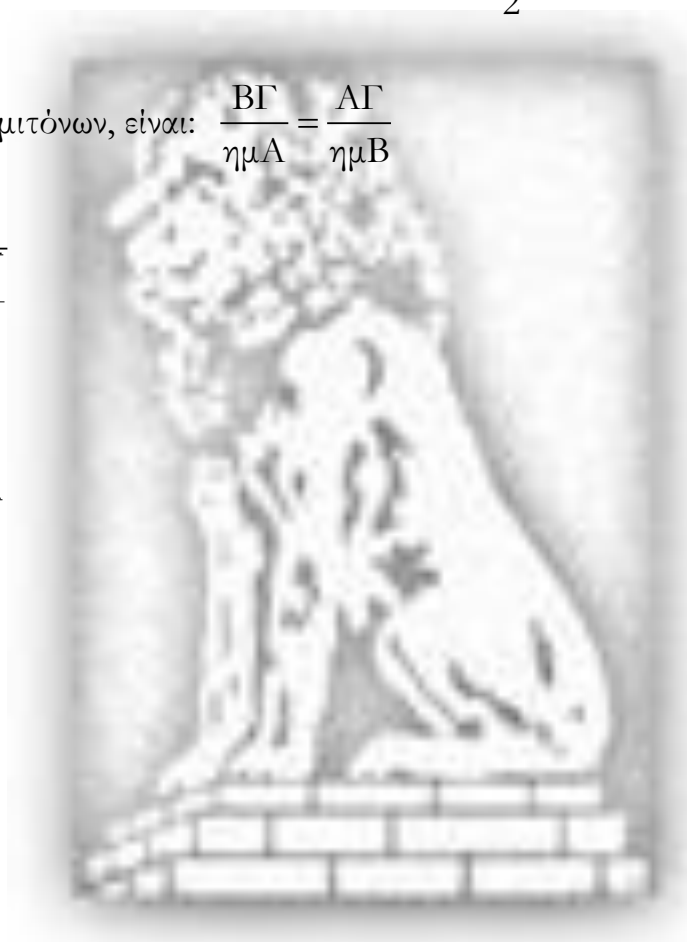
Επειδή $\hat{A}$ οξεία, άρα $\eta\mu A > 0$ άρα $\eta\mu A = \frac{1}{2}$

Γ. Από τον νόμο των ημιτόνων, είναι: $\frac{B\Gamma}{\eta\mu A} = \frac{A\Gamma}{\eta\mu B}$

$$\text{Οπότε} \quad \frac{B\Gamma}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} B\Gamma = 1$$

$$B\Gamma = \sqrt{2}$$





ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Γ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο:

A. Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**.

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια**.

B. Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

Γ. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

Απόδειξη

$$(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$



ΘΕΜΑ 2^ο:

A. $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

B. Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, με την προϋπόθεση ότι

$$\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0, \text{ έχουμε: } \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} \quad \text{ή} \quad \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y\rho}{x\rho} \quad \text{ή} \quad \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{y}{x} = \epsilon\varphi\omega$$

Άρα, αποδείξαμε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ ισχύει $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

A. $(x+1)^2 - (x-1)^2 = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)$
 $= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x$

B. Είναι: $2020 = 4 \cdot 505 = (505+1)^2 - (505-1)^2 = 506^2 - 504^2$ με χρήση της

ταυτότητας που αποδείχθηκε στο Α. ερώτημα.

Γ. Είναι: $(504+1)^2 - (504-1)^2 = 4 \cdot 504 = 2016$ με χρήση της ταυτότητας που αποδείχθηκε στο Α. ερώτημα.



ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\Gamma(1, -4)$ οπότε είναι: $-4 = 2\alpha \cdot 1 + 3\beta$

Οπότε: $2\alpha + 3\beta = -4$

Η ευθεία διέρχεται από το σημείο $\text{Κ}(-1, -8)$ οπότε είναι: $-8 = 2\alpha \cdot (-1) + 3\beta$

Οπότε: $-2\alpha + 3\beta = -8$

Άρα, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -4 \\ -2\alpha + 3\beta = -8 \end{cases}$$

$$6\beta = -12$$

$$\frac{6\beta}{6} = \frac{-12}{6}$$

$$\beta = -2$$

Για $\beta = -2$ είναι: $2\alpha + 3 \cdot (-2) = -4$

$$2\alpha - 6 = -4$$

$$2\alpha = 6 - 4$$

$$2\alpha = 2$$

$$\frac{2\alpha}{2} = \frac{2}{2}$$

$$\alpha = 1$$



Άρα, η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι: $\varepsilon: y = 2 \cdot 1 \cdot x + 3 \cdot (-2)$

Δηλαδή $\varepsilon: y = 2x - 6$

ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

A. Είναι $KB // \Lambda\Gamma$ οπότε: $\frac{AK}{KL} = \frac{AB}{B\Gamma}$ άρα $\frac{8}{y+1} = \frac{4}{y-1}$

$$8(y-1) = 4(y+1)$$

$$8y - 8 = 4y + 4$$

$$8y - 4y = 8 + 4$$

$$4y = 12$$

$$\frac{4y}{4} = \frac{12}{4}$$

$$y = 3$$

B. Είναι: $K\Gamma // \Lambda\Delta$ οπότε $\frac{AK}{KL} = \frac{\Lambda\Gamma}{\Gamma\Delta}$ άρα $\frac{8}{4} = \frac{6}{x+2}$

$$8(x+2) = 4 \cdot 6$$

$$8x + 16 = 24$$

$$8x = 24 - 16$$

$$8x = 8$$



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ 

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΕΡΡΩΝ



$$\frac{8x}{8} = \frac{8}{8}$$

$$x = 1$$

Γ. Είναι: $\frac{(ΑΚΓ)}{(ΑΛΔ)} = \lambda^2 = \left(\frac{8}{12}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

